Distribuzione dei primi applicata ai crivelli e conseguenze sulla congettura dei numeri primi gemelli

Gabriele Di Pietro[1]

Abstract
Questo articolo effettua uno studio sul crivello di Eratostene al quale viene applicata una media di distribuzione dei numeri primi nel rispetto del teorema fondamentale congetturato da Gauss. La stima verrá poi perfezionata estendendola alla funzione logaritmo integrale di Gauss che per via delle sue proprietá é il vero candidato a rappresentare la distribuzione media dei numeri primi. Otteniamo cosí una funzione contatore Υ introdotta nella sezione 5. Le sezioni $1-4$ ci danno un'introduzione alla terminologia ed una chiarificazione sui termini di Υ. La sezione 6 riassume le seguenti spiegazioni e fornisce due teoremi il primo usando lo sviluppo al primo ordine del logaritmo integrale, il secondo tenendo conto degli ordini successivi.

1. Introduzione

Un numero si dice *gemello* se si trova a distanza 2 da un numero che lo precede o lo segue.
Un famoso algoritmo per creare una tabella di numeri primi é il crivello di Eratostene: in sequenza scriviamo gli interi dal 2 ad un numero n che é l'ultimo della tabella; cancelliamo tutti i numeri piú grandi di 2 che sono divisibili per 2; i numeri che rimarranno saranno tutti gemelli, ma solo alcuni tra questi sopravviveranno alle prossime eliminazioni. Poi cerchiamo il piú piccolo numero che rimane dopo la cancellazione: é il 3. A questo punto cancelliamo tutti i numeri piú grandi di 3 che sono divisibili per 3, a questo punto rimangono ancora numeri gemelli della forma $6k+1$ e $6k-1$. Come prima solo alcuni di questi sopravviveranno alle prossime cancellazioni. Si puó continuare fino ad arrivare a $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ in modo che i rimanenti numeri dopo la cancellazione siano tutti primi. Una famosa congettura afferma che *esistono infiniti numeri primi gemelli*,il presente articolo vuole giustificare la correttezza di questa affermazione attraverso la distribuzione di numeri primi secondo la formula $\frac{n}{\ln n}$ scoperta da Gauss. Verrá dimostrato che paradossalmente l'esistenza o meno di numeri primi gemelli dipende dalla seguente osservazione: se la distanza in media della distribuzione dei primi aumenta, la funzione che conta i numeri primi gemelli non decresce.

[1]Via Annunziata,42,64021,Giulianova(TE)

2. Crivelli inaccurati

Per prima cosa osserviamo che volendo stabilire se un numero x é primo basta controllare se é divisibile per gli interi al di sotto di $\sqrt{x}$.Analognamente se vogliamo effettuare un crivello di Eratostene esatto fino al numero x dobbiamo cancellare i multipli dei numeri primi minori di $\sqrt{x}$. Chiameremo *aspiranti primi gemelli* quei numeri della forma $6k+1$,$6k-1$ compresi tra x e la sua radice.Essi sono

$$\lfloor\frac{2x}{6}\rfloor - \lfloor\frac{2\sqrt{x}}{6}\rfloor \tag{1}$$

usando la (1) sbaglieremo al massimo di due numeri in eccesso, ma questo é un errore trascurabile e possiamo accettare la (1) senza le parti intere. Per trovare le coppie basterá dividere tutto per 2. I numeri primi al di sotto della radice, piú grandi di 3, verranno chiamati *eliminatori* visto che elimineranno sicuramente qualche numero aspirante gemello; infatti loro stessi, essendo della forma $6k + 1$ o $6k - 1$, posseggono un periodo di 6. Devono cioé effettuare 6 salti prima di effettuare un giro completo e verificare

$$6k + 1 \equiv 1 \ mod \ 6$$

$$6k - 1 \equiv -1 \ mod \ 6$$

La seguente figura chiarisce la terminologia adoperata

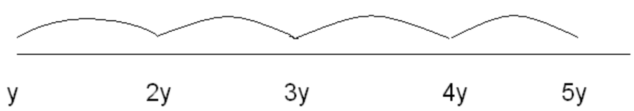

Fig 1 Un eliminatore y ed i suoi *salti* (o multipli).

essa rappresenta un eliminatore y ed i suoi salti che non sono altro che i suoi multipli;y colpisce e quindi elimina i suoi multipli saltando in maniera regolare dalla sua posizione iniziale.Ogni multiplo viene considerato modulo 6, in questo senso se y é congruo a 1 modulo 6 il suo sesto multiplo , ovvero sesto salto ,sará di nuovo un numero congruo a 1 modulo 6. Per la precisione gli eliminatori colpiscono prima un aspirante dell'altra forma e poi un aspirante della sua forma:$6k + 1$, dopo 4 salti, elimina un numero della

forma $6k-1$ e dopo 6 salti un numero della forma $6k+1$, specularmente fa il numero $6k-1$.
La conclusione che sorge spontanea é che quindi ogni eliminatore y effettuerá x/y salti di questi $x/6y$ colpiranno numeri della sua stessa forma e $x/6y$ colpiranno numeri della forma opposta.In totale un eliminatore y colpirá

$$\lfloor \frac{x}{6y} \rfloor + \lfloor \frac{x}{6y} \rfloor \sim \lfloor \frac{x}{3y} \rfloor \tag{2}$$

numeri aspiranti gemelli.Tra questi possiamo scartare i salti effettuati all'interno della zona degli eliminatori visto che stiamo considerando gli aspiranti al di sopra di $\sqrt{x}$.La formula (2) diventa quindi

$$K = \lfloor \frac{x}{3y} \rfloor - \lfloor \frac{\sqrt{x}}{3y} \rfloor \tag{3}$$

La stima (3) non tiene conto delle possibili ripetizioni ovvero che due eliminatori potrebbero colpire lo stesso aspirante gemello, quindi conteremo due volte lo stesso numero giá eliminato; inoltre assumiamo che ogni volta che un eliminatore effettua un salto colpisca una coppia di gemelli mentre in realtá potrebbe eliminare un numero che giá é stato privato del suo compagno e quindi che sarebbe ininfluente nel conteggio delle coppie.
La formula finale diventa quindi

$$\lfloor \frac{x}{6} \rfloor - \lfloor \frac{\sqrt{x}}{6} \rfloor - \sum_{y \in \pi(\sqrt{x})} K \tag{4}$$

dove K é l'espressione (3) e $\pi(\sqrt{x})$ sono i numeri primi minori di $\sqrt{x}$.Il fatto che la (4) si mantenga positiva e quindi confermi la congettura dei primi gemelli é pura utopia ,bisogna raffinare la stima eliminando le ripetizioni ed introducendo nuove osservazioni.

3. La funzione w(n)

Per proseguire il discorso introduciamo la funzione $w(n)$ che rappresenta il numero di primi distinti in cui é possibile fattorizzare il numero n.In questo modo eviteremo le ripetizioni, infatti tutti i numeri che vengono colpiti da un eliminatore necessariamente vengono cancellati anche da un altro eliminatore (grazie alla fattorizzazione); cosí possiamo tranquillamente dimezzare il numero dei salti visto che di essi bastano solo la metá per eliminare gli aspiranti gemelli.Il problema e che un aspirante primo potrebbe

essere colpito da piú di due numeri; in questo caso ad esso vanno tolti due salti e se tutti i numeri fossero colpiti da tre eliminatori dovremmo dividere per 3 il numero totale dei salti.Ci serve quindi una funzione che indica da quanti primi distinti é formato un numero. Considereremo la crescita media di $w(n)$,visto che puntualmente é molto irregolare,che ci indicherá di quanto dobbiamo dividere i salti degli eliminatori.
Utilizzando la stima di Hardy and Wright (1979) si ha perció

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w(i)}{n} = \ln\ln(n) + B_1 + O(\frac{1}{\ln(n)}) \tag{5}$$

dove $B_1 = 0.261497128$. Quindi un minorante per la funzione di media é

$$\ln\ln(n) + B_1 - \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} w(i)}{n} \tag{6}$$

Utilizzando la (6) si perviene a

$$w(z) = z\ln\ln(z) + B_1 z + O(\frac{z}{\ln z}) - (z-1)\ln\ln(z-1) - O(\frac{z-1}{\ln z - 1}) \tag{7}$$

dove $z = 6k-1$ oppure $z = 6k+1$. La

$$L = \frac{1}{\#z} \sum_{z\in[1,n]} w(z) \tag{8}$$

ci fornisce la media cercata.

4. Gemelli completamente sterminati

Sfruttando il teorema dei numeri primi che afferma

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1$$

e in accordo con la diseguaglianza di Chebischev

$$0.92...\frac{x}{\ln(x)} \leq \pi(x) \leq 1.105...\frac{x}{\ln(x)}$$

otteniamo che se abbiamo x numeri siccome $\frac{x}{\ln(x)}$ sono numeri primi possiamo scegliere come distanza media fra numeri primi consecutivi $\ln(x)$. In effetti questa assegnazione puó essere intesa come una forma debole (al primo ordine) dell'utilizzo della funzione logaritmo integrale $Li(x)$:

$$Li(x) = \frac{x}{\ln x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\ln x)^k}$$

Littlewood (1914) dimostró che $Li(x) - \pi(x)$ cambia di segno infinite volte quindi $Li(x)$ é un ottimo candidato per la media, ma per non appesantire i calcoli lavoreremo con $\frac{x}{\ln(x)}$ suo approssimante al primo ordine riservando gli ordini succesivi alla fine dell'articolo. Chiamando μ il successivo numero primo di x abbiamo quindi

$$\mu - x = \ln(x), \tag{9}$$

aumenta fino a diventare maggiore di 8 significa che, tra un numero primo e l'altro, una coppia di aspiranti gemelli viene completamente sterminata, ovvero non rimane nessun sopravvissuto ai salti degli eliminatori.Questa é una buona cosa perché, grazie a questo sacrificio, le altre coppie di primi sopravviveranno provando la congettura. Infatti se una coppia viene completamente sterminata questo significa che due salti vengono impiegati per eliminare la coppia di gemelli. Al numero di salti totali bisogna togliere i salti che colpiscono numeri giá privati dei loro gemelli. Questi, infatti, sono salti irrilevanti nel conteggio degli aspiranti numeri primi gemelli che saranno cancellati.
Quindi tutto si riduce nel trovare una buona approssimazione di

$$T = \sum_{p \in [\sqrt{x}, x]} \lfloor \frac{dist(p) - 3}{6} \rfloor \tag{10}$$

dove $dist(p)$ é la funzione che restituisce la distanza tra p,numero primo, ed il suo successivo numero primo.

$$\tilde{T} = \sum_{p=\sqrt{n}}^{n} (\lfloor \frac{\ln(p) - 3}{6} \rfloor)^{+} \tag{11}$$

é il numero di salti che sterminano completamente le coppie di gemelli nell'intervallo considerato .Ogni x della formula (9) é in realtá un numero primo quindi se sviluppiamo la sommatoria della (11) otteniamo

$$\sum_{p=\sqrt{n}}^{n} \lfloor \frac{\ln(p)}{6} \rfloor - \lfloor \frac{3}{6} (\frac{n}{\ln(n)} - \frac{\sqrt{n}}{\ln \sqrt{n}}) \rfloor \sim \sum_{p=\sqrt{n}}^{n} \frac{ln(p)}{6} - \frac{5.5}{6} (\frac{n}{\ln(n)} - \frac{\sqrt{n}}{\ln \sqrt{n}}) \tag{12}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo considerato che stiamo sommando le parti intere quindi dobbiamo togliere almeno un numero di elementi pari alla parti decimali che si possono ottenere.Nel nostro caso essendo il numeratore diviso per 6 le parti decimali che posso ottenere sono $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ che sommati fra loro ci fanno ottenere 2.5 quindi il numeratore va corretto con $-2.5(\frac{n}{\ln(n)} - \frac{\sqrt{n}}{\ln \sqrt{n}})$ da cui la spiegazione del valore 5.5.

5. Sviluppo della funzione contatore di numeri primi gemelli

Considerando i potenziali numeri primi tra x e la sua radice abbiamo che essi sono uguali a $\lfloor \frac{2x}{6} \rfloor - \lfloor \frac{2\sqrt{x}}{6} \rfloor$ in accordo con la (1). Se ad essi togliamo i numeri primi compresi nello stesso intervallo ,$[\sqrt{x}, x]$, otteniamo i numeri eliminati dal crivello senza ripetizioni. Questa quantitá senza notevoli sforzi ci permette cosí di calcolare la (8) ed anche il terzo membro della (4) ovvero di rappresentare

$$\frac{1}{L} \sum_{y \in \pi(\sqrt{x})} K = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor - \lfloor \frac{\sqrt{x}}{3} \rfloor - \pi(x) + \pi \sqrt{(x)} \tag{13}$$

senza il bisogno di calcolarsi $w(n)$ per gli aspiranti primi.A questo punto riassemblando le varie componenti siamo in grado di scrivere la funzione contatore dei numeri gemelli

$$\Upsilon(x) = \lfloor \frac{x}{6} \rfloor - \lfloor \frac{\sqrt{x}}{6} \rfloor - \frac{1}{L} \sum_{y \in \pi(\sqrt{x})} K + T \tag{14}$$

dove

$$\frac{1}{L} \sum_{y \in \pi(\sqrt{x})} K = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor - \lfloor \frac{\sqrt{x}}{3} \rfloor - \pi(x) + \pi \sqrt{x} \tag{15}$$

$$T = \sum_{p \in [\sqrt{x}, x]} \lfloor \frac{dist(p) - 3}{6} \rfloor \tag{16}$$

Essa rappresenta il numero di primi gemelli tra x e $\sqrt{x}$ quindi se si mantiene maggiore di zero la congettura che afferma *esistono infinite coppie di numeri gemelli* risulta verificata .

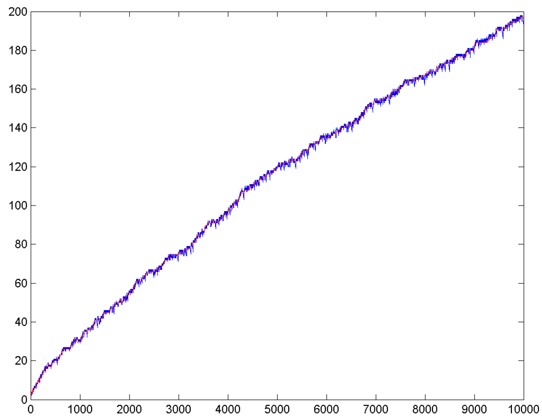

Fig. 2 In rosso la vera funzione dei numeri gemelli in $[\sqrt{x}, x]$ e $\Upsilon(x)$ in blu.

Naturalmente usando il teorema dei numeri primi

$$\pi(x) - \pi\sqrt{x} \sim (\frac{x}{\ln(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}) \tag{17}$$

giusto per poter approssimare meglio dal basso la funzione dei numeri primi gemelli; alla luce di questo poi vedremo come la stima peggiore andrebbe ad alterare il risultato del prossimo Teorema

6. Approssimazione della funzione contatore dei numeri gemelli

Consideriamo a questo punto,date le precedenti conclusioni, l'approssimazione

$$\tilde{\Upsilon}(x) = \lfloor\frac{x}{6}\rfloor - \lfloor\frac{\sqrt{x}}{6}\rfloor - \frac{1}{\tilde{L}}\sum_{\tilde{y}\in\pi(\sqrt{x})}\tilde{K} + \tilde{T} \tag{18}$$

dove

$$\frac{1}{\tilde{L}}\sum_{\tilde{y}\in\pi(\sqrt{x})}\tilde{K} = \lfloor\frac{x}{3}\rfloor - \lfloor\frac{\sqrt{x}}{3}\rfloor - (\frac{x}{\ln(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}) \tag{19}$$

$$\tilde{T} = \frac{(\ln(x) - 5.5)}{6}(\frac{x}{\ln(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}) \tag{20}$$

Teorema 1 *La funzione $\tilde{\Upsilon}(x)$,definita da (18)-(20), che approssima $\Upsilon(x)$ funzione contatore dei numeri gemelli, definita dalle (14)-(16), é maggiore di zero per ogni $x > 141.83$.*

$$\frac{\sqrt{x}-x}{6} + (\frac{x}{\ln(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}) + \frac{(\ln(x)-5.5)}{6}(\frac{x}{\ln(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}) \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{x}-x}{6} + \frac{\ln(x)}{6}(\frac{x}{\ln(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}) + \frac{0.5}{6}(\frac{x}{\ln(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}) \geq 0$$

usando le proprietá dei logaritmi

$$\frac{\sqrt{x}-x}{6} + (\frac{x}{6} - \frac{2\sqrt{x}}{6}) + \frac{0.5}{6}(\frac{x}{\ln(x)} - \frac{2\sqrt{x}}{\ln x}) \geq 0$$

$$\frac{0.5}{6}(\frac{x-2\sqrt{x}}{\ln(x)}) - \frac{\sqrt{x}}{6} \geq 0$$

minimo comune multiplo

$$\frac{\sqrt{x}(0.5\sqrt{x}-1-\ln(x))}{\ln x} \geq 0$$

Il denominatore é maggiore di zero per $x > 1$ il numeratore é un equazione logaritmica avente due soluzioni 0.52 e 141.83. E' positiva all'esterno di questi valori quindi la funzione $\tilde{\Upsilon}(x)$ si mantiene positiva per $x \in [0.52, 1] \cup [141.83, \infty)$ verificando il teorema.
$\diamond$.
Per $x < 20$ i numeri gemelli si possono contare manualmente il teorema ci assicura che la congettura é verificata poiché per ogni nuovo x i gemelli aumentano sempre visto che la funzione si mantiene sempre positiva garantendo l'inifinitá degli stessi.
L'ipotesi veramente importante per la riuscita del calcolo che dimostra il teorema é che la distanza fra i primi si mantenga pari o superiore al $\ln(x)$. Se avessimo assunto ,seguendo l'approssimazione di Gauss, che la distanza fosse pari a $k\ln(x)$ con $0 < k < 1$ il teorema non sarebbe stato verificato. Ad esempio assumendo $k = 0.7851$ si avrebbe

$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}0.5 - 1 - 0.5702\ln(x) - 0.2149\sqrt{x}\ln(x))}{\ln(x)} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}(0.5 - 0.2149\ln(x)) - 1 - 0.5702\ln(x))}{\ln(x)} \geq 0$$

quindi il segno dei termini al numeratore dipende da

$$\sqrt{x}(0.5 - 0.2149 \ln(x)) \tag{21}$$

che é una quantitá all'inizio positiva , ma poi a causa del $\ln(x)$ diventerá negativa facendo diventare l'intero numeratore negativo visto che avremo somma di termini tutti negativi da cui il rifiuto della congettura.
Tuttavia scegliendo come distanza media $k\ln(x)$ con $0 < k < 1$ stiamo assumendo come approssimante di $\pi(x) \sim \frac{1}{k}\frac{x}{\ln x} \sim Li(x)$ per qualche ordine superiore dipendente dalla scelta di k.

Teorema 2 *Sotto le ipotesi del teorema (1) ma scegliendo come distanza media*

$$\frac{1}{k}\frac{x}{\ln(x)}$$

con $0 < k < 1$ la funzione approssimante $\tilde{\Upsilon}(x)$ si mantiene positiva per $x > 141.83$

Seguendo i passi della dimostrazione precedente si perviene a

$$\frac{\sqrt{x}-x}{6} + \frac{1}{k}(\frac{x}{\ln(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}) + \frac{1}{k}\frac{(k\ln(x) - 5.5)}{6}(\frac{x}{\ln(x)} - \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}) \geq 0$$

da cui segue

$$\frac{1}{k}\frac{0.5}{6}(\frac{x-2\sqrt{x}}{\ln(x)}) - \frac{\sqrt{x}}{6} \geq 0$$

e quindi

$$\frac{\sqrt{x}(\frac{0.5}{k}\sqrt{x} - \frac{1}{k} - \ln(x))}{\ln x} \geq 0$$

verificando l'ipotesi poiché il numeratore é una funzione logaritmica simile a quella del teorema (1). $\diamond$
Il teorema é stato dimostrato anche per ordini successivi di $Li(x)$ infatti se osserviamo lo sviluppo non abbiamo fatto altro che porre

$$\frac{1}{k} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{t!}{(\ln x)^t}$$

.

References

[1] Rosser, J. B. and Schoenfeld, L. (1962),*Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers.* Illinois J. Math. 6, 64-97.

[2] Apostol,T.M. (1975),*Introduction to analytic number theory*, Springer

[3] Erdös,P.(1940), *The difference of consecutive primes*, Duke Math. J.6:438-441

[4] Naldi,G.,Pareschi,L.(2008), *Matlab,concetti e progetti*, Apogeo

[5] Goldston,D. A., Motohahi,Y. J., Pintz, and Yldrm,C. Y.. (2005),*Small gaps betweenprimes exist.* arXiv website,http://xxx.sissa.it/pdf/ math.NT/0505300

[6] Greaves,G.(2001),*Sieves in Number Theory.* Springer, Berlin.

[7] Hardy,G.H.,Wright,E.M. (1979),*An introduction to the theory of numbers* Oxford Science Publications,Oxford,fifth edition

[8] Pintz,J.(1997), *Very large gaps between consecutive primes* J. Number Theory,63:286301.

[9] Derbyshire, J. (2004), *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics* New York: Penguin.

[10] Gauss, C. F. (1863),Werke, Band 10, Teil I. p. 10,

[11] Niven, I., Zuckerman, H. S. (1972), *An introduction to the Theory of Numbers,* John Wiley Ltd., London.