

**Miglioramento e Nota correttiva  
Proposta di Dimostrazione  
Congettura di Andrica**

**Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello**

**Abstract**

In this paper we will show an our short proof of Andrica's conjecture:

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

using some our results on Legendre's conjecture ([2]). In appendix also an algorithm in PARI / GP to search for counter-examples in a numeric range.

**Sommario**

In questo lavoro proponiamo una nostra semplice dimostrazione della congettura di Andrica sui numeri primi:

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

usando alcuni nostri risultati sulla congettura di Legendre ([2]). In appendice anche un algoritmo in PARI/GP per la ricerca di contro-esempi in un intervallo numerico.

**Congettura di Andrica**

La congettura di Andrica viene così definita dall'omonima voce di Wikipedia: " *La congettura di Andrica è una congettura della teoria dei numeri, riguardante gli intervalli tra due successivi numeri primi, formulata dal matematico romeno Dorin Andrica nel 1986. Afferma che, per ogni coppia di numeri consecutivi  $p_n$  e  $p_{n+1}$ , si ha:*

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

*Se poniamo  $g_n = p_{n+1} - p_n$ , allora la congettura può essere riscritta come*

$$g_n < 2\sqrt{p_n} + 1 "$$

Per il resto si rimanda all'omonima voce di Wikipedia.

Ora proponiamo una nostra semplice dimostrazione basata su alcune osservazioni riguardanti la congettura di Legendre, e sulle radici quadrate dei numeri compresi nell'intervallo numerico tra un quadrato e il successivo.

Da Wikipedia: " *La congettura di Legendre, da Adrien-Marie Legendre, afferma che esiste sempre un numero primo tra  $n^2$  e  $(n+1)^2$ . Questa congettura fa parte dei problemi di Landau e, fino ad oggi, non è stata dimostrata*".

Alcune osservazioni sulla congettura di Legendre sono:

1. tra  $n^2$  e  $(n+1)^2$  non esiste sempre un numero primo, ma almeno due (vedi sequenza A014085 dell'OESIS)
2. il Gruppo ERATOSTENE l'ha dimostrata, vedi [1] e [2].

### **Differenza tra due quadrati perfetti nell'intervallo $I = [n^2, (n+1)^2]$**

Per esaminare la relazione tra la congettura di Legendre e la congettura di Andrica, dobbiamo introdurre qualche concetto.

Sia  $I$  l'intervallo chiuso di interi definito come  $I = [n^2, (n+1)^2]$ .

Sia  $D_{qp}$  la differenza tra due quadrati perfetti consecutivi, nell'intervallo  $I$ .

#### **Lemma 1**

La differenza  $D_{qp}$  tra due quadrati perfetti consecutivi, nell'intervallo chiuso di interi  $I = [n^2, (n+1)^2]$  è sempre un numero dispari.

Dim.

$$D_{qp} = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

Poiché qualunque sia  $n$ ,  $D_{qp} = 2n + 1$  allora è sempre dispari.

*Esempio*

$n = 2$  valido per tutti gli  $n$  numeri naturali

$$D_{qp} = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = 2 * 2 + 1$$

#### **Lemma 2**

Il numero  $N$  di interi compresi in un intervallo chiuso di interi  $I = [n^2, (n+1)^2]$  è pari.

Dim.

Per il Lemma 1, poiché il numero di interi in  $I$  è  $N = D_{qp} + 1 = 2n + 2 = 2(n+1)$  allora  $N$  è pari.

*Esempio*

Se  $n=2$   $N=2(3)=6$ .

Difatti i numeri compresi nell'intervallo  $I$  sono: 4, 5, 6, 7, 8, 9; con 5 e 7 due numeri primi.

### **Radici quadrate dei numeri nell'intervallo $I = [n^2, (n+1)^2]$**

#### **Lemma 3**

La differenza  $D_{rq}$  delle radici quadrate di due numeri, anche non consecutivi (primi e composti), in un intervallo chiuso di interi  $I = [n^2, (n+1)^2]$ , escluso il numero  $(n+1)^2$ , è minore di 1.

Dim.

Agli estremi  $D_{rq}$  vale:  $D_{rq} = n - n = 0$  se consideriamo all'inizio dell'intervallo la differenza con sé stesso; oppure  $D_{rq} = (n+1) - n = 1$ . Quindi  $D_{rq}$  varia tra 0 e 1. Il Lemma 3 esclude il numero  $(n+1)^2$  perché nel secondo caso la differenza non darebbe una parte decimale dopo la virgola.

Per cui il Lemma 3 è da verificare tra  $n^2$  e  $(n+1)^2 - 1$ . Poichè riteniamo vera la congettura di Legendre (vedi [2]), che tra  $n^2$  e  $(n+1)^2$  esiste almeno un numero primo e quindi un intero, allora tra i valori 0 ed 1 assunti da  $D_{rq}$  esistono valori minori di 1. Ovviamente poiché si fa riferimento a numeri interi nell'intervallo I, è indifferente che essi siano primi o composti; per cui è possibile l'applicabilità dell'ex-congettura di Legendre.

Esempio Radici quadrate per  $n=2$

$\sqrt{4} = 2,00$   
 $\sqrt{5} = 2,23$  con 5 numero primo  $p_n$   
 $\sqrt{6} = 2,44$   
 $\sqrt{7} = 2,64$  con 7 numero primo  $p_{n+1}$   
 $\sqrt{8} = 2,82$   
 $\sqrt{9} = 3,00$

#### Lemma 4

Nell'intervallo  $I = [n^2, (n+1)^2]$  esistono almeno due numeri primi,

Dim.

Il postulato di Bertrand che è vero dice che “Se  $n$  è un intero con  $n > 1$ , allora vi è sempre un numero primo  $p$  tale che  $n < p < 2n$ ”.

Se chiamiamo  $a=n^2$  allora l'intervallo che stiamo considerando è  $[a, a+1+2\sqrt{a}]$ . Ora per  $a > 3$  il termine  $a+1+2\sqrt{a} > 2a$ ; per cui sicuramente è applicabile il postulato di Bertrand, ma si osserva anche che l'intervallo in gioco è maggiore di quello usato nel postulato di Bertrand, per cui aumenta la probabilità di trovare almeno un secondo numero primo; difatti per il Teorema dei numeri primi è:

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \approx \frac{2n+1}{\ln((n+1)^2)} > 1 \quad (1)$$

Nota: Gli intervalli che consideriamo sono tra l'altro gli intervalli critici più piccoli dove si potrebbe rischiare di non trovare il secondo numero primo, ma che la (1) garantisce. Nel caso della congettura di Andrica si ipotizza, inoltre, che i due numeri primi consecutivi esistono, anche a distanza notevoli o gap notevoli.

#### Esempio

Nell'intervallo I con  $n=2$  abbiamo i due numeri primi consecutivi 5 e 7:

$$\sqrt{7} - \sqrt{5} = 2,64 - 2,23 = 0,41 < 1$$

Dalla (1) risulta  $\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \approx 2,27$

#### Lemma 5

La differenza delle radici quadrate di due numeri primi consecutivi che cadono in un intervallo chiuso di interi  $I = [n^2, (n+1)^2]$  escluso il numero  $(n+1)^2$ , è minore di 1.

Dim.

Il Lemma 5 è una conseguenza dei Lemmi 3,4.

Non è ancora però una dimostrazione della congettura di Andrica; perché i numeri primi consecutivi potrebbero far parte di intervalli quadratici differenti.

### **Numeri primi in intervalli quadratici diversi**

Alcuni numeri primi però appartengono a intervalli quadratici successivi, pur essendo ugualmente valida la congettura di Andrica, per esempio 113 e 127: il primo è compreso nell'intervallo tra  $10^2$  e  $11^2$ , mentre 127 è compreso nell'intervallo tra  $11^2$  e  $12^2$ . In realtà l'intervallo quadratico è sempre possibile individuarne uno solo; ad esempio è tra  $10^2$  e  $12^2$ .

### **Lemma 6**

La differenza delle radici quadrate di due numeri che cadono in un intervallo chiuso di interi  $I = [n^2, (n+k)^2]$  con  $k \geq 1$ , escluso il numero  $(n+k)^2$ , è minore di 1 purché se  $k > 1$  la differenza  $(n+k)^2 - n^2 \neq 0 \pmod{3}$ .

Dim.

Il Lemma 6 si dimostra con tutti i Lemmi precedenti, notando anche che il  $k$  tende solo ad allargare sicuramente l'intervallo dei quadrati; per cui il Lemma 6 è una generalizzazione del Lemma 5.

In particolare se  $k=1$  si ritorna al Lemma 5 e non serve considerare se la differenza è un multiplo di 3. Ad esempio 131 e 137 sono due primi la cui differenza è multiplo di 3 ma non conta perché l'intervallo è lo stesso per entrambi i primi. Infatti è  $[11^2, 12^2]$  con  $k=1$ .

Invece se guardiamo 113 e 137 l'intervallo da considerare è diverso, cioè  $k=2$  infatti è  $[10^2, 12^2]$  ma  $137-113=24$  multiplo di 3. Qua la differenza tra le radici è maggiore di 1 quando la differenza è pari e multiplo di 3 (è lo stesso dire che è multiplo di 6). Però c'è da dire che 137 e 113 non sono nemmeno primi consecutivi. Il problema che la differenza tra le radici quadrate di due numeri primi consecutivi possa essere maggiore di 1 potrebbe però avvenire quando i due intervalli quadratici non sono contigui, quindi ad esempio per  $k > 2$ .

### **Lemma 7**

Due numeri primi consecutivi, che cadono in un intervallo chiuso di interi  $I = [n^2, (n+k)^2]$  con  $k > 2$ , non hanno una differenza  $D=6j$  quando  $j > 1$ , ovvero pari e multiplo di 3.

Dim.

Se la differenza di due numeri primi consecutivi fosse pari e multiplo di 3, dovrebbe essere

$$D = 3m = 6j \text{ dove } m=2j \text{ (pari)}$$

Se  $j=1$  si incorre nella situazione  $k=2$  e dei numeri primi come 23 e 29 dove  $D=6$  ( $j=1$ ) e la differenza delle radici quadrate è minore di 1; per cui il Lemma si concentra sui casi  $j > 1$ . Ora i numeri primi si possono spesso ricavare con la forma generatrice  $p_n = 6n \pm 1$ , per cui se esistessero due numeri primi consecutivi in intervalli  $I$  con  $k > 2$  e  $j > 1$  non avrebbero mai  $D=6j$  a causa della forma generatrice stessa.

D'altra parte se per assurdo i numeri primi consecutivi fossero tali che:

$$p_{n+1} - p_n = 6j, \quad j > 1 \quad (2)$$

Equivalente a :

$$\sqrt{p_{n+1}} = \sqrt{p_n + 6j}$$

Allora si concluderebbe che:

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} = \sqrt{p_n + 6j} - \sqrt{p_n} > 1 \quad (3)$$

Poiché la (2) è falsa, non si può concludere la (3). In altri termini se la differenza tra due numeri primi consecutivi fosse stata multiplo di 6 avremmo sempre trovato che la differenza delle radici quadrate di due numeri primi consecutivi è maggiore di 1.

### Congettura di Andrica

La congettura di Andrica è vera per conseguenza del Lemma 6 e del Lemma 7.

Dim.

La congettura presuppone l'esistenza di due numeri primi consecutivi. Se essi cadono in uno stesso intervallo quadratico allora già il Lemma 5 darebbe vera la congettura. Se i due numeri primi cadono in intervalli quadratici differenti allora Lemma 6 ed il Lemma 7, garantiscono che la congettura è vera.

### Appendice

Qui vengono presentati due programmi in PARI/GP che cercano contro-esempi. Il primo programma ricerca contro-esempi sulla congettura di Andrica. Il secondo programma cerca contro-esempi al fatto che in un intervallo quadratico con  $K > 2$  due numeri primi se consecutivi non possono avere una differenza pari e multiplo di 3. Entrambi i programmi hanno il vantaggio di poter essere lanciati con un valore iniziale e finale di ricerca, consentendo di riprendere la ricerca, su intervalli successivi. Gli autori hanno provato tra 1 e 1miliardo senza trovare contro-esempi.

```
sT(val1=1, val2=1000000000) = local(); {
  print("Ricerca controesempi congettura Andrica - vers. 1.00 FEB 2010\n");
  print("Numero di partenza: ",val1);
  print("Numero di arresto: ",val2);
  p1=nextprime(val1);
  d=0;
  while(d<1 & p1 < val2,
    p2=nextprime(p1+1);
    d=sqrt(p2)-sqrt(p1);
    print("d: ",d);
    if(
      d > 1,
      print("controesempio !!!");
      print("Pn: ",p1);
      print("Pn+1: ",p2);
    );
    p1=p2;
  );
}
```

```
sT2(val1=1, val2=100000) = local(); {
  print("Ricerca controesempi Differenza primi consecutivi non multipli di 3 - vers. 1.00 FEB 2010\n");
  print("Numero di partenza: ",val1);
  print("Numero di arresto: ",val2);
  a=1;
  p1=nextprime(val1);
  while(p1 < val2,
    p2=nextprime(p1+1);
    d=p2-p1;
    print("*****");
    print("Pn: ",p1);
    print("Pn+1: ",p2);
  );
}
```

```

print("d:          ",d);
a = d%3;
a1 = sqrtint(p1);
if ( a1 == p1, a1 = a1+1);
a2 = sqrtint(p2);
while(a2^2<p2,
    a2=a2+1;
);

print("I=[" ,a1^2, ",",a2^2, " ]");
k=a2-a1;
print("k:          ",k);
c1=p1;
p1=p2;
if(a==0 & k>2,
    print("controesempio !!!");
    print("Pn:          ",c1);
    print("Pn+1:        ",p2);
    print("a1:          ",a1);
    print("a2:          ",a2);
    print("D1 = ", sqrt(p2)-sqrt(c1));
    p1=val2;
); }

```

## Riferimenti

[1] “Soluzione unificata per alcune congetture sul numero dei numeri primi in un certo intervallo” Prof. Annarita Tulumello, in sezione “Articoli sui numeri primi” del nostro sito [www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com)

[2]“The Landau’d prime numbers and the Legendre’s Conjecture” (La congettura di Landau e la congettura di Legendre) di Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello

[3] “Numeri primi in cerca d’autore” Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.  
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.