

DIPARTIMENTO DI METODI E MODELLI  
PER L'ECONOMIA IL TERRITORIO E LA FINANZA  
MEMOTEF



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

**PROCEDURE NUMERICHE PER LA  
DISCRETIZZAZIONE DI PROCESSI  
STOCASTICI DIFFUSIVI NELLA  
VALUTAZIONE DELLE OPZIONI  
FINANZIARIE**

**Santarpia D., M.G. Bruno**

*Working Paper n° 78/2011*  
Febbraio 2011

# ***PROCEDURE NUMERICHE PER LA DISCRETIZZAZIONE DI PROCESSI STOCASTICI DIFFUSIVI NELLA VALUTAZIONE DELLE OPZIONI FINANZIARIE***

Santarpia D., M.G. Bruno<sup>1</sup>

## **Abstract**

Nel presente lavoro, si analizzano alcune procedure numeriche proposte in letteratura per la discretizzazione di processi stocastici diffusivi.

Si fa in particolare riferimento alle problematiche inerenti l'approssimazione di processi stocastici utilizzati in finanza per descrivere la dinamica dei prezzi dei titoli sottostanti le opzioni finanziarie, quali per esempio il CEV, usualmente impiegato per descrivere l'evoluzione temporale dei prezzi azionari, e il CIR, impiegato per descrivere la dinamica dei tassi di interesse.

Dal punto di vista matematico, l'idea comune ai metodi analizzati consiste nell'approssimare il processo stocastico originario riconducendolo ad un processo ad albero (binomiale o trinomiale) e preservandone, al limite, la convergenza verso il processo originario.

Non sempre è però possibile giungere, a seguito della discretizzazione, ad alberi cosiddetti ricombinanti, cioè ad alberi in cui i rami uscenti da nodi adiacenti portano ad un medesimo nodo successivo. Ciò comporta una crescita esponenziale del numero dei nodi e una conseguente difficoltà di gestione del problema dal punto di vista computazionale.

I modelli analizzati in questo lavoro differiscono proprio nel modo in cui gli autori affrontano detto problema.

## **1. Introduzione**

Come noto, le opzioni finanziarie sono strumenti finanziari derivati, in altri termini strumenti finanziari il cui valore dipende da quello assunto da altre attività, chiamate sottostanti, a determinate epoche.

Le opzioni rispondono a ben precise finalità di mercato come per esempio finalità speculative o finalità di copertura, ma sono anche spesso componenti implicite di altri contratti (per esempio, le obbligazioni con opzione di riscatto anticipato o, in ambito attuariale, i fondi pensione con minimo garantito).

Data la loro complessità, la valutazione delle opzioni difficilmente conduce a formule risolutive analitiche esatte e spesso richiede l'impiego di tecniche di approssimazione numerica.

Nel presente lavoro, si affronta proprio detta problematica.

Per semplicità, si fa riferimento a contratti di opzione aventi un unico sottostante e si analizzano alcuni metodi numerici di valutazione esistenti in letteratura basati sull'approssimazione della dinamica del prezzo di quest'ultimo.

Dal punto di vista matematico, l'idea comune ai metodi analizzati consiste nell'approssimare il processo stocastico assunto alla base della dinamica del prezzo del

---

<sup>1</sup> Daniela Santarpia è Dottore Magistrale in Economia, finanza e diritto d'impresa, titolo conseguito nell'a.a. 2009-10 discutendo la tesi dal titolo "Procedure numeriche per la valutazione degli strumenti finanziari derivati" da cui è tratto il presente lavoro. Maria Giuseppina Bruno è Professore Associato presso il Dipartimento di Metodi e modelli per l'economia, il territorio e la finanza MEMOTEF ([giuseppina.bruno@uniroma1.it](mailto:giuseppina.bruno@uniroma1.it)).

Il lavoro riflette esclusivamente le opinioni degli autori e non impegna la responsabilità del Dipartimento.

sottostante riconducendolo ad un processo ad albero e preservandone, al limite, la convergenza verso il processo originario.

L'idea nasce dallo studio di due classici modelli di valutazione per le opzioni europee: il modello binomiale dovuto a Sharpe (1978) e riformulato da Cox, Ross, Rubinstein (1979) e la formula di Black, Scholes (1973). Il primo assume che il prezzo del titolo sottostante segua un processo stocastico bernoulliano, quindi discreto a tempo discreto (in pratica un albero binomiale), mentre la formula di Black, Scholes parte dall'ipotesi che il prezzo del titolo sottostante segua un moto geometrico browniano, quindi un processo continuo a tempo continuo (ed esattamente lognormale). Sotto opportune ipotesi, come mostrato nel paragrafo 2, i due processi convergono e così anche le relative formule di valutazione.

Partendo però da ipotesi più generali rispetto a quella di moto geometrico browniano per il sottostante non è sempre possibile giungere, a seguito della discretizzazione, ad alberi binomiali (cioè ad alberi aventi due rami per ogni nodo) né, soprattutto, ad alberi cosiddetti ricombinanti (cioè ad alberi in cui i rami uscenti da nodi adiacenti portano ad un medesimo nodo successivo).

Ciò comporta una crescita esponenziale del numero dei nodi e una conseguente difficoltà di gestione del problema dal punto di vista computazionale.

I modelli di valutazione numerica analizzati in questo lavoro di tesi differiscono proprio nel modo in cui gli autori affrontano detto problema.

Nel paragrafo 3, si esamina in particolare il modello proposto da Nelson, Ramaswamy (1990) in cui gli autori propongono un'approssimazione binomiale e suggeriscono di superare il problema dell'albero non ricombinante trasformando il processo originariamente eteroschedastico in un processo omoschedastico.

Nel paragrafo 4, si illustrano i modelli di Hull, White (1990, 1993, 1996) e il modello di Chen, Yang (1999) in cui gli autori propongono approssimazioni mediante alberi trinomiali appositamente definiti.

Infine, nell'ultimo paragrafo, si illustra il modello proposto più recentemente da Costabile, Leccadito, Massabò (2009) in cui gli autori propongono di sostituire ai nodi misti dell'originale albero non ricombinante (binomiale o trinomiale) una loro media condizionata o semplicemente la loro media aritmetica in modo da ricondursi ad un corrispondente albero ricombinante.

Seguono poi alcune considerazioni conclusive.

## **2. Dal modello binomiale alla formula di Black, Scholes**

Il modello binomiale di valutazione delle opzioni si deve nella sua strutturazione formale a Cox, Ross, Rubinstein (1979).

Detto modello (da ora modello CRR) conduce ad una formula chiusa di valutazione delle opzioni europee ed è tutt'ora ampiamente applicato allo scopo in ambito finanziario. Ciò si deve fondamentalmente alla sua semplicità di implementazione ma anche alla facile comprensione del suo meccanismo di costruzione.

Dal punto di vista matematico, i motivi dell'importanza di detto modello sono però anche altri.

Prima di tutto, pur partendo dal ben noto principio di valutazione in assenza di opportunità di arbitraggio privo di rischio, esso si rivela utile per la formalizzazione dell'equivalente principio di esistenza e unicità di una misura equivalente di martingala fondamentale per applicazioni più generali.

Inoltre, come dimostrato dagli stessi autori, il modello CRR può essere facilmente esteso alla valutazione di opzioni americane o, più in generale, di opzioni "path-dependent" cioè

dipendenti non solo dal prezzo del titolo sottostante a scadenza ma anche e soprattutto dalla sua evoluzione nel tempo.

Infine, come già anticipato in introduzione, detto modello è un modello discreto ma, sotto opportune condizioni, converge verso la formula di Black-Scholes valida nel continuo e ciò lo rende particolarmente utile come strumento di approssimazione in contesti in cui non si possa arrivare a formule esatte di valutazione.

In particolare, con riferimento a quest'ultimo aspetto, Cox, Ross, Rubinstein dimostrano che un albero binomiale come quello utilizzato alla base del loro modello per descrivere la dinamica del prezzo del titolo sottostante converge verso un moto geometrico browniano alla base della formula di Black, Scholes. Ciò è mostrato in dettaglio di seguito. A partire da dette considerazioni, essi dimostrano poi la convergenza delle relative formule di valutazione delle opzioni europee.

### 2.1. Ipotesi del modello binomiale

Il modello CRR parte dalle seguenti ipotesi:

- nel tempo residuo a scadenza dell'opzione, il sottostante può subire un numero finito  $n$  di variazioni ad intervalli regolari di ampiezza  $h=(T-t)/n$ , avendo indicato con  $T$  la scadenza dell'opzione, con  $t$  l'epoca di valutazione e quindi con  $(T-t)$  il tempo residuo a scadenza;
- in ciascun intervallo, il prezzo del titolo sottostante può subire esclusivamente due tipi di variazione: una al rialzo o una al ribasso. In formule, indicando con  $S_k$  il prezzo del titolo sottostante dopo  $k$  variazioni (per  $k = 1, 2, \dots, n$ ) e con  $S_0$  il prezzo corrente del titolo sottostante all'epoca di valutazione, si ha in particolare:

$$(2.1) \quad \frac{S_k}{S_{k-1}} = X_k = \begin{cases} u & \text{con probabilità } q \\ d & \text{con probabilità } (1-q) \end{cases}$$

dove  $u$  indica il fattore di rialzo nell'unità di tempo (pertanto  $u > 1$ ) mentre  $d$  indica il fattore di ribasso (quindi  $0 < d < 1$ ). Al fine di evitare opportunità di arbitraggio privo di rischio, detti fattori devono rispettare la seguente condizione:  $d < e^{\delta h} < u$ , dove  $e^{\delta h}$  è il fattore di capitalizzazione relativo all'unità di tempo calcolato mediante l'intensità istantanea priva di rischio  $\delta$ ;

- nei diversi intervalli, l'entità di ciascuna variazione e la relativa probabilità sono sempre uguali e indipendenti dagli intervalli precedenti. In altri termini,  $X_k$  (con  $k=1, 2, \dots, n$ ) sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite.

Sotto tali ipotesi, il prezzo del titolo sottostante dopo una variazione è del tipo descritto in figura:

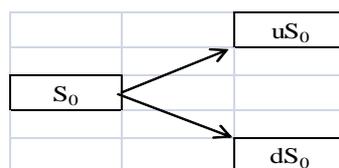


Fig. 2.1

e dopo due variazioni diventa:

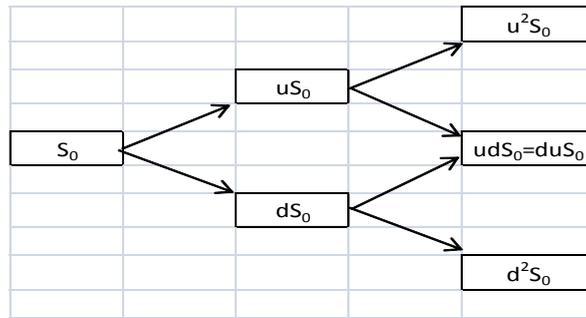


Fig. 2.2

e allo stesso modo per le variazioni successive si ha:

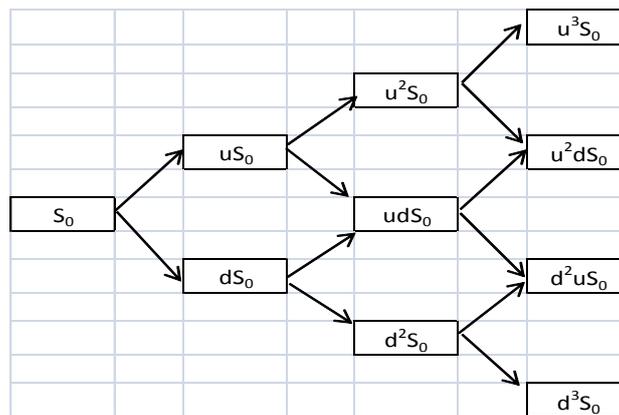


Fig. 2.3

Come si vede in ciascuna figura, da ogni nodo si diramano due possibili valori successivi del prezzo del titolo sottostante. Inoltre, come risulta evidente nella Fig. 2.2, il prezzo del titolo sottostante nel caso di un'unica variazione al rialzo (e ovviamente una al ribasso) su due variazioni totali è il medesimo indipendentemente dal fatto che detta variazione segua o preceda quella al ribasso. Più genericamente, come si evince dalla Fig. 2.3, il prezzo assunto dal titolo sottostante in corrispondenza dei nodi misti non dipende dal modo in cui essi vengono raggiunti.

Il prezzo del titolo sottostante descrive quindi nel tempo quello che viene chiamato un albero "binomiale ricombinante" avente cioè nodi nei quali due diversi percorsi si congiungono ricombinandosi.

## 2.2. Comportamento al limite

Quanto detto prima può essere applicato con riferimento a unità di tempo piccolissime, per esempio un minuto o anche un secondo, ... Ha quindi senso studiare il comportamento del sottostante al tendere di  $h$  a 0 (o, in modo equivalente, al tendere di  $n$  all'infinito).

Occorre fare preliminarmente però alcune considerazioni.

Indicando con  $S_n^j$  il prezzo del titolo sottostante a scadenza dopo un numero aleatorio  $j$  di rialzi, e quindi  $(n-j)$  ribassi, si può scrivere:

$$(2.2) \quad \log \left( \frac{S_n^j}{S_0} \right) = \log \left( \frac{u^j d^{n-j} S_0}{S_0} \right) = j \log u + (n-j) \log d$$

da cui:

$$(2.3) \quad E \left[ \log \left( \frac{S_n^j}{S_0} \right) \right] = \log \left( \frac{u}{d} \right) E(j) + n \log d$$

$$(2.4) \quad Var \left[ \log \left( \frac{S_n^j}{S_0} \right) \right] = \left[ \log \left( \frac{u}{d} \right) \right]^2 Var(j)$$

Considerato che, in base alla (2.1), la probabilità di ciascun rialzo è  $q$ ,  $E[j] = nq$  e  $Var[j] = nq(1 - q)$ . Pertanto, sostituendo nella (2.3) e nella (2.4), si ha:

$$(2.5) \quad E \left[ \log \left( \frac{S_n^j}{S_0} \right) \right] = \left[ q \log \left( \frac{u}{d} \right) + \log d \right] n \equiv \hat{\mu}n$$

$$(2.6) \quad Var \left[ \log \left( \frac{S_n^j}{S_0} \right) \right] = q(1 - q) \left[ \log \left( \frac{u}{d} \right) \right]^2 n \equiv \hat{\sigma}^2 n$$

Al fine di rendere “non degenerare” il comportamento al limite della (2.5) e (2.6), occorre imporre che i relativi valori convergano verso valori finiti diversi da zero. Ciò comporta le seguenti condizioni:

$$(2.7) \quad u = e^{\sigma\sqrt{h}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{h}}, \quad q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu/\sigma)\sqrt{h}$$

dove  $\mu$  e  $\sigma$  sono rispettivamente la media e lo scarto quadratico medio dell'intensità istantanea di rendimento del prezzo del titolo sottostante empiricamente osservate.

Sotto tali condizioni, applicando il Teorema del Limite centrale, si ha:

$$(2.8) \quad Prob \left[ \left( \frac{\log \left( \frac{S_n^j}{S_0} \right) - \hat{\mu}n}{\hat{\sigma}\sqrt{n}} \right) \leq z \right] \rightarrow \Phi(z)$$

dove  $\Phi(z)$  è la funzione di ripartizione di una normale standardizzata.

In conclusione, il prezzo del titolo sottostante a scadenza si distribuisce, al limite, in maniera lognormale esattamente come accade nell'ipotesi che la sua dinamica sia guidata da un moto geometrico browniano, cioè soddisfi la seguente equazione differenziale stocastica:

$$(2.9) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dove  $W_t$  è il processo stocastico di Wiener standard.

### 3. L'approssimazione binomiale di Nelson, Ramaswamy

In base a quanto illustrato nel paragrafo precedente, un albero binomiale ricombinante può considerarsi una buona approssimazione del moto geometrico browniano. Ciò, nell'ambito della valutazione delle opzioni basate su tale ipotesi riguardo la dinamica del sottostante, consente di ottenere validi risultati non sempre raggiungibili operando direttamente nel continuo.

Partendo da questa considerazione, diversi autori si sono posti il problema di come approssimare mediante alberi binomiali processi stocastici continui a tempo continuo diversi dal moto geometrico browniano.

In questo paragrafo, si analizza in particolare l'approccio seguito da Nelson, Ramaswamy (1990) per costruire alberi binomiali ricombinanti convergenti verso processi stocastici diffusivi più generali.

L'approccio consiste nell'eliminare l'eteroschedasticità del processo originario, che darebbe luogo ad alberi binomiali non ricombinanti, adottando un'apposita trasformazione capace comunque di preservarne il carattere diffusivo. In tal modo, si ottiene un processo omoschedastico discretizzabile mediante un albero binomiale ricombinante. Applicando poi la trasformazione inversa ad ogni nodo, si ottiene un albero binomiale (o lattice) ricombinante che approssima il processo originario.

Gli autori mostrano in particolare il caso di processi con elasticità della varianza costante (CEV) recentemente adottati in finanza per descrivere la dinamica dei prezzi azionari e anche il caso di processi di tipo Cox-Ingersoll-Ross (CIR) ampiamente utilizzati per descrivere la dinamica dei tassi di interesse stocastici.

### 3.1. Il problema degli alberi non ricombinanti

Sia dato un generico processo stocastico diffusivo  $y_t$ , uscente da  $y_0$  al tempo iniziale, soddisfacente la seguente equazione differenziale stocastica:

$$(3.1) \quad dy_t = \mu(y_t)dt + \sigma(y_t)dW_t$$

dove  $\mu(y_t)$  e  $\sigma(y_t)$  sono rispettivamente il drift e la volatilità istantanei di  $y_t$  e  $W_t$  è il processo di Wiener standard.

L'intento è quello di identificare un albero binomiale ricombinante, o meglio una sequenza di alberi binomiali ricombinanti convergente in distribuzione al processo (3.1).

Ciò è sempre possibile nel caso particolare in cui  $\mu(y_t) = \mu y_t$  e  $\sigma(y_t) = \sigma y_t$ . In tal caso, infatti, la (3.1) è equivalente alla (2.9) e  $y_t$  descrive un moto geometrico browniano. Pertanto, la (3.1) è approssimabile con un albero binomiale ricombinante applicando la procedura illustrata nel capitolo precedente.

La stessa cosa, come dimostrato dagli stessi autori, è possibile anche nel caso di processo di Ornstein-Uhlenbeck, processo alla base del modello di Vasicek (1977) per la valutazione dei derivati su tasso di interesse. In tal caso, la (3.1) assume la forma seguente:

$$(3.2) \quad dy_t = \beta(\alpha - y_t)dt + \sigma dW_t$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti e  $\beta$  è non negativo.

In altri casi, invece, e in particolare nei casi in cui  $\sigma(y_t)$  non dipende linearmente dalla variabile di stato, l'albero binomiale che approssima il processo può risultare non ricombinante come mostrato in Fig. 3.1.

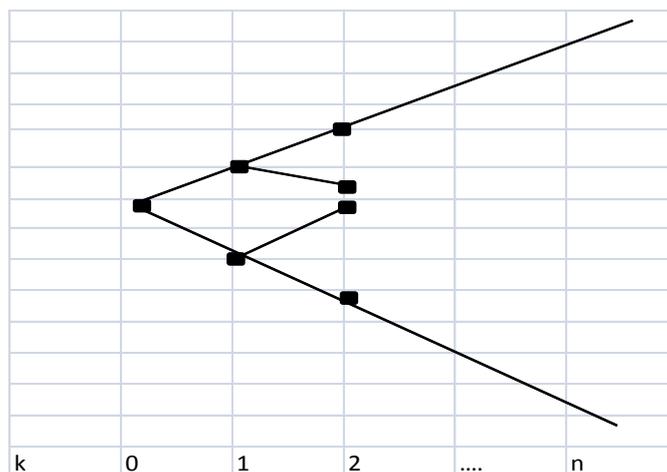


Fig. 3.1

Per chiarire meglio detto punto, può essere utile fare le seguenti considerazioni.

Analogamente a quanto fatto nel primo paragrafo, si assume che il processo binomiale che approssima  $y_t$  possa subire nell'orizzonte temporale di riferimento un numero finito  $n$  di variazioni ad intervalli regolari di ampiezza  $h$  e si indica con  $y_k$  una sua generica determinazione numerica dopo  $k$  variazioni ( $k=0, 1, \dots, n$ ).

In tal caso, in linea con quanto illustrato nel paragrafo precedente e più rigorosamente formalizzato da Cox, Rubinstein (1985), l'ampiezza della  $(k+1)$ -esima variazione è pari a  $\sigma(y_k)\sqrt{h}$  in caso di variazione al rialzo oppure a  $-\sigma(y_k)\sqrt{h}$  in caso di variazione al ribasso. Inoltre, le probabilità di transizione sono fissate in modo che i primi due momenti del processo approssimante convergano verso i corrispondenti valori del processo originario. Pertanto, la probabilità di una variazione al rialzo è data da  $q(y_k) = \frac{1}{2} + \frac{\mu(y_k)}{2\sigma(y_k)}\sqrt{h}$  e, ovviamente, quella di una variazione al ribasso da  $1 - q(y_k) = \frac{1}{2} - \frac{\mu(y_k)}{2\sigma(y_k)}\sqrt{h}$ .

Corrispondentemente, dopo  $k+1$  variazioni, il processo assume il valore  $y_{k+1}^u = y_k + \sigma(y_k)\sqrt{h}$  in caso di variazione al rialzo e il valore  $y_{k+1}^d = y_k - \sigma(y_k)\sqrt{h}$  così come schematizzato in figura 3.2.

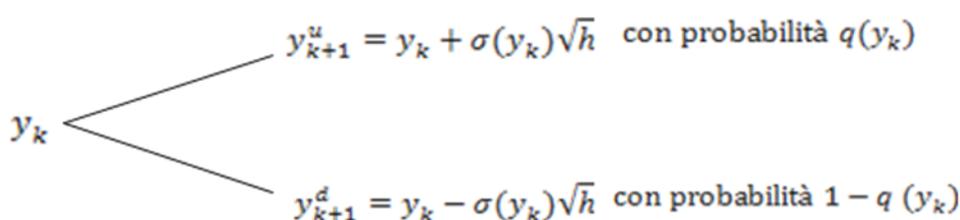


Fig. 3.2

E' facile osservare adesso che, tranne i casi in cui  $\sigma(y_k)$  sia indipendente da  $y_k$  o del tipo  $\sigma(y_k) = \sigma y_k$  con  $\sigma$  costante, l'albero binomiale così ottenuto è in genere non ricombinante.

Infatti, a partire dal generico  $y_k$ , si può raggiungere il valore di  $[-\sigma(y_k) + \sigma(y_{k+1}^d)]\sqrt{h}$  nel caso in cui una variazione al rialzo segua una variazione al ribasso oppure il valore di  $[\sigma(y_k) - \sigma(y_{k+1}^u)]\sqrt{h}$  qualora una variazione al ribasso segua una variazione al rialzo e detti valori, in genere, non coincidono.

Ciò comporta il fatto che, dopo  $n$  variazioni, l'albero binomiale risultante abbia  $2^n$  possibili nodi e detto numero esplode per quei valori di  $n$  necessari a garantire la convergenza verso i processi continui usualmente impiegati nella valutazione delle opzioni.

### 3.2. La trasformazione proposta

Come visto nel paragrafo 3.1, il problema degli alberi non ricombinanti è dovuto al fatto che l'ampiezza di ciascuna variazione del processo approssimante dipende da  $\sigma(y_k)$  (o, in modo equivalente, data la convergenza al processo originario, da  $\sigma(y_i)$ ) e questa, a sua volta, dipende dalla variabile di stato.

In altri termini, il problema è dovuto all'eteroschedasticità del processo originario.

Pertanto, al fine di superare il suddetto problema, gli autori propongono di operare una trasformazione capace di eliminare dall'equazione differenziale stocastica (3.1) la componente eteroschedastica.

In pratica, essi trasformano il processo originario  $y_t$  soddisfacente alla (3.1) in un processo stocastico  $x(y_t)$  avente volatilità costante.

Più formalmente, si assume di adottare una trasformazione  $x_t = x(y_t)$ , differenziabile almeno due volte rispetto ad  $y$  e almeno una volta rispetto a  $t$ , tale che:

$$(3.3) \quad \frac{\partial x(y_t)}{\partial y} = \frac{c}{\sigma(y_t)} \quad \text{con } c = \text{costante}$$

Applicando il lemma di Itô, si ha:

$$(3.4) \quad dx(y_t) = \left[ \mu(y_t) \frac{\partial x(y_t)}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2(y_t) \frac{\partial^2 x(y_t)}{\partial y^2} + \frac{\partial x(y_t)}{\partial t} \right] dt + \left( \sigma(y_t) \frac{\partial x(y_t)}{\partial y} \right) dW_t$$

da cui, sostituendo la (3.3), segue:

$$(3.5) \quad dx(y_t) = \tilde{\mu}(x(y_t)) dt + c dW_t$$

dove:

$$(3.6) \quad \tilde{\mu}(x(y_t)) = \mu(y_t) \frac{\partial x(y_t)}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2(y_t) \frac{\partial^2 x(y_t)}{\partial y^2} + \frac{\partial x(y_t)}{\partial t}$$

Il processo (3.5) così ottenuto è un processo omoschedastico che può essere facilmente approssimato mediante un albero binomiale ricombinante ponendo l'entità del rialzo pari a  $\sqrt{h}$  e quella del ribasso pari a  $-\sqrt{h}$  (in questo caso  $c = 1$ ).

Pertanto, indicando con  $x_k$  la generica determinazione del processo discreto che approssima  $x_t$  dopo  $k$  variazioni ( $k=0, 1, \dots, n$ ), dopo  $k+1$  variazioni questa diventa  $x_{k+1}^u = x_k + \sqrt{h}$  in caso di variazione al rialzo e  $x_{k+1}^d = x_k - \sqrt{h}$  in caso di variazione al ribasso.

In generale, come visualizzato in Fig. 3.3, partendo da  $x_0$  al tempo iniziale, dopo  $k$  variazioni, il processo discreto assume le seguenti determinazioni:

$$(3.7) \quad x_k = x_0 + (2j - k)\sqrt{h}$$

per  $j=1, \dots, k$  e  $k=0, 1, \dots, n$ .

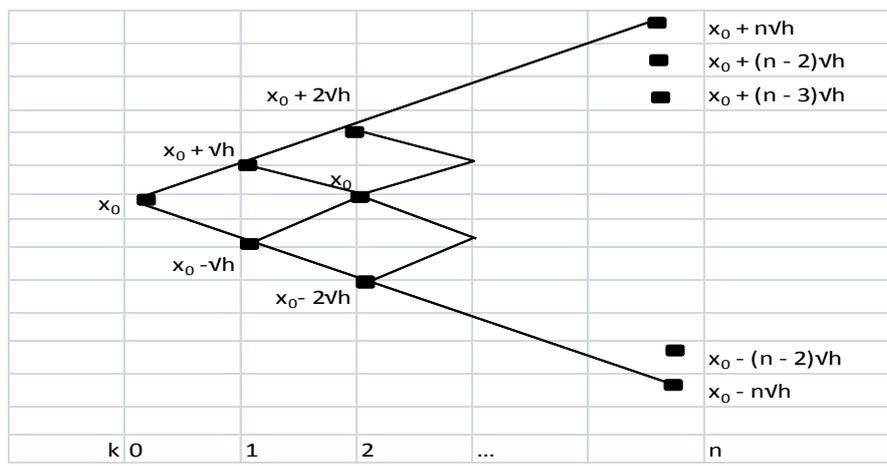


Fig. 3.3

Tutto ciò posto, per giungere ad un albero binomiale ricombinante anche per il processo originario come indicato in Fig. 3.4, si può applicare la trasformazione inversa seguente:

$$(3.8) \quad Y(x_t) \equiv \{y_t : x(y_t) = x_t\}$$

In tal caso, si indica con  $Y(x_k)$  una generica determinazione del processo approssimante la (3.8) dopo  $k$  variazioni e con  $Y(x_{k+1}^u)$  e  $Y(x_{k+1}^d)$  le successive determinazioni rispettivamente in caso di rialzo e in caso di ribasso.

Imponendo la condizione di convergenza alla (3.8), si ha:

$$(3.9) \quad q(Y(x_k)) = \frac{Y(x_k) + h\mu(Y(x_k)) - Y(x_{k+1}^d)}{Y(x_{k+1}^u) - Y(x_{k+1}^d)}$$

dove  $q(Y(x_k))$  è la probabilità associata ad un rialzo e  $1 - q(Y(x_k))$  è la probabilità associata ad un ribasso.

Trattandosi di probabilità,  $q(Y(x_k))$  e  $1 - q(Y(x_k))$  devono essere comprese fra 0 e 1, ma non sempre detta condizione è soddisfatta dalla (3.9). Inoltre, può accadere che il processo continuo originario presenti una barriera e ciò richieda una modifica della trasformazione proposta. Detti problemi vanno però esaminati caso per caso per garantire la significatività in ambito finanziario dei risultati ottenuti.

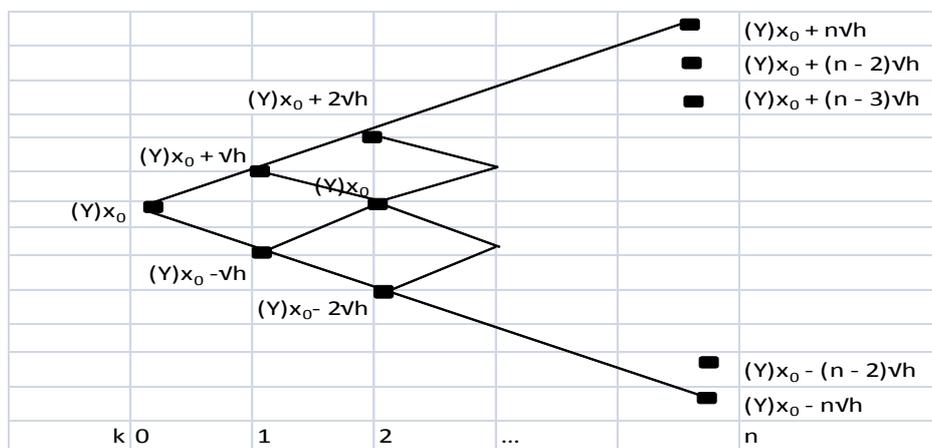


Fig. 3.4

### 3.3. Esempi

Di seguito, si forniscono alcuni esempi di applicazione dell'approccio proposto con riferimento a processi stocastici usualmente impiegati in ambito finanziario.

Si considera dapprima il caso di un processo CEV applicato in finanza per descrivere la dinamica dei prezzi azionari.

Il prezzo di un titolo azionario segue un processo CEV se soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

$$(3.10) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^\gamma dW_t$$

con  $0 < \gamma \leq 1$  e  $S_0$  positivo.

In questo caso, si adotta la seguente trasformazione:

$$(3.11) \quad x(S_t) = \frac{S_t^{1-\gamma}}{\sigma(1-\gamma)}$$

e, per giungere ad un albero binomiale ricombinante per il processo originario, si applica la trasformazione inversa. Così, si ha:

$$(3.12) \quad S(x_t) \equiv \begin{cases} [\sigma(1-\gamma)x_t]^{1/(1-\gamma)} & \text{se } x_t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che origina un albero binomiale ricombinante.

In particolare, indicando con  $S(x_k)$  una generica determinazione del processo approssimante dopo  $k$  variazioni e con  $S(x_{k+1}^u)$  e  $S(x_{k+1}^d)$  le determinazioni successive, rispettivamente in caso di rialzo e in caso di ribasso, si ottiene:

$$(3.13) \quad S(x_{k+1}^u) = S(x_k + J_h^u \sqrt{h})$$

$$(3.14) \quad S(x_{k+1}^d) = S(x_k - J_h^d \sqrt{h})$$

dove  $J_h^u$  è il numero minimo di rialzi necessari affinché le probabilità di transizioni risultino inferiori all'unità e  $J_h^d$  indica il numero minimo di ribassi necessari affinché le probabilità di transizione risultino positive.

La probabilità di rialzo è in tal caso:

$$(3.15) \quad q(S(x_k)) = \begin{cases} q^*(S(x_k)) & \text{se } x_k > 0 \text{ e } 0 < q^*(S(x_k)) < 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ o } q^*(S(x_k)) \leq 0 \\ 1 & q^*(S(x_k)) > 1 \end{cases}$$

dove:

$$(3.16) \quad q^*(S(x_k)) = \frac{S(x_k) + h\mu(S(x_k)) - S(x_{k+1}^d)}{S(x_{k+1}^u) - S(x_{k+1}^d)}$$

In tal modo, le probabilità di transizione risultano comprese nell'intervallo  $[0,1]$  e l'albero risultante ricombina.

Si esamina adesso il caso di un processo CIR usualmente impiegato in finanza per descrivere la dinamica dei tassi di interesse.

In particolare, si dice che un tasso di interesse segue un processo di questo tipo se la corrispondente intensità istantanea di interesse soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

$$(3.17) \quad d\delta_t = \alpha(\mu - \delta_t)dt + \sigma\sqrt{\delta_t}dW_t$$

con  $\alpha \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$  e valore iniziale  $\delta_0$  non negativo.

In tal caso, si adotta la seguente trasformazione:

$$(3.18) \quad x(\delta_t) = \frac{2\sqrt{\delta_t}}{\sigma}$$

e, applicando la trasformazione inversa, si ha:

$$(3.19) \quad \delta(x_t) = \begin{cases} \sigma^2 x_t^2 / 4 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infine, indicando con  $\delta(x_k)$  una generica determinazione del processo approssimante dopo  $k$  variazioni e con  $\delta(x_{k+1}^u)$  e  $\delta(x_{k+1}^d)$  le determinazioni successive definite come nella (3.13) e (3.14) sostituendo  $\delta(x_k)$  a  $S(x_k)$ , si ha per la probabilità di rialzo:

$$(3.20) \quad q(\delta(x_k)) = \begin{cases} \frac{\delta(x_k) + h\alpha(\mu - \delta(x_k)) - \delta(x_{k+1}^d)}{\delta(x_{k+1}^u) - \delta(x_{k+1}^d)} & \text{se } \delta(x_{k+1}^d) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

#### 4. L'approssimazione mediante alberi trinomiali

Come è facilmente intuibile ma anche rigorosamente dimostrabile, l'approssimazione di un processo diffusivo mediante strutture ad albero migliora all'aumentare del numero dei rami uscenti da ogni nodo.

E' per questo motivo che diversi autori hanno proposto in letteratura approssimazioni basate sull'uso di alberi trinomiali.

Hull, White (1990, 1993) propongono per primi un tale approccio basandosi su una metodologia analoga a quella adottata da Nelson, Ramaswamy descritta nel paragrafo precedente.

Al fine di rendere l'albero risultante ricombinante e quindi più gestibile dal punto di vista computazionale, anch'essi trasformano l'originario processo diffusivo eteroschedastico in un processo omoschedastico e, una volta discretizzato, adottano la trasformazione inversa per approssimare il processo originale.

A differenza di quanto fatto da Nelson, Ramaswamy, però, essi definiscono le probabilità di transizione partendo dal processo trasformato piuttosto che da quello originario.

Nonostante ciò, analogamente a quanto succede nel caso di Nelson, Ramaswamy, dette probabilità possono risultare negative o maggiori di 1 perdendo di significatività in quanto tali e richiedendo una modifica del lattice risultante caso per caso.

Ciò avviene soprattutto nel caso di processi autoregressivi comunemente utilizzati in finanza per descrivere la dinamica dei tassi di interesse.

Per ovviare a detto inconveniente, Chen, Yang (1999) propongono un lattice universale, valido cioè per qualunque processo diffusivo.

Essi non adottano alcuna trasformazione del processo originario ma definiscono l'entità della variazione subita dall'albero approssimante ad ogni nodo in funzione di due parametri.

Imponendo la condizione di convergenza al processo originario, gli autori calcolano il range dei possibili valori assumibili da detti parametri che rendono le relative probabilità di transizione non negative e l'albero trinomiale ricombinante.

#### 4.1. Gli alberi trinomiali di Hull, White

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, si indica con  $y_t$  un generico processo stocastico diffusivo, uscente da  $y_0$  al tempo iniziale, soddisfacente la seguente equazione differenziale stocastica:

$$(4.1) \quad dy_t = \mu(y_t)dt + \sigma(y_t)dW_t$$

dove  $\mu(y_t)$  e  $\sigma(y_t)$  sono rispettivamente il drift e la volatilità istantanei di  $y_t$  e  $W_t$  è il processo di Wiener standard.

Si indica inoltre con  $x_t = x(y_t)$  una generica trasformazione del processo tale da renderlo omoschedastico e si indica con  $x_k$  la generica determinazione del processo discreto approssimante dopo  $k$  variazioni ( $k=0,1,\dots,n$ ) ad intervalli regolari di ampiezza  $h$ .

A differenza di quanto fatto nel paragrafo precedente, si assume poi che ad ogni nodo detto processo possa subire tre diversi tipi di variazione assumendo, al passo successivo, come indicato in Fig. 4.1, il valore  $x_{k+1}^u = x_k + c\sqrt{h}$  in caso di rialzo, il valore  $x_{k+1}^m = x_k$  in caso di invarianza e il valore  $x_{k+1}^d = x_k - c\sqrt{h}$ , in caso di ribasso.

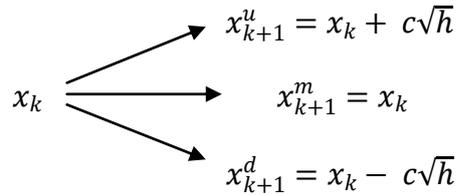


Fig. 4.1

In generale, partendo da  $x_0$  al tempo iniziale, dopo  $k$  variazioni, il processo discreto assume le seguenti determinazioni:

$$(4.2) \quad x_k = x_0 + j\sqrt{h}$$

per  $j=-k,\dots,k$  e  $k=0,1,\dots,n$ .

Le corrispondenti probabilità di transizione ad ogni nodo sono ottenute imponendo la convergenza dei primi due momenti del processo approssimato ai corrispondenti valori del processo  $x_t$  ed esattamente risolvendo il seguente sistema di tre equazioni:

$$(4.3)$$

$$\begin{aligned} q^d(x_k)x_{k+1}^d + q^m(x_k)x_{k+1}^m + q^u(x_k)x_{k+1}^u &= x_k + \tilde{\mu}(x_t)h \\ q^d(x_k)(x_{k+1}^d)^2 + q^m(x_k)(x_{k+1}^m)^2 + q^u(x_k)(x_{k+1}^u)^2 - (x_k + \tilde{\mu}(x_t)h)^2 &= \tilde{\sigma}^2(x_t)h \\ q^d(x_k) + q^m(x_k) + q^u(x_k) &= 1 \end{aligned}$$

dove  $q^u(x_k)$ ,  $q^m(x_k)$  e  $q^d(x_k)$  sono le probabilità associate rispettivamente al rialzo, all'invarianza e al ribasso e inoltre  $\tilde{\mu}(x_t)$  e  $\tilde{\sigma}^2(x_t)$  sono rispettivamente la media e la varianza del processo trasformato.

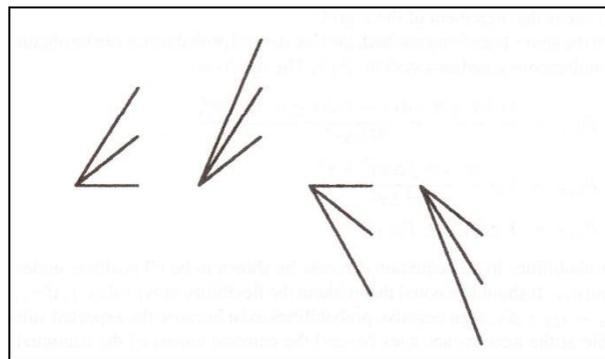
Solo successivamente, si applica la trasformazione inversa per ottenere il corrispondente albero trinomiale per il processo originario.

L'approccio appena descritto richiede però alcune modifiche se applicato a particolari processi diffusivi comunemente impiegati in finanza.

La (4.3) può infatti condurre a probabilità di transizione negative. Inoltre, come evidenziato da Tian (1994) la condizione di convergenza può non essere verificata qualora il drift del processo trasformato diverga in prossimità di dati estremi.

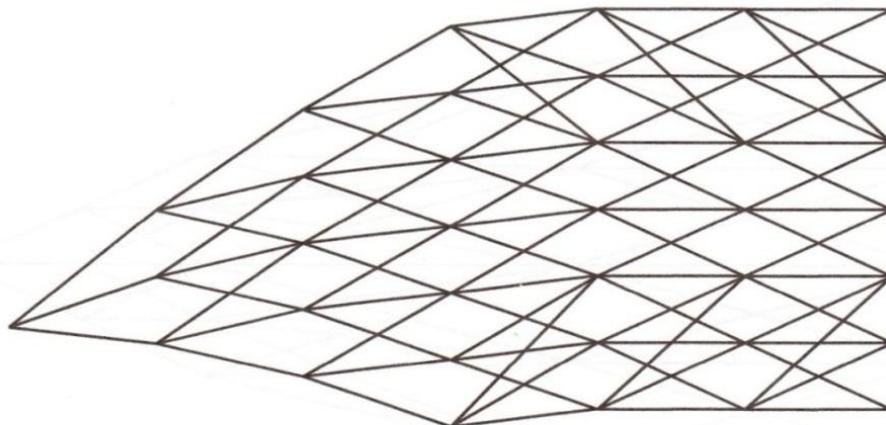
Ciò accade in particolare nel caso di processo CIR già descritto nel capitolo precedente in cui il drift del processo trasformato esplose in prossimità dell'origine.

Per ovviare a detto problema, Hull, White (1996) propongono, in alternativa alla ramificazione standard illustrata prima, le seguenti quattro possibili ramificazioni:



*Fig. 4.2*

Ciò nonostante, dette alternative non risultano valide in generale e la loro combinazione va riformulata caso per caso. Si può arrivare così ad alberi trinomiali come quelli descritti in Fig. 4.3, in cui l'entità della variazione è la medesima per tutti i nodi in una data epoca ma cambia in epoche diverse, o anche ad alberi del tipo in Fig. 4.4, in cui cambia nel tempo l'ampiezza dell'intervallo di variazione.



*Fig. 4.3*

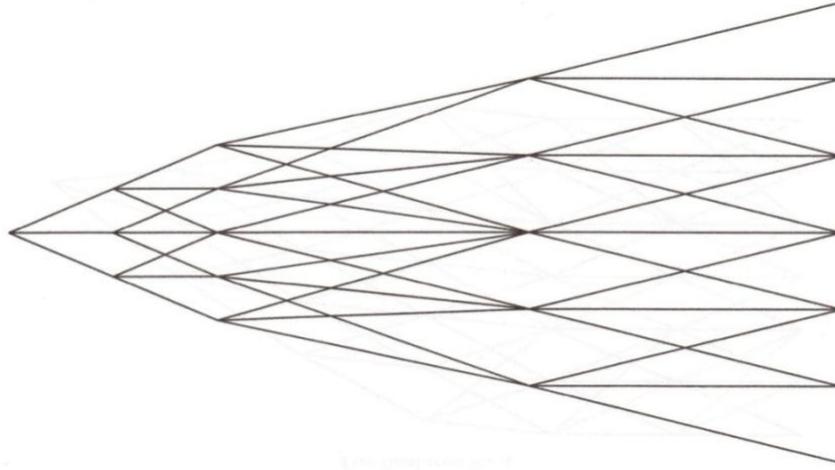


Fig. 4.4

Va infine notato che detta procedura, anche se applicabile a processi aventi un qualunque drift, richiede una volatilità deterministica e non è quindi applicabile per descrivere fenomeni di volatilità stocastica quali, per esempio, l'effetto di "volatility smile" empiricamente osservato sul mercato azionario.

#### 4.2. Il lattice universale di Chen, Yang

A differenza di quanto proposto da Hull, White, gli autori in questione propongono di approssimare mediante un albero trinomiale direttamente il processo originario  $y_t$ .

In tal caso, i tre rami uscenti dalla generica determinazione  $y_k$  del processo originario approssimato dopo  $k$  variazioni sono definiti come segue:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} y_{k+1}^u &= y_k + (j_k + i_k)f(h) \\ y_{k+1}^m &= y_k + j_k f(h) \\ y_{k+1}^d &= y_k + (j_k - i_k)f(h) \end{aligned}$$

dove  $f(h)$  è il generico incremento subito ad ogni nodo in funzione dell'ampiezza dell'intervallo di variazione  $h$  e  $j_k$  ed  $i_k$  sono appositi parametri dipendenti dall'epoca di valutazione.

Le relative probabilità di transizione diventano:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} q^d(y_k) &= \frac{(j_k f(h) - \mu(y_t)h)((j_k + i_k)f(h) - \mu(y_t)h) + \sigma^2(y_t)h}{2i_k^2 f^2(h)} \\ q^m(y_k) &= 1 - \frac{(\mu(y_t)h - j_k f(h))^2 + \sigma^2(y_t)h}{i_k^2 f^2(h)} \\ q^u(y_k) &= 1 - q^d(y_k) - q^m(y_k) \end{aligned}$$

che si ottengono risolvendo il medesimo sistema di equazioni in formula (4.3) dove al posto del processo trasformato si sostituisce quello originario.

Dette probabilità, al contrario di quanto accade nell'approssimazione proposta da Hull, White, risultano sempre positive a condizione di scegliere opportunamente i parametri  $j_k$  ed  $i_k$ .

Più precisamente, il range di possibili valori assumibili da  $j_k$  ed  $i_k$  affinché dette probabilità siano significative è ottenuto imponendo la condizione  $0 < q(y_k) < 1$  nella (4.5) qualunque sia  $k$ . Per ogni  $k$ , si ottiene così l'area descritta nella figura seguente:

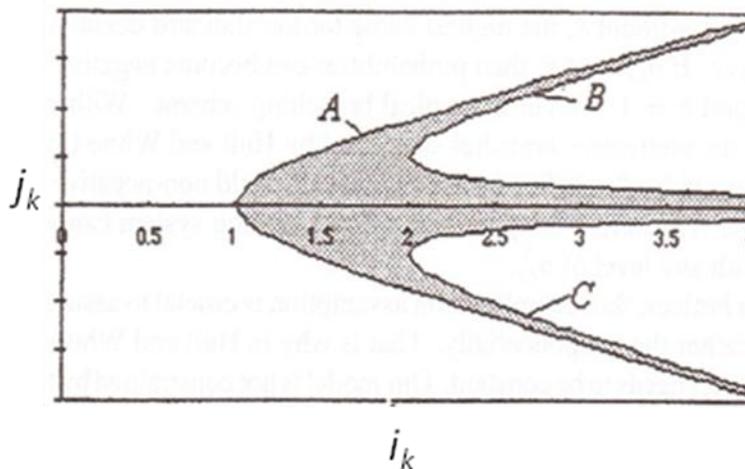


Fig. 4.5

in cui A è un'iperbole mentre B e C sono parabole.

Le condizioni che portano all'identificazione di detta area, garantiscono che un'opportuna combinazione dei parametri  $j_k$  e  $i_k$  conduca a valori significativi per le probabilità di transizione qualunque sia il drift e la volatilità del processo originario.

E' per questo motivo che gli autori definiscono l'approssimazione proposta "universale".

In base alla (4.4), le combinazioni di  $j_k$  e  $i_k$  indicate in Fig. 4.5 corrispondono ad altrettante combinazioni di  $h$  e  $f(h)$ . Si noti per esempio che per  $j_k=0$  e  $i_k=1$ , si ottiene la ramificazione standard di Hull, White, con  $f(h) = \sqrt{h}$ , e inoltre per  $j_k=2, 1, -1, -2$  e  $i_k=1$  si ottengono le diramazioni alternative.

Pertanto, una volta definito lo stato spazio del processo, i parametri  $j_k$  ed  $i_k$  governano il cambiamento delle possibili diramazioni dell'albero mantenendo i relativi nodi all'interno dello suo stato spazio.

In tal modo, il numero dei nodi dell'albero non cresce esponenzialmente e ciò consente di trattare alberi non ricombinanti senza subire il relativo peso computazionale.

Ciò può essere evidenziato con un semplice esempio.

Sia, per un dato  $k$ ,  $j_k=0$  e  $i_k=1$ , che corrisponde ad avere diramazioni standard. Si supponga inoltre che in  $k+1$  la volatilità aumenti e si abbia per esempio  $i_{k+1}=2$ . In tal caso, le diramazioni si allargano simmetricamente. Se poi in  $k+2$  la volatilità diminuisce e  $i_{k+2}=1$ , le diramazioni non ricombinano nell'arco temporale considerato come mostrato nella Fig. 4.6.

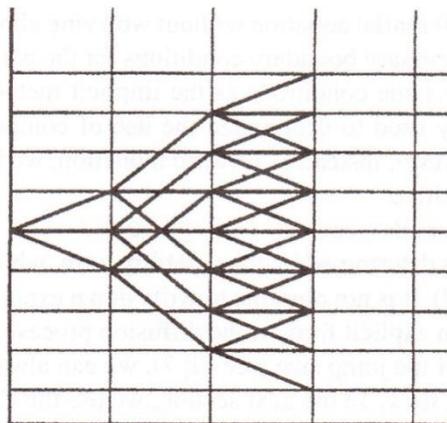


Fig. 4.6

Situazione analoga si verifica qualora si lasci variare nel tempo il parametro  $j_k$ , parametro che governa la simmetria del processo o meglio l'entità della "mean reversion".

## 5. L'approccio di Costabile, Leccadito, Massabò

In questo paragrafo, si illustra un modello recentemente proposto in letteratura da Costabile, Leccadito, Massabò (2009) alternativo rispetto a quelli presentati nei capitoli precedenti.

Tale modello, analogamente a quello di Nelson, Ramaswamy e a quello di Hull, White consiste nell'approssimare un processo di diffusione mediante strutture ad albero, binomiali o trinomiali, ricombinanti.

Al contrario di questi stessi modelli però, al fine di ottenere lattici ricombinanti, non si opera alcuna trasformazione del processo originario ma si procede alla costruzione diretta dell'albero approssimante, sostituendo i nodi critici in modo da garantire la convergenza verso il processo originario.

Più precisamente, al fine di contenere la crescita esponenziale del numero dei nodi, si propone di sostituire i nodi adiacenti con la loro media condizionata. La probabilità di transizione è poi calcolata in modo che i primi due momenti del processo discreto così ottenuto uguagliano i corrispondenti valori del processo continuo.

In tal senso, il modello in questione si differenzia anche da quello di Chen, Yang, in cui il numero dei nodi viene contenuto definendo opportunamente lo stato-spazio del processo. In tal caso, non si opera alcuna trasformazione del processo originario e non si richiede neanche la ricombinazione dell'albero.

Nonostante ciò, come mostrato in questo capitolo, l'approccio alla base del modello di Costabile, Leccadito, Massabò è semplice e intuitivo e ciò lo rende comunque attraente dal punto di vista computazionale.

Esso risulta inoltre applicabile a tutti i processi diffusivi comunemente impiegati nella valutazione degli strumenti finanziari derivati, tra cui il CEV e il CIR già più volte citati nei paragrafi precedenti.

### 5.1. Il caso di alberi binomiali

Analogamente a quanto fatto nei paragrafi precedenti, sia  $y_t$  un generico processo stocastico soddisfacente alla seguente equazione differenziale stocastica:

$$(5.1) \quad dy_t = \mu(y_t)dt + \sigma(y_t)dW_t$$

dove  $\mu(y_t)$  e  $\sigma(y_t)$  sono rispettivamente il drift e la volatilità istantanei di  $y_t$  e  $W_t$  è il processo di Wiener standard.

Si supponga inoltre che il processo binomiale che approssima  $y_t$  possa subire nell'orizzonte temporale di riferimento un numero finito  $n$  di variazioni ad intervalli regolari di ampiezza  $h$  e sia  $y_k$  una sua generica determinazione numerica dopo  $k$  variazioni ( $k=0,1,\dots,n$ ).

Dopo un'ulteriore variazione, il processo può salire raggiungendo  $y_{k+1}^u = y_k + \sigma(y_k)\sqrt{h}$  con probabilità  $q(y_k) = \frac{1}{2} + (\mu(y_k)/2\sigma(y_k))\sqrt{h}$  oppure può scendere fino a raggiungere  $y_{k+1}^d = y_k - \sigma(y_k)\sqrt{h}$  con probabilità  $1 - q(y_k) = \frac{1}{2} - (\mu(y_k)/2\sigma(y_k))\sqrt{h}$ ,

dove le probabilità di transizione sono fissate in modo che i primi due momenti del processo approssimante convergano verso i corrispondenti valori del processo originario.

Allo stesso modo, dopo  $k+2$  variazioni, partendo da  $y_{k+1}^u$  il processo può nuovamente subire una variazione al rialzo raggiungendo il valore  $y_{k+2}^{uu} = y_{k+1}^u + \sigma(y_{k+1}^u)\sqrt{h}$  oppure subire una variazione al ribasso raggiungendo il valore  $y_{k+2}^{ud} = y_{k+1}^u - \sigma(y_{k+1}^u)\sqrt{h}$ ; partendo invece da  $y_{k+1}^d$ , il processo può raggiungere il valore  $y_{k+2}^{du} = y_{k+1}^d + \sigma(y_{k+1}^d)\sqrt{h}$  nel caso di una variazione al rialzo oppure  $y_{k+2}^{dd} = y_{k+1}^d - \sigma(y_{k+1}^d)\sqrt{h}$  in caso di un'ulteriore variazione al ribasso.

Ciò è schematicamente rappresentato nella figura seguente a partire dall'epoca iniziale.

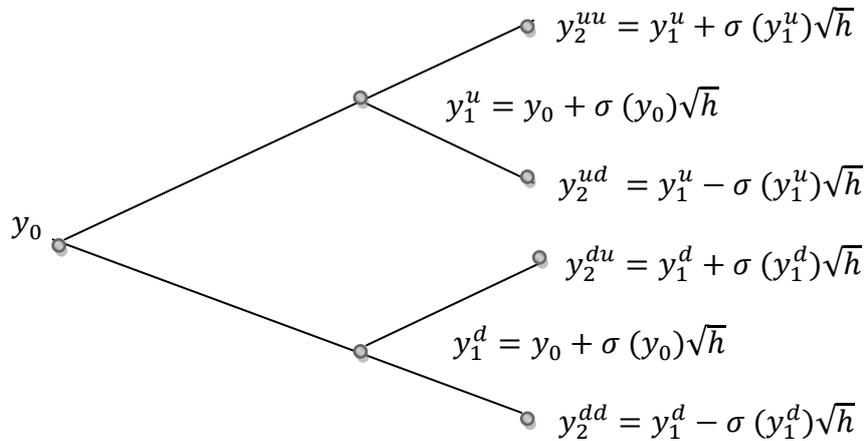


Fig. 5.1

Come si evince dalla Fig. 5.1, può accadere che la volatilità del processo sia tale che un movimento verso l'alto seguito da uno verso il basso porti il processo verso valori diversi da quelli raggiunti nel caso di un movimento dapprima verso il basso e poi verso l'alto. In altri termini, si può avere  $y_2^{ud} \neq y_2^{du}$ .

In tal caso, l'albero binomiale risulta non ricombinante e il numero dei nodi cresce esponenzialmente al crescere del numero delle variazioni, rendendolo intrattabile dal punto di vista computazionale.

Si propone di superare detto problema procedendo come di seguito indicato.

Partendo da  $y_0$  all'epoca iniziale, come prima, alla fine del primo periodo il processo assume valore pari a  $y_1^u$  oppure  $y_1^d$ .

Nell'intervallo successivo, i nodi esterni vengono lasciati uguali a quelli dell'albero non ricombinante mentre i due nodi interni vengono sostituiti con una loro opportuna media, indicata con  $\bar{y}_2$ .

Si distinguono in particolare due casi, come mostrato in Fig. 5.2.

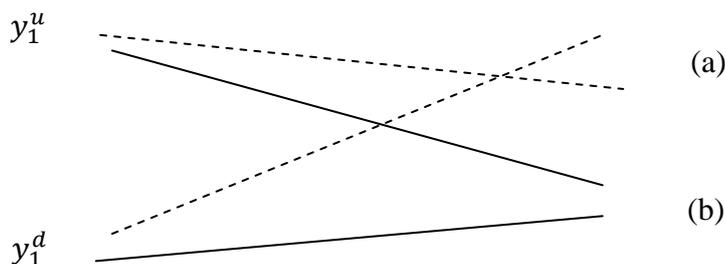


Fig. 5.2

Nel caso a), si verifica la seguente condizione:

$$(5.2) \quad y_2^{du} := y_1^d + \sigma(y_1^d)\sqrt{h} > y_1^u - \sigma(y_1^u)\sqrt{h} =: y_2^{ud}$$

in pratica, i due rami uscenti da due nodi adiacenti si intersecano prima del nodo successivo. In tal caso,  $\bar{y}_2$  viene calcolata come media ponderata di  $y_2^{du}$  e  $y_2^{ud}$  ed esattamente:

$$(5.3) \quad \bar{y}_2 = y_2^{ud} \frac{1-q(y_1^u)}{1-q(y_1^u)+q(y_1^d)} + y_2^{du} \frac{q(y_1^d)}{1-q(y_1^u)+q(y_1^d)}$$

Ciò qualora le probabilità condizionate impiegate come pesi siano comprese tra 0 e 1. Diversamente, si procede come nel caso successivo.

Nel caso b), si verifica la seguente condizione:

$$(5.4) \quad y_2^{du} := y_1^d + \sigma(y_1^d)\sqrt{h} < y_1^u - \sigma(y_1^u)\sqrt{h} =: y_2^{ud}$$

Questa volta, in cui i rami non si intersecano,  $\bar{y}_2$  è calcolata come semplice media aritmetica di  $y_2^{du}$  e  $y_2^{ud}$ .

La seconda condizione ricorre per esempio nel caso di un albero binomiale approssimante un processo CIR in cui, a causa della barriera in zero, le probabilità condizionate usate nella (5.3) sono molto prossime a zero o a uno e la media condizionata coincide praticamente con il valore assunto dal processo in uno dei nodi precedenti. In tal caso, calcolando la media come media semplice si migliora la geometria dell'albero e si velocizza la convergenza verso il processo originario.

Procedendo in tal modo, l'albero diventa ricombinante come mostrato in Fig. 5.3, in cui si indica genericamente con  $(k, j)$  il generico nodo raggiunto dal processo dopo  $j$  rialzi e  $(k-j)$  ribassi e in corrispondenza del quale il valore del processo è posto uguale a  $\bar{y}(k, j)$ , con  $j=0, \dots, k$  e  $k=0, \dots, n$ .

Per ricavare i nodi dell'albero in epoche successive, si prosegue allo stesso modo per induzione (in avanti).

Per poi completare l'approssimazione, si calcolano le probabilità di transizione imponendo la condizione di convergenza dei primi due momenti del processo così approssimato verso i corrispondenti valori del processo originario.

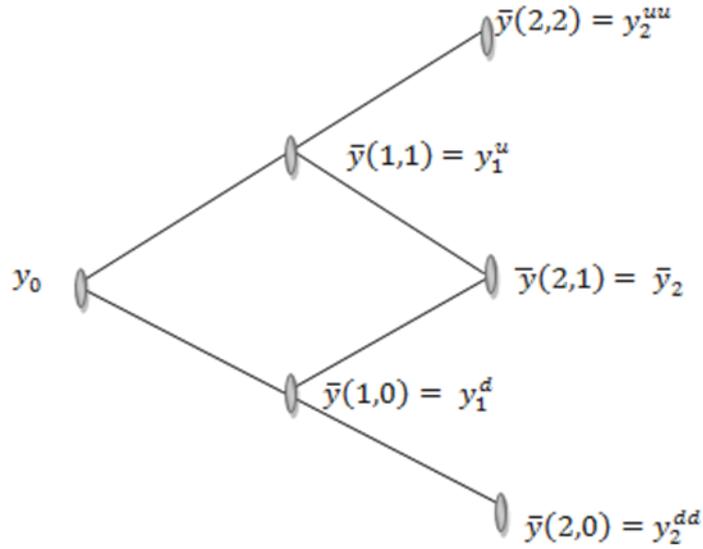


Fig. 5.3

### 5.2. Il caso di alberi trinomiali

Gli alberi trinomiali, come già osservato in precedenza, producono risultati più accurati rispetto all'approssimazione binomiale, ma un aumento di accuratezza comporta un costo aggiuntivo dovuto alla crescente complessità.

Così come accade per un albero binomiale, infatti, anche un albero trinomiale può risultare non ricombinante, con un numero di nodi crescente esponenzialmente al crescere del numero delle variazioni.

Applicando la procedura illustrata nel paragrafo precedente è però possibile anche in tal caso semplificare l'albero, ottenendo  $2k+1$  nodi dopo  $k$  variazioni.

Si procede in particolare come segue.

Partendo dall'epoca iniziale in cui il processo assume valore  $y_0$ , all'epoca successiva il processo discreto assume i valori  $y_1^u = y_0 + \lambda\sigma(y_0)\sqrt{h}$  con probabilità pari a  $q^u(y_0) = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\mu(y_0)}{\sigma(y_0)} \sqrt{h}$ ,  $y_1^m = y_0$  con probabilità  $q^m(y_0) = 1 - \frac{1}{\lambda^2}$ ,  $y_1^d = y_0 - \lambda\sigma(y_0)\sqrt{h}$  con probabilità  $q^d(y_0) = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda} \frac{\mu(y_0)}{\sigma(y_0)} \sqrt{h}$ , rispettivamente in caso di variazione al rialzo, intermedia e al ribasso, dove  $\lambda$  è un parametro libero da calibrare opportunamente in caso di "pricing".

Allo stesso modo, dopo un'ulteriore variazione, partendo da  $y_1^u$ , il processo raggiunge i valori  $y_2^{uu}$ ,  $y_2^{um}$  o  $y_2^{ud}$ ; partendo da  $y_1^m$ , il processo raggiunge i valori  $y_2^{mu}$ ,  $y_2^{mm}$  o  $y_2^{md}$ ; infine, partendo da  $y_1^d$ , il processo raggiunge i valori:  $y_2^{du}$ ,  $y_2^{dm}$  o  $y_2^{dd}$ .

Anche in tal caso l'albero può risultare non ricombinante come illustrato in Fig. 5.4.

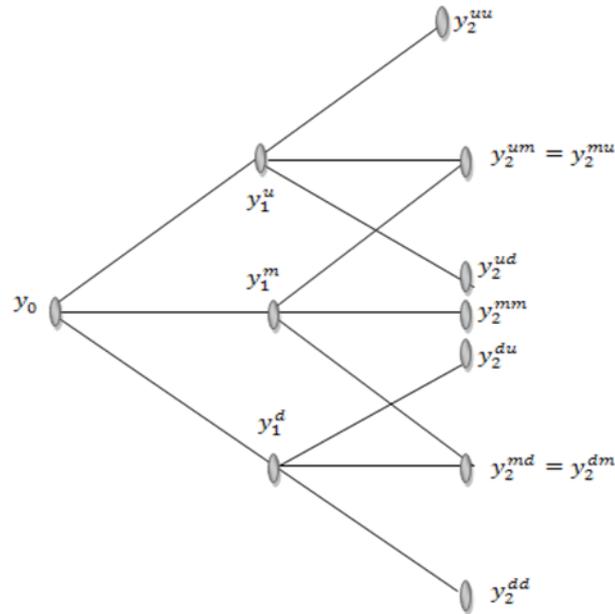


Fig. 5.4

Analogamente a prima, i nodi esterni  $y_2^{uu}$  e  $y_2^{dd}$  e quelli immediatamente adiacenti  $y_2^{md} = y_2^{dm}$  e  $y_2^{mu} = y_2^{um}$  restano invariati. Diversamente i nodi adiacenti interni  $y_2^{ud}$ ,  $y_2^{mm}$ ,  $y_2^{du}$  vengono sostituiti con la loro media condizionata:

$$(5.5) \quad \frac{1}{q^d(y_1^u) + q^m(y_1^m) + q^u(y_1^d)} [q^d(y_1^u)y_2^{ud} + q^m(y_1^m)y_2^{mm} + q^u(y_1^d)y_2^{du}]$$

se i relativi pesi sono compresi nell'intervallo  $[0,1]$  e inoltre  $y_2^{ud} < y_2^{du}$ , altrimenti con la loro media semplice.

Ne risulta un albero ricombinante come mostrato in Fig. 5.5, in cui  $\bar{y}(k,j)$  indica il  $j$ -esimo valore del processo all'epoca  $k$ , con  $0 \leq j \leq k$  e  $0 \leq k \leq n$ .

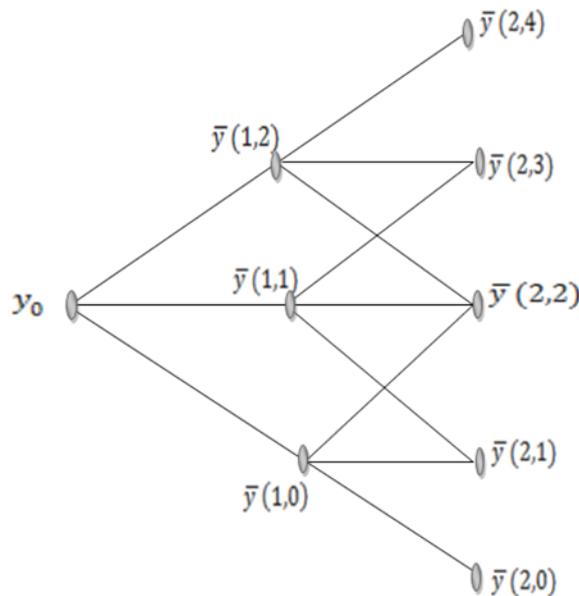


Fig. 5.5

Un inconveniente che accomuna l'approccio appena esaminato agli altri illustrati nei capitoli precedenti basati sulla costruzione di alberi ricombinanti è dovuto al fatto di richiedere ulteriori condizioni per evitare che il processo assuma valori negativi, non significativi qualora esso descriva la dinamica di grandezze finanziarie e soprattutto di prezzi.

## 6. Conclusioni

In questo lavoro, si esaminano alcune procedure numeriche per la valutazione delle opzioni finanziarie. Si tratta, in particolare, di metodi numerici volti a fornire un'approssimazione discreta del processo diffusivo che governa la dinamica del sottostante.

Si comincia con il richiamare la discretizzazione binomiale proposta da Cox, Ross, Rubinstein per approssimare il moto geometrico browniano.

Si passa poi all'esame di approcci alternativi proposti in letteratura per approssimare processi stocastici più generali, per esempio autoregressivi o eteroschedastici. Tra questi, il processo di Ornstein-Uhlenbeck e il processo CIR, comunemente impiegati in finanza per descrivere la dinamica dei tassi di interesse, e il processo CEV, applicato per descrivere la dinamica dei prezzi azionari.

Si esamina in particolare il modello proposto da Nelson, Ramaswamy in cui gli autori propongono un'approssimazione binomiale. Essi pervengono inizialmente ad un albero non ricombinante, difficile da gestire dal punto di vista computazionale e, per ovviare al problema, adottano un'apposita trasformazione del processo.

Successivamente, si illustrano i modelli di Hull, White e di Chen, Yang, entrambi basati su un'approssimazione mediante alberi trinomiali. Mentre però i primi autori adottano una procedura analoga a quella di Nelson, Ramaswamy, da rivedere caso per caso per generare alberi ricombinanti, i secondi propongono una procedura universale, applicabile a qualunque processo diffusivo, senza operare alcuna trasformazione. Attraverso una precisa definizione dello stato spazio del processo, inoltre, essi riescono a trattare anche alberi non ricombinanti senza doverli ricondurre ad alberi ricombinanti.

Infine, si illustra il modello proposto più recentemente da Costabile, Leccadito, Massabò in cui gli autori affrontano sia il caso di un'approssimazione binomiale che quello di una approssimazione trinomiale. Essi superano il problema di alberi non ricombinanti senza operare alcuna trasformazione ma semplicemente sostituendo ai nodi misti dell'originale albero non ricombinante un'apposita media.

Tra tutti i modelli esaminati, quest'ultimo è quello che sembra di più immediata lettura ed implementazione. Esso, però, come gli altri, è un modello approssimato, quindi affetto da un errore di approssimazione. In quanto tale, esso è sempre suscettibile di possibili perfezionamenti.

Si noti per esempio che in detto modello, come in tutti gli altri esaminati, l'errore di approssimazione è misurato in termini di matching tra i primi due momenti del processo discreto e i corrispondenti valori del processo continuo. Coinvolgere quindi anche i momenti successivi potrebbe portare ad un possibile miglioramento dell'errore.

Senza contare che l'evoluzione dei calcolatori potrebbe ridurre il costo computazionale legato all'uso di alberi non ricombinanti rendendoli così direttamente applicabili ai problemi di interesse finanziario.

La ricerca di procedure numeriche per la discretizzazione di processi diffusivi rimane dunque attuale e vivacissima (e non solo in ambito finanziario). Ciò è vero considerato anche il costante interesse sull'argomento manifestato nel tempo dalla letteratura e documentato in questo lavoro.

## Riferimenti bibliografici

- Barone-Adesi G., Whaley R. (1987). Efficient Analytic Approximation of American Option Values, *Journal of Finance* **42** (2), 301-320.
- Barraquand J., Martineau D. (1995). Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **30** (3), 383-405.
- Black F., Scholes M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* **81** (3), 637-654.
- Boyle P.P. (1976). Options: A Monte Carlo Approach, *Journal of Financial Economics* **4**, 323-338.
- Boyle P. (1988). A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **23** (1), 1-12.
- Boyle P., Broadie M., Glasserman P. (1997). Monte Carlo Methods for Security Pricing, *Journal of Economics Dynamics and Control* **21**, 1267-1321.
- Brennan M.J., Schwartz E. (1977). The Valuation of American Put Options, *Journal of Finance* **32** (2), 449-462.
- Brennan M.J., Schwartz E. (1978). Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claim: A Synthesis, *Journal of Finance and Quantitative Analysis* **13** (3), 460-474.
- Broadie M., Detemple J. (1996). American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods, *Review of Financial Studies* **9** (4), 1211-1250.
- Broadie M., Detemple J. (1997). The Valuation of American Options on Multiple Assets, *Mathematical Finance* **7** (3), 241-286.
- Broadie M., Glasserman P., Jain. G. (1997). Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices, *Journal of Derivatives* **5**, 25-44.
- Broadie M., Glasserman P., Kou S. (1999). Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options, *Finance and Stochastics* **3**, (1) 55-82.
- Brown S., Dybvig P. (1986). The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Finance* **41** (3), 617-632.
- Chen R. R., Yang T. T. (1999). A Universal Lattice, *Review of Derivatives Research* **3** (2), 115-133.
- Costabile M., Leccadito A., Massabò I. (2009). Computationally Simple Lattice Methods for Option and Bond Pricing, *Decisions in Economics and Finance* **32**, 149-160.
- Costabile M., Massabò I., Russo, E. (2007). A lattice Based Model for Pricing Equity-Linked Policies with Embedded Surrender Options, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari* **LXX**, 1-20.
- Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rate, *Econometrica* **53** (2), 385-408.
- Cox J.C., Ross S.A. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics* **3**, 145-166.
- Cox J.C., Rubinstein M. (1985). Options Markets, *Prentice Hall Inc.*
- Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics* **7**, 229-263.
- Diener F., Diener M. (2004). Asymptotics of the Price Oscillations of a European Call Option in a Tree Model, *Mathematical Finance* **14** (2), 271-293.
- Gaudenzi M., Zanette A. (2009). Pricing American Barrier Option with Discrete Dividends by Binomial Trees, *Decisions in Economics and Finance* **32**, 129-148.
- Hörfelt P. (2003). Pricing Discrete European Barrier Options Using Lattice Random Walks, *Mathematical Finance* **13** (4), 503-524.

- Hull J., White A. (1990). Pricing Interest Rate Derivative Securities, *The Review Financial Studies* **3** (4), 573-592.
- Hull J., White A. (1993). Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Derivatives, *Journal of Derivatives* **1** (1), 21-31.
- Hull J., White A. (1994a). Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models, *Journal of Derivatives* **2** (1), 7-16.
- Hull J., White A. (1994b). Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models, *Journal of Derivatives* **2** (1), 37-48.
- Hull J., White A. (1996). Using Hull-White Interest Rate Trees, *Journal of Derivatives* **3** (3), 26-36.
- Hussain S., Shashiashvili M. (2010). Discrete Time Hedging of the American Option, *Mathematical Finance* **20** (4), 647-670.
- Jackwerth J. (1999). Option-Implied Risk-Neutral Distributions and Implied Binomial Trees: A Literature Review, *Journal of Derivatives* **7** (2), 66-82.
- Jackwerth J., Rubinstein M. (1996). Recovering Probability Distributions from Option Prices, *Journal of Finance* **51** (5), 1611-1631.
- Joshi M.S. (2010). Achieving Higher Order Convergence for the Prices of European Options in Binomial Trees, *Mathematical Finance* **20** (1), 89-103.
- Kargin V. (2005). Lattice Option Pricing by Multidimensional Interpolation. *Mathematical Finance* **15** (4), 635-647.
- Leisen D.P.J. (1998). Pricing the American Put Option: A Detailed Convergence Analysis for Binomial Models, *Journal of Economic Dynamics and Control* **22**, 1419-1444.
- Leisen D.P.J. (1999). The Random-Time Binomial Model, *Journal of Economic Dynamics and Control* **23**, 1355-1386.
- Lonstaff F.A., Schwartz E.S. (1992). Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model, *Journal of Finance* **47**, 1259-1282.
- Merton R.C. (1973). The Relationship Between Put and Call Option Prices: Comment, *The Journal of Finance* **28** (1), 183-184.
- Nelson D.B., Ramaswamy K. (1990). Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models, *The Review Financial Studies* **3** (3), 393-430.
- Rendleman R.J., Bartter B.J. (1979). Two-State Option Pricing, *Journal of Finance* **34** (5), 1093-1110.
- Richard S.F. (1978). An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial Economics* **6**, 33-57.
- Rubinstein M. (1994). Implied Binomial Tree, *The Journal of Finance* **49** (3), 771-818.
- Shamsul A. (1992). An Examination of Estimation and Specification Error Biases in Estimates of Option Prices Generated by Black-Scholes and Cox-Ross Models, *Journal of Economics and Finance* **16** (3), 1-20.
- Sharpe W. F. (1978). Investments, *Prentice-Hall*.
- Smith C.W. (1976). Option Pricing: A Review, *Journal of Finance Economics* **3**, 3-51.
- Tian Y.S. (1994). A Reexamination of Lattice Procedures for Interest Rate-Contingent Claims, *Advanced Future Options* **7**, 87-111.
- Tian Y.S. (1999). A Flexible Binomial Model, *Journal Futures Markets* **19** (7), 817-843.
- Tilley J.A. (1993). Valuing American Options in a Path Simulation Model, *Transactions of the Society of Actuaries* **45**, 83-104.
- Vasicek O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* **5**, 177-188.