

Block Notes Matematico

RH equivalente generale dei numeri naturali

Ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

Introduzione

I numeri naturali, in generale, godono di diverse relazioni (uguaglianza/disuguaglianza etc) ma esiste una relazione che è sempre vera, qualunque sia la proprietà variabile considerata, per ottenere dei numeri naturali come elementi di un insieme. Gli autori nel seguito tale relazione la denominano "RH equivalente generale dei numeri naturali".

Definizioni

Nel seguito intenderemo con $Q(n)$ una funzione di conteggio di numeri naturali, nell'intervallo $[1..n]$, che godono tutti di una stessa proprietà q ; mentre con $\pi(n)$ intendiamo la funzione di conteggio dei numeri primi nell'intervallo $[1..n]$.

Si definisce "proprietà costante" una proprietà dei numeri naturali tali che al variare di n il termine $Q(n)/n$ = costante; mentre si definisce "proprietà variabile" una proprietà tale che $Q(n)/n$ = variabile con n .

Proprietà costanti

Esaminiamo alcune proprietà costanti più importanti.

Insieme dei numeri naturali individuato dalla proprietà "elemento di partenza ed il successivo": $q_i=1, q_{i+1}=q_i + 1$. L'insieme dei numeri naturali definito dalla forma ricorsiva individua tutti i numeri naturali in \mathbb{N} ; per cui il rapporto $Q(n)/n = 1$ in un intervallo $[1..n]$. Questa proprietà è una proprietà "limite" nel senso che il rapporto $Q(n)/n$ non può essere maggiore di 1; oppure si può dire che $Q(n)/n$ è limitata superiormente dal valore 1.

Insieme dei numeri naturali individuato dalla "proprietà numeri pari o dispari". L'insieme dei numeri naturali definito dalla proprietà $q_{\text{mod}2} = 0$ individua metà di tutti i numeri naturali in \mathbb{N} ; per cui il rapporto $Q(n)/n = 0.5$ in un intervallo $[1..n]$. Questo insieme si potrebbe definire anche come *Insieme dei numeri naturali individuato dalla proprietà "numero doppio del precedente":* $q_m = 1, q_{m+1}=2x$.

Proprietà variabili

Esaminiamo alcune proprietà variabili più importanti .

Un elenco di ulteriori proprietà di esempio sono:

- *Insieme delle coppie di Goldbach con funzione conteggio $G(n)$, che conta l'insieme delle coppie di numeri primi che danno come somma un pari nell'intervallo $[1..n]$*
- *Insieme dei numeri primi gemelli con funzione conteggio $g(n)$, che conta il numero di numeri primi che sono a distanza 2 nell'intervallo $[1..n]$*

- *Insieme dei numeri primi omirp con funzione conteggio $o(n)$, che conta il numero di primi il cui rovescio è un numero primo (esempio: 13/31. Vedi sequenza A006567 nell'OESIS).*
- *Insieme dei numeri primi permutabili con funzione conteggio $p(n)$, che conta il numero di numeri primi che ha almeno una permutazione, in una determinata base (10 o 2), che costituisce un numero primo (esempio: 113/131/311. Vedi sequenza A003459 nell'OESIS).*
- *Insieme dei numeri primi circolari con funzione conteggio $c(n)$, che conta il numero di numeri primi ottenuto da tutte le permutazioni possibili circolari (esempio: 1193/1931/9311/3119). Per questi numeri vanno escluse le cifre 5 e 2, per evitare numeri pari o divisibili per 5. Sono circolari anche i numeri *repunit*. Una curiosità: non esistono numeri circolari tra 17 e 19 cifre.*
- *Insieme dei numeri primi cubani di prima forma con funzione conteggio $cp(n)$, che conta il numero di primi della forma $(x^3 - y^3)/(x - y)$, $x = y + 1$, $\forall y > 0$ equivalente a $3y^2 + 3y + 1, \forall y > 0$. Essi coincidono anche con l'insieme dei numeri esagonali centrati.*
- *Insieme dei numeri primi cubani di seconda forma con funzione conteggio $cs(n)$, che conta il numero di primi della forma $(x^3 - y^3)/(x - y)$, $x = y + 2$, $\forall y > 0$ equivalente a $3y^2 + 6y + 4, \forall y > 0$*
- *Insieme dei numeri di Levy con funzione conteggio $L(n)$, che conta gli interi dispari maggiori di 5 che possono essere rappresentati come somma di un numero dispari (ad eccezione del 2) e di un semiprimo pari. E' equivalente a dire la somma di un numero primo p e di un numero primo q che è moltiplicato per 2. Infatti la **congettura di Levy** è:*

$$\forall n > 2, p, q \in P \rightarrow N = 2n + 1 = p + 2q$$

con P insieme dei numeri primi.

- *Insieme dei numeri di Keith con funzione conteggio $N_k(n)$, che conta tali numeri in un intervallo n .*

Vengono chiamati anche Repfigit. Il nome deriva da "replicating Fibonacci digit" ed indica i "numeri riproduttori di Fibonacci". Si definisce *numero repfigit* o *numero di Keith* un numero n intero, costituito da m digit $d_1d_2\dots d_m$, che si rigenera all'interno di una sequenza del tipo:

$$d_1, d_2, \dots, d_m, s_1=d_1+d_2+d_3+\dots+d_m, s_2=s_1+d_2+\dots+d_m, s_3=s_2+s_1+d_3+\dots+d_m, \dots$$

Generalizzando la *proprietà che n è un numero di Keith* e che considerando una sequenza di interi definita da:

$$s_k = d_k \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad \text{e} \quad s_k = \sum_{i=1, m, sk-i} (k > m).$$

Se è vero che $s_k = n$ per qualche k , allora n è un numero riproduttore di Fibonacci o numero di Keith o numero repfigit. Esempio $n=47$, $m=2$ digit, la sequenza che si ottiene è 4,7,11,18, 29, 47

- *Insieme dei numeri esagonali centrati con funzione conteggio $ec(n)$, che conta i numeri naturali della forma $1 + 3n(n - 1)$ in un intervallo n .*
- *Etc.*

Rispetto alla situazione delle proprietà costanti, le proprietà variabili hanno un rapporto $Q(n)/n < 1$.

Confronto con la funzione conteggio dei numeri primi

Nel seguito si prenderà la funzione di conteggio dei numeri primi $\pi(n)$ e si considererà il termine $\pi(n) / n \log n$ come termine di confronto rispetto a $Q(n)/n$.

La RH equivalente generale dei numeri naturali

Se $i \in \mathbb{N}$ è un intero qualsiasi e indichiamo con $Q(n)$ la quantità di elementi $i \in \mathbb{N}$, scelti in un intervallo $[1..n]$ (fino ad n), e tale che ognuno degli elementi 'i' gode della stessa proprietà q, dove q è una qualsiasi proprietà variabile, allora è sempre in valore assoluto:

$$\left| \frac{Q(n)}{n} - \frac{\pi(n)}{n \log(n)} \right| < \frac{C}{\log(n)} \quad (1), \text{ con } C=1$$

La (1) è una proprietà insita dei numeri naturali, è la *RH equivalente generale dei numeri naturali*.

$Q(n)$ ad esempio potrebbe essere la quantità $G(n)$ di coppie di numeri di Goldbach fino a n , il numero $g(n)$ di primi gemelli fino ad n , il numero $L(n)$ delle coppie di Levy, il numero $N_k(n)$ di numeri di Keith, etc. La (1) esclude, ad esempio, le proprietà costanti che abbiano un valore $Q(x)/x$ maggiore di 0.05 (verificabile con un excel). Ad esempio nelle due figure successive si vede che il valore $Q(x)/x$ non è minore in valore assoluto a $1/\ln(x)$.

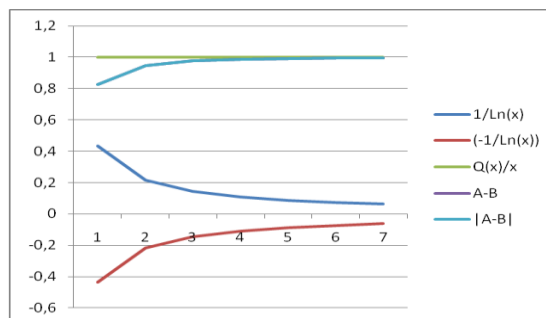


Fig 1 - $Q(x)/x = 1$ con $C=1$

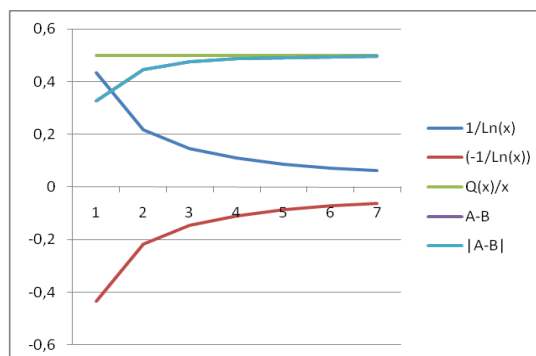


Fig. 2 - $Q(x)/x = 0.5$ con $C=1$

Se $Q(x)/x = \pi(x) / x \log x$ la (1) è rispettata; ovvero per i numeri primi la (1) è vera. Tra le proprietà variabili ci sono le seguenti figure che mostrano anch'esse la validità della (1).

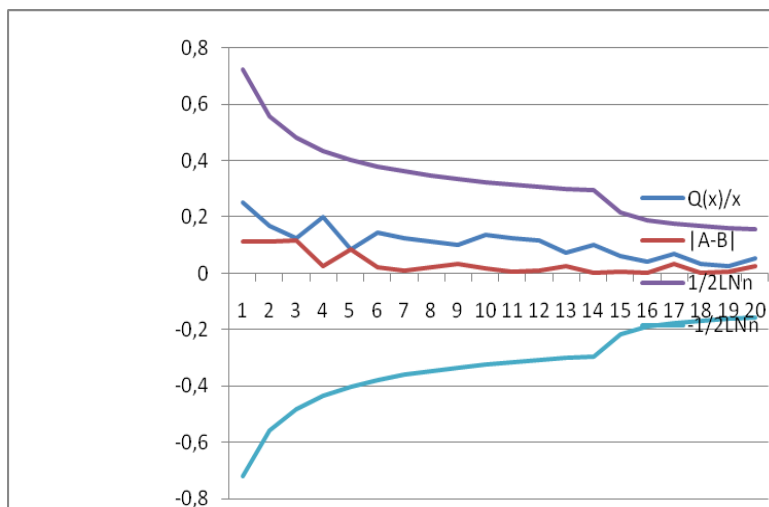


Fig. 3 – coppie di Goldbach

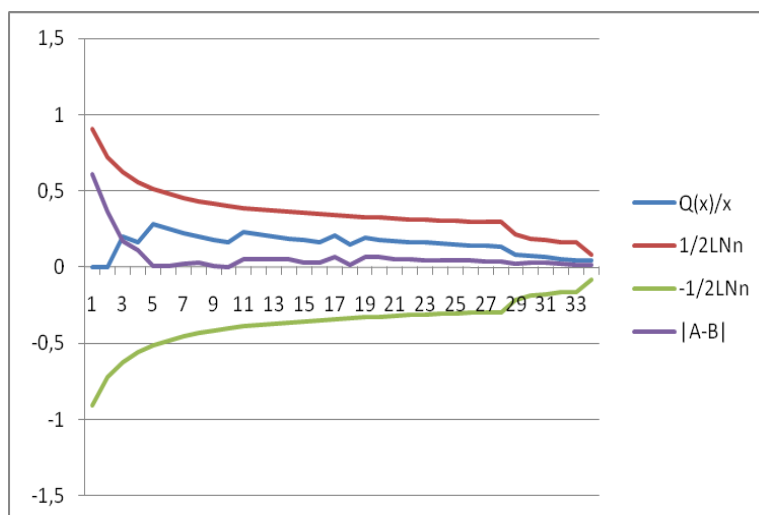


Fig. 4 – coppie dei numeri primi gemelli

E' evidente, inoltre, che se le proprietà sono tali che stiamo considerando numeri primi selezionabili con un'ulteriore proprietà la quantità dei numeri primi $Q(x)$, a parità di intervallo x , diminuisce ancora rispetto a $\pi(x)$. Per cui è evidente che la (1) sarà rispettata per i numeri primi omirp, permutabili, circolari, cubani di prima e seconda forma.

Per verificarlo basta mettere su un excel i dati (il numero di elementi) prelevati da liste standard come *Sloane* etc. da Wikipedia o MathWorld e verificare la (1), per intervalli di potenze di 10 fino a esponenti elevati disponibili.

Anche con la congettura di Levy siamo legati a proprietà dei numeri primi ed è rispettata la (1) come si vede dalla Fig.5

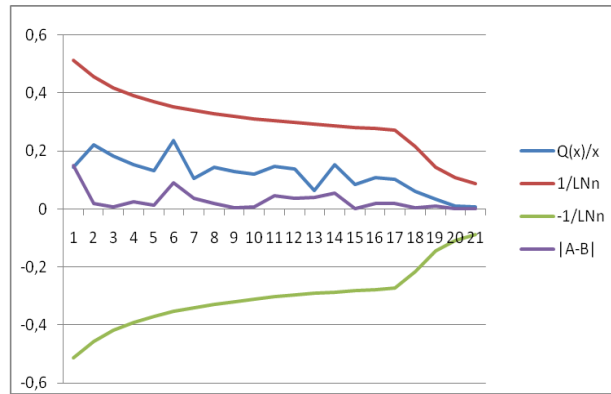


Fig. 5 – coppie di Levy

Con i numeri di Keith o Repfigit (vedi Wikipedia) abbiamo dei numeri non primi ma legati a proprietà come quelle della sequenza di Fibonacci dove gli elementi sono considerati a m alla volta; però la (1) è sempre rispettata (vedi Fig. 6)

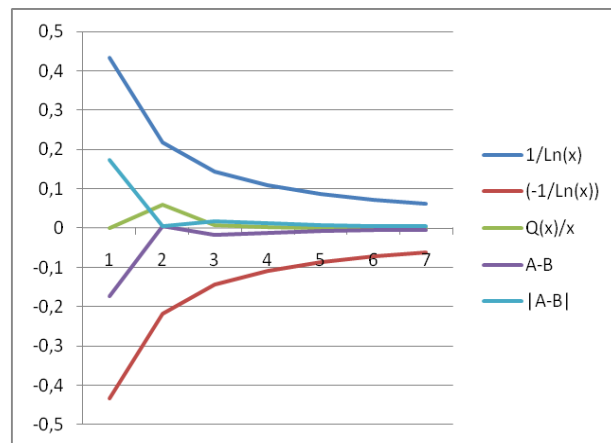


Fig. 6 – quantità numeri di Keith

Se guardiamo la proprietà “numeri esagonali centrati”, indipendente da quella dei numeri primi, la (1) è ancora rispettata (Vedi Fig. 7).

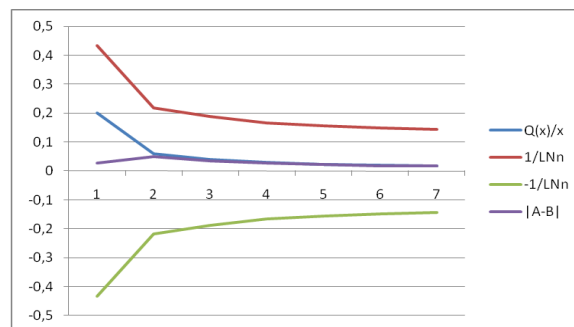


Fig. 7 conteggio dei numeri esagonali centrati

Una RH equivalente

Perché consideriamo la (1) *la RH generale dei numeri naturali*? In molte delle stime approssimate, legate a proprietà dei numeri primi (gemelli, Goldbach, Levy etc), le funzioni di conteggio dei numeri naturali, con determinate proprietà, hanno forme simili a quella del conteggio delle coppie di Goldbach $G(N)$; infatti è:

$$G(x) \approx c \frac{x}{(\ln x)^2} \quad (2)$$

Ora senza, al momento, considerare la costante c e sapendo che è vero il TNP (Teorema dei numeri primi) nella forma semplice:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}, \quad N \rightarrow \infty$$

Dalla (2) e dal TNP è:

$$\frac{G(x)}{x} \approx \frac{1}{(\ln x)^2}, \quad \frac{\pi(x)}{x \ln x} \approx \frac{1}{(\ln x)^2}$$

E ciò ci riconduce a:

$$\left| \frac{G(x)}{x} - \frac{\pi(x)}{x \ln x} \right| < KC(x), \text{ con } K=1 \text{ e } C(x) = \frac{1}{\ln x} \quad (3)$$

La (3) è simile alla (1) sostituendo $Q(x)$ con $G(x)$.

Per cui dalla (3), generalizzando con $Q(x)$ al posto di $G(x)$ si ottiene che

$$\left| \frac{Q(x)}{x} - \int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^2} \right| = O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \quad (4)$$

che rappresenta una *RH equivalente* (vedi APPENDICE).

Le stime delle funzioni di conteggio dei numeri, ottenibili non da proprietà legate ai numeri primi, hanno stime diverse dalla (2) ma sono in grado comunque di rispettare la (1) e quindi la (4).

La (1) è sempre valida, ma i grafici mostrano anche una ulteriore cosa ovvero che:

$$\frac{Q(x)}{x} < \frac{1}{\log x} \quad (5)$$

Che è semplicemente equivalente a:

$$Q(x) < \pi(x)$$

Significato delle formule

Generalmente la probabilità che x sia primo è $\approx 1/\log x$; mentre l' x -esimo numero primo è circa $x \log x$. Per cui la (3) dice che: "La differenza, in valore assoluto, tra il numero di soluzioni di $Q(x)$, rapportata al numero x in gioco, ed il conteggio di numeri primi fino ad x incluso, rapportato all' x -esimo numero primo ($\sim x \ln x$), è inferiore alla probabilità che x sia un numero primo ($\sim 1/\ln x$)".

Inoltre la (5) esprime che la densità dei numeri $Q(x)/x$, con una certa proprietà e contati con $Q(x)$, è minore di $1/\log x$.

APPENDICE

Se è vera la (1), al posto di $\pi(x)$ possiamo usare il logaritmo integrale Li , a partire dal numero primo 2:

$$\left| \frac{Q(x)}{x} - \int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^2} \right| = O((\ln x)^{-1}) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) = O(x^{-\varepsilon}) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \approx O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

Da cui è all'incirca:

$$\left| \frac{Q(x)}{x} - \int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^2} \right| = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

Riferimenti

[1] Rosario Turco, Maria Colonnese, Gruppo Eratostene – Sulle spalle dei giganti (par. Congettura per forme chiuse $G(N)$ e $g(N)$ – ipotesi equivalenti RH)

[2] Rosario Turco, Maria Colonnese, Gruppo Eratostene - The Landau's prime numbers and the Legendre's conjecture

[3] Rosario Turco, Maria Colonnese, Gruppo Eratostene - Congettura di Levy - proposta di soluzione della congettura e ipotesi RH equivalente di Levy