[1]Sulle possibili relazioni matematiche tra Funzione zeta di Riemann, Numeri Primi, Serie di Fibonacci, Partizioni e Teoria di Stringa.

Dedicato alla memoria del genio matematico S. Ramanujan (1887-1920)

Michele Nardelli[1], Francesco Di Noto e Annarita Tulumello

[1] Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Polo delle Scienze e delle Tecnologie
Monte S. Angelo, via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

Riassunto.

Scopo del presente lavoro è quello di evidenziare le relazioni matematiche tra Teoria di Stringa, numeri primi (che sono alla base della funzione zeta di Riemann), serie di Fibonacci e calcolo delle partizioni.
Nella prima parte, composta dai primi cinque capitoli, vengono esposti alcuni teoremi e dimostrazioni matematiche sulla serie di Fibonacci, sui numeri primi "naturali", sulle relazioni tra numeri primi, numeri di Fibonacci ed alcuni teoremi sulle partizioni e, infine, sulla possibile unificazione delle "costanti ultime" tramite i due numeri c = 1,08366 e $\Phi = 1,618033$, dal punto di vista strettamente matematico. Il linguaggio matematico usato in questa parte del lavoro è principalmente di tipo algebrico-analitico.
All'interno del lavoro vengono esposti dei settori della teoria di stringa, precisamente le soluzioni cosmologiche da un sistema D3/D7, la soluzione applicata alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB ed alcune formule inerenti le proprietà del vuoto eterotico da superpotenziali, quindi collegate alle compattificazioni della stringa eterotica su varietà complesse 6-dimensionali non Kahleriane.
Verrà qui evidenziato, come alcune soluzioni di equazioni di questi settori della teoria di stringa, sono correlate sia alla funzione zeta di Riemann che alla sezione aurea, quindi la strettissima correlazione con i numeri primi ed i numeri di Fibonacci e, conseguentemente, per quanto evidenziato nel corso del lavoro, con i numeri primi naturali e le partizioni.

1. Teoremi su somme e prodotti di tutti i termini consecutivi della serie di Fibonacci.

Come è noto, la somma di due termini consecutivi qualsiasi della serie di Fibonacci, fornisce come risultato il termine successivo ai due termini sommati, per es.
13 + 21 = 34 anch'esso termine di Fibonacci dopo il 21. In questo capitolo, vogliamo vedere cosa succede sommando o moltiplicando tutti i termini fino ad un certo termine, che chiameremo f_n.

[1]**Presentato a Soc. Natur. Napoli – Nuova Serie – (2006); 1 – 66 e a Giornale della Società Matematica "Ramanujan" – (Società Hardy-Ramanujan) (2006); 1 – 66**

Siamo giunti alla conclusione che tale somma è uguale al (n + 2)-esimo termine della serie, meno uno. In simboli matematici:

$$\sum_{n=1}^{n} f_n = f_{n+2} - 1. \quad (1.1)$$

Dimostrazione.

La nota serie di Fibonacci è la seguente, con ogni termine associato al suo numero d'ordine n successivo:

n° 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 …

f_n 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

dove ogni termine $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Difatti se, per es., $f_n = 55$ allora, $f_{n-1} = 34$ e $f_{n-2} = 21$, per cui 55 = 34 + 21.
Vediamo ora le somme di tutti i termini fino a $f_n = 55$:

										55
									34	34
								21	21	21
							13	13	13	13
						8	8	8	8	8
					5	5	5	5	5	5
				3	3	3	3	3	3	3
			2	2	2	2	2	2	2	2
		1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
--	----	---	---	--	----	----	----	----	----	----
0	1	2	4	6	12	20	33	54	88	143

Tali somme successive equivalgono al (n + 2) termine, meno 1, e quindi a:

$$\sum f_n = f_{n+2} - 1. \quad (1.2)$$

Come si può facilmente notare, ogni somma +1 è uguale al secondo termine successivo al termine maggiore tra quelli sommati; in altre parole, aggiungendo 1 a tutte le somme così ottenute, abbiamo tutta la serie di Fibonacci, a partire da 2:

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Viceversa, ora possiamo dire che l'n° termine diminuito di 1, è la somma di tutti i termini fino al termine (n – 2)-esimo, oltre che la somma dei due termini precedenti, in questo caso però senza togliere l'unità; o anche: $f_n - 1$ come somma di tutti i termini fino a f_{n-2}. Questo teorema è quindi un'estensione totale della somma di due soli termini precedenti, a tutti i termini precedenti. Ma si possono sommare anche più di due termini (k > 2) precedenti ad un dato termine, e in ogni caso si ottengono formule generali legate ad altri termini della serie. Per esempio, per la somma di k = 3 termini precedenti, abbiamo le somme:

a)	1	1	1	2	3	5	8	13	21	
b)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	
c)	0	2	3	5	8	13	21	34	55	
	---	---	---	---	---	----	----	----	----	
d)	2	4	6	10	16	26	42	68	110	(somme)
f_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	

somme che equivalgono, rispettivamente, al doppio di tutti i termini della serie, e quindi a $2f_n$, ma anche alla differenza d – c = a + b.
Con tabelle e somme simili si arriva a formule per le somme degli ultimi quattro termini, cinque termini, e più in generale, di k termini:

$$\sum_{n-k}^{n} = f_{n+2} - f_{n+2-k}\,, \quad (1.3)$$

in altre parole, la somma degli ultimi k termini è data dal secondo termine dopo f_n, meno il k-esimo termine precedente. Per esempio, la somma dei k = 4 termini fino a
13 = 8° termine, e quindi 3 + 5 + 8 + 13 = 29, è data da: per k = 4 ed n = 8 (dove 8 sta per 8° termine) si ha $f_{8+2} - f_{8+2-4}$ = 10° termine meno il 6° termine, cioè da

34 – 5 = 29,

mentre se k fosse stato 5, avremmo avuto 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 31, pari a 34 meno il
8 + 2 – 5 = 5° termine = 3 e quindi 34 – 3 = 31.
Vediamo adesso per i prodotti, anziché somme, tra un numero di Fibonacci ed il precedente. Troviamo che:

$$f_n \times f_{n-1} = f_{2(n-2)} + P_{(n-2)}\,, \quad (1.4)$$

dove P è un prodotto tra due numeri di Fibonacci precedenti, secondo la seguente tabella fino ad n = 8:

1	0	0×0	0
2	1	1×0	0
3	1	1×1	1
4	2	2×1	2
5	3	3×2	6
6	5	5×3	15
7	8	8×5	40
8	13	13×8	104
….	….	… …	…..
n	f_n	$f_n \times f_{n-1}$	P_n

Per esempio $P_7 = 8\times 5 = 40 = 34 + 6 = 40$, infatti $f_7 \times f_6 = 8\times 5 = P_7 = 40$ e $f_{2(7-2)} + P_5 = f_{10} + P_5 = 34 + 6 = 40$.

Di questa formula non esistono ancora applicazioni note. Per il prodotto di tutti i termini successivi di Fibonacci abbiamo:

$$
\begin{array}{ll}
1\times 1 = 1 & \Pi_3 \\
1\times 1\times 2 = 2 & \Pi_4 \\
1\times 1\times 2\times 3 = 6 & \Pi_5 \\
1\times 1\times 2\times 3\times 5 = 30 & \Pi_6 \\
1\times 1\times 2\times 3\times 5\times 8 = 240 & \Pi_7 \\
1\times 1\times 2\times 3\times 5\times 8\times 13 = 3120 & \Pi_8 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots.
\end{array}
$$

con la progressione di prodotti 1, 2, 6, 30, 240, 3120, … regolata dalla seguente formula: ogni prodotto della progressione fino all'n-esimo numero di Fibonacci è dato dal precedente prodotto moltiplicato per l'n-esimo numero di Fibonacci. In termini matematici:

$$\Pi_n = f_n \times \Pi_{n-1}. \quad (1.5)$$

Infatti

$$
\begin{aligned}
2 &= 2\times 1 \\
6 &= 3\times 2 \\
30 &= 5\times 6 \\
240 &= 8\times 30 \\
3120 &= 13\times 240 \text{, ecc…}
\end{aligned}
$$

Per le relazioni sulle somme totali o parziali dei primi n numeri di Fibonacci, si prevede qualche possibile applicazione nello studio della teoria di stringa effettuata dal Nardelli insieme al gruppo Eratostene di Caltanissetta, dopo la scoperta che il numero delle vibrazioni delle stringhe sembra essere collegato alla serie di Fibonacci ed ai numeri primi, in particolare ai numeri primi "naturali"

(particolare sottoinsieme dei numeri primi matematici noti), anche questi collegati alla serie di Fibonacci.
Esistono infatti delle precise relazioni fisico-matematiche tra stringhe, numeri di Fibonacci (che si trovano, come è noto, in parecchi fenomeni naturali) e numeri primi "naturali", già individuati sia nelle vibrazioni delle stringhe, sia nei cosiddetti numeri magici della stabilità nucleare. Ricordiamo, infine, anche la funzione zeta ed i relativi zeri di Riemann, collegati agli intervalli tra i livelli energetici degli atomi, anch'essi collegati alle stringhe, e forse, anche ai numeri magici della stabilità nucleare di alcuni elementi chimici più stabili, tipo ferro, piombo, ecc…

Nota 1.

Vogliamo, per maggiore completezza, riportare la formula di Binet per il calcolo diretto del n-esimo numero di Fibonacci Fib(n). La caratteristica principale della sequenza di Fibonacci sta nel fatto che essa è definita in maniera ricorsiva, ovvero per trovare un numero della serie, è necessario conoscere tutti quelli precedenti. È però possibile, in realtà, trovare una formula analitica per i numeri di Fibonacci, cioè una formula che permetta di calcolare direttamente l'n-esimo termine della sequenza anche senza conoscere i precedenti. Tale formula è passata alla storia con il nome di Formula di Binet:

$$\mathrm{Fib}(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (1.6)$$

È davvero sorprendente constatare che una formula di questo genere, contenente addirittura termini irrazionali, possa fornire al variare di n solo numeri naturali. Eppure è così: svolgendo i calcoli si scopre che tutte le radici si eliminano, e la frazione si semplifica fino a fornire esattamente il numero di Fibonacci corrispondente al valore di n. Infine, è interessante notare che il valore $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ che compare nella formula, corrisponde alla nota "sezione aurea", cioè il numero a cui tende il rapporto fra due numeri di Fibonacci consecutivi: 1,6180339.
Difatti, per esempio, per n = 4, avremo:

6,854100462 – 0,14589795 / 2,236067977 = 3. Per n = 7, avremo:

29,0344307 – 0,034441819 / 2,236067977 = 13. E per n = 9, avremo:

76,01311808 – 0,0131556 / 2,236067977 = 34.

Notiamo immediatamente come questi sono rispettivamente il quarto, il settimo ed il nono termine della sequenza di Fibonacci.

2. <u>Possibili relazioni matematiche tra teoria di stringa e serie di Fibonacci</u>.

Nardelli ha provato a paragonare le frequenze emesse da una stringa alle frequenze emesse dalle note musicali. Ad ogni nota è cioè assegnata una ben determinata frequenza. Ogni frequenza è, a sua volta, associata a dei ben determinati numeri primi. Le frequenze che vanno dal Do naturale al Si naturale sono:
262Hz, 294Hz, 330Hz, 349Hz, 392Hz, 440Hz e 494Hz. Scomponendo in fattori, i numeri primi che costituiscono tali frequenze sono: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 131 e 349.

Come è logico, anche questi numeri possono corrispondere a delle determinate frequenze. Adesso, proviamo a dividere tutte le frequenze che vanno dal Do naturale al Si naturale, precisamente 262, 277, 294, 311, 330, 349, 370, 392, 415, 440, 466 e 494, quindi anche i semitoni, per 2, per 4 e per 8, ottenendo così tutte le frequenze corrispondenti alla tastiera di un pianoforte. Scomponendo in fattori, la serie dei numeri primi che formano tutte le frequenze così ricavate è:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31, 37, 47, 59, 83, 131, 139 e 233. Di tali numeri il 2 si ripete trenta volte, il 3 undici volte, il 5 nove volte, il 7 dodici volte, l'11 otto volte, il 13 otto volte, il 31 tre volte ed il 37 tre volte. Mettendo in grafico la serie dei numeri ed il numero di volte che esso si ripete, otteniamo una curva che mostra la casualità insita nelle forme frattali. D'altronde anche il fisico A. Palumbo ha notato che la gradita ripetitività dei temi di un brano musicale, riproposta in tonalità diverse, risiede nel rispetto dei principi della geometria frattale. Quindi, le stringhe la cui vibrazione è dell'ordine di 10-100 Hz, quindi di energia pari a 10^{-12}, 10^{-13}eV, possono essere correlate all'andamento che rispecchia la casualità dei numeri primi, quindi ad un andamento frattale. L'esempio stringhe → note può essere benissimo esteso alle altre frequenze e quindi anche a quelle stringhe di energia pari a quella corrispondente ad un bosone o ad un fermione.
Calcolando i rapporti tra le successive frequenze di vibrazione delle stringhe, si nota facilmente che esse coincidono quasi perfettamente con le radici 2^n-esime del numero 1,6180339 , cioè la nota "sezione aurea" della serie di Fibonacci. Infatti, calcolando tali radici, otteniamo i seguenti valori, che per semplicità indicheremo con le lettere a, b, c:

$$\sqrt{1{,}618033} = 1{,}272019... = a, \quad \sqrt[4]{1{,}618033} = 1{,}127838... = b, \quad \sqrt[8]{1{,}618033} = 1{,}061997... = c.$$

Le successive radici non hanno rilevanza, bastano infatti le prime tre sopra calcolate, e qualche media aritmetica tra due di esse, molto vicina al valore di qualche rapporto tra una frequenza ed una delle precedenti indicate dal Nardelli.
Le dodici frequenze indicate, precedentemente, sono:

262 , 277, 294, 311, 330, 349, 370, 392, 415, 440, 466, 494.

I rapporti effettivi tra una di loro ed una delle precedenti è molto vicina ad uno dei numeri a, b e c come 2^n-esime radici del numero 1,618033, o alla media aritmetica tra a e b. Infatti: $(a+b)/2 = 1{,}1999285$. Avremo, quindi:

277/262 = 1,05725 = circa c; 294/277 = 1,06137 = circa c;
294/262 = 1,12213 = circa b; 311/262 = 1,18702 = circa media tra a e b;
311/277 = 1,12274 = circa b; 311/294 = 1,05782 = circa c;
330/262 = 1,25954 = circa a; 330/277 = 1,19133 = circa media tra a e b;
330/294 = 1,12244 = circa b; 330/311 = 1,06109 = circa c;
349/262 = 1,33206 = circa a; 349/277 = 1,25992 = circa a;
349/294 = 1,18707 = circa media tra a e b; 349/311 = 1,12218 = circa b;
349/330 = 1,05757 = circa c;

e così via, fino all'ultimo numero 494, che ha rapporti simili con tutti i numeri precedenti a partire da 392:

494/392 = 1,26020 = circa a; 494/415 = 1,19036 = circa media tra a e b;
494/440 = 1,12272 = circa b; 494/466 = 1,06008 = circa c.

Per i rapporti tra 494 ed i primi numeri della serie delle frequenze, il valore ottenuto è maggiore del numero 1,618033. Per esempio: 494/262 = 1,885496. Ma se prendiamo il numero aureo 1,618033 e lo moltiplichiamo per b, avremo:
$1{,}618033 \times 1{,}127838 = 1{,}824879$, vicino al rapporto reale 1,885496 , ancor meglio se approssimato alla seconda cifra decimale: $1{,}82 \approx 1{,}88$.
La stessa cosa succede con i numeri di Fibonacci. Il rapporto tra un numero di Fibonacci e la semidifferenza, per es. il rapporto tra 89 e 72 (semidifferenza tra 89 e 55, in quanto: 89 – 55 = 34; 34 / 2 = 17 e 89 – 17 = 72) è di 1,2361 , cioè circa il numero "a" = 1,272019 , proprio come con i semitoni. Questo potrebbe essere importante per ulteriori ricerche sull'argomento delle relazioni tra teoria di stringa e serie di Fibonacci, e anche tra teoria di stringa e numeri primi naturali.
Dalla serie delle frequenze, compresi i semitoni, il Nardelli ricava la serie di numeri primi:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31, 37, 47, 59, 83, 131, 139 e 233

che sembrano essere associati a vibrazioni di stringhe. Anche quelli che vengono chiamati numeri primi "naturali", perché spuntano fuori anche in altri fenomeni naturali, come la stabilità nucleare, sono legati alla serie di Fibonacci, in modo diverso dai rapporti tra le frequenze oggetto di questo capitolo, ma comunque strettamente legati ai numeri di Fibonacci, confermando i nostri sospetti e calcoli sul possibile legame tra vibrazioni delle stringhe, numeri primi (e quindi funzione zeta di Riemann) e serie di Fibonacci (e quindi anche frattali e caos quantistico).
Stabilito con i suddetti esempi che il rapporto tra una frequenza qualsiasi e una delle frequenze inferiori è vicinissimo ad una radice 2^n-esima (con n = 2, 4 e 8) del numero 1,618033 , quindi alla sezione aurea, (che potrebbe essere definita anche come una nuova "costante di stringa") occorre vedere il significato fisico della relazione matematica così venuta fuori tra 2^n, le radici 2^n-esime della suddetta sezione aurea, i numeri primi e i numeri di Fibonacci, che ricompaiono poi anche nei numeri primi naturali, i quali coincidono con molti dei numeri primi ricavati dal Nardelli. In questo possibile significato fisico, potrebbe benissimo essere coinvolta la funzione zeta di Riemann, con la nota somiglianza tra gli intervalli tra gli zeri di questa funzione (basati sui numeri primi matematici, di forma $P = 6n \pm 1$ tranne il 2 ed il 3) ed i livelli energetici degli atomi, come conseguenza delle vibrazioni delle stringhe connesse ai numeri primi ottenuti dal Nardelli, (che sono stati identificati con i numeri primi naturali presenti anche in altri fenomeni naturali) collegabili alla funzione zeta di Riemann e ad alcune soluzioni di equazioni di teoria di stringa come è stato evidenziato nei lavori "New mathematical connections concerning string theory I e II" e in "Teoremi sulle coppie di Goldbach e le coppie di numeri primi gemelli: connessioni tra funzione zeta di Riemann, Numeri Primi e Teoria di Stringa".
Concludendo, oltre che ai problemi additivi di tipo Goldbach invocati dal Nardelli, le stringhe e le loro vibrazioni sembrano essere collegate anche alla serie di Fibonacci, tramite il numero aureo, oltre che ai numeri primi naturali collegati anch'essi ai numeri di Fibonacci. I nostri sospetti sulla relazione fisico-matematica tra stringhe, numeri primi e numeri di Fibonacci si dimostrano quindi fondatissimi.

3. Possibile relazione tra vibrazioni delle stringhe e numeri primi.

La concordanza tra gli intervalli dei livelli energetici degli atomi e gli zeri della funzione zeta di Riemann, ci ha fatto formulare l'ipotesi su una possibile relazione fisico-matematica tra i numeri primi, che sono alla base della suddetta funzione zeta e le vibrazioni delle stringhe, anch'esse basate sui numeri primi, e che determinano la formazione delle particelle e quindi degli atomi attraverso la sequenza:

stringhe→ quark→ particelle→ atomi→ livelli energetici.

Cosicché, ad un certo punto, i livelli energetici degli atomi ed i relativi intervalli, si trovano di fronte, come in uno specchio, gli zeri della funzione zeta di Riemann e i relativi intervalli. Così ci chiediamo, pur non essendo ancora dimostrata l'ipotesi di Riemann (e cioè perché tutti gli zeri sono sulla retta reale 1/2), se un indizio fisico (gli intervalli energetici degli atomi, collegati alle vibrazioni delle stringhe, a loro volta correlate ai numeri primi come vedremo più avanti) possa confermare un indizio matematico (gli zeri della funzione zeta), e quindi l'ipotesi di Riemann, che collegherebbe i due fenomeni (livelli energetici e zeri di Riemann) attraverso due processi: uno fisico che parte dai numeri primi correlati alle vibrazioni delle stringhe ed arriva agli intervalli tra i livelli energetici degli atomi, ed uno matematico che anche parte dai numeri primi ed arriva, tramite la funzione zeta, agli intervalli tra gli zeri, molto simili e speculari agli intervalli tra i livelli energetici del processo fisico precedente. Dalle vibrazioni delle stringhe e da un altro fenomeno fisico, quale la stabilità nucleare, è possibile dedurre l'esistenza dei numeri primi "naturali", sottoinsieme dei numeri primi aritmetici e di forma

$$P_n = 6 \times f \pm 1 \quad (3.1)$$

dove f è la serie dei numeri di Fibonacci, presente anche nei cosiddetti "numeri magici" M della stabilità nucleare, mentre i normali ed infiniti numeri primi aritmetici noti sono di forma:

$$P = 6 \times n \pm 1 \quad (3.2)$$

(tranne i soli numeri primi 2 e 3) dove n è la serie dei numeri naturali.
In seguito vedremo di confrontare i livelli energetici degli atomi più stabili (e presumibilmente collegati in qualche modo ai numeri primi naturali delle vibrazioni delle stringhe) con gli zeri calcolati con la sola serie dei primi naturali anziché con tutti i numeri primi aritmetici: si dovrebbe notare, se la nostra ipotesi di lavoro è giusta, (e cioè con i numeri primi naturali coinvolti in entrambi i processi al posto dei numeri primi normali) una maggiore correlazione tra gli intervalli energetici degli atomi più stabili e gli zeri di Riemann calcolati con i soli numeri primi naturali. Se si notasse questa maggiore concordanza, ciò sarebbe un forte indizio della nostra ipotesi di lavoro, e quindi del coinvolgimento dei numeri primi aritmetici in generale e dei numeri primi naturali, anche a livello di vibrazioni delle stringhe oltre a quello dei livelli energetici degli atomi e dei loro intervalli. E poiché le stringhe e la relativa teoria è coinvolta nelle Teorie di Grande Unificazione (GUT) delle quattro forze fondamentali, anche queste, di conseguenza, potrebbero essere correlate ai numeri primi aritmetici ed a quelli naturali, in particolare se la nostra ipotesi si dimostrasse esatta dopo i confronti sopra suggeriti.
In sintesi il processo fisico è il seguente:

1) Stringhe→ 2) Vibrazioni (collegate ai numeri primi naturali)→ 3) Quark→ 4) Particelle elementari→ 5) Atomi di materia (e di anti-materia)→ 6) Livelli energetici degli atomi→ 7) Stabilità nucleare di alcuni atomi (anche questo fenomeno legato ai numeri primi naturali)→ 8) Intervalli tra i livelli energetici→ 9) Intervalli tra i livelli energetici degli elementi più stabili.

Mentre in sintesi, il processo matematico è:

1) Numeri primi aritmetici (Teorema n.1: $P = 6n \pm 1$) sostituibili con i numeri primi naturali: ($P = 6f \pm 1$)→ 2) Funzione zeta e Ipotesi di Riemann→ 3) Zeri di Riemann (sostituibili con gli zeri calcolati con i numeri primi naturali anziché con quelli aritmetici)→ 4) Intervalli tra gli zeri di Riemann→ 5) Intervalli tra gli zeri di Riemann ricalcolati con i numeri primi naturali.

Ora si trovano di fronte, gli intervalli tra i livelli energetici di cui al punto 8 del processo fisico e gli intervalli tra gli zeri di cui al punto 4 del processo matematico, ma anche gli intervalli tra i livelli

energetici di cui al punto 9 e gli zeri ricalcolati di cui al punto 5 dei rispettivi processi. Se quest'ultimo confronto, basato sul coinvolgimento dei numeri primi naturali, è più aderente e coerente del precedente, basato invece sul coinvolgimento dei numeri primi aritmetici, allora la nostra ipotesi di lavoro può ritenersi fondata, come caso particolare della nota Ipotesi di Riemann, dove si confrontavano i livelli energetici di tutti gli atomi con gli zeri della funzione zeta calcolati con tutti i numeri primi.
Abbiamo, inoltre, la possibile sequenza del processo fisico:

Numeri primi naturali→ Numeri magici→ Stabilità→ Massa→ Energia→ Livelli energetici→ Intervalli tra livelli energetici;

speculare alla analoga sequenza del processo matematico:

Numeri primi naturali→ Zeri calcolati con i numeri primi naturali→ Intervalli tra tali zeri, che possono essere definiti "zeri naturali".

Questa nostra ipotesi di lavoro comporta ovviamente la verità dell'Ipotesi di Riemann, com'è noto però ancora non dimostrata, ma che potrebbe avere qualche valido indizio positivo anche dalla verifica fisica (livelli energetici degli atomi più stabili e quindi vibrazioni delle stringhe, correlati ai numeri primi naturali) e matematica (zeri naturali e relativi intervalli più aderenti agli intervalli dei livelli energetici degli elementi più stabili e quindi alle relative vibrazioni delle stringhe) della nostra ipotesi. I numeri primi naturali, infine, potrebbero essere coinvolti anche in tutti i fenomeni naturali collegati a numeri particolari, quali i numeri di Fibonacci, come vedremo con qualche esempio nel prossimo capitolo dedicato ai numeri primi naturali.

4. I numeri primi naturali (nelle stringhe e nella stabilità nucleare).

Oltre ai ben noti numeri primi aritmetici (di forma generale $P_n = 6n \pm 1$) nel corso delle nostre ricerche tra teorie fisiche e numeri, abbiamo sospettato l'esistenza di numeri primi particolari alla base di alcuni fenomeni, limitati al mondo microscopico dei nuclei atomici e delle stringhe. In questo capitolo formalizziamo meglio il concetto di tali numeri primi naturali, che sono un sottoinsieme dei numeri primi aritmetici, solo quando il coefficiente n nella forma generale $P_n = 6n \pm 1$ è anche un numero f della serie di Fibonacci; quindi i numeri primi naturali P_f sono della forma:

$$P_f = 6 \cdot f \pm 1 \quad (4.1)$$

Questi numeri primi naturali sono alla base di quei numeri che chiamiamo "fenomenici", F, cioè quei numeri che indicano le sequenze numeriche associate a qualche fenomeno fisico, per esempio i cosiddetti numeri magici della stabilità nucleare. Come vedremo, la differenza tra numeri primi naturali e numeri fenomenici F è solo una piccola discrepanza "d" di pochissime unità, la quale, a volte, come nel caso dei numeri primi fenomenici associati alle vibrazioni delle stringhe, può mancare (d = 0) e quindi numeri primi naturali e numeri fenomenici F coincidono: $P_f = F$. In generale, però, si ha: $F = P_f \pm d = 6f \pm 1 \pm d$.
Quindi, Galileo aveva ben ragione quando affermava che "l'universo è scritto con caratteri matematici", e quindi anche e soprattutto con numeri.
Noi perfezioniamo tale fondato pensiero, dicendo che l'universo è "scritto" anche con i numeri primi, in particolare con i numeri primi naturali, strutturati sui numeri f della serie di Fibonacci; e che nel macrocosmo visibile sono alla base di molti fenomeni, dalle forme a spirale di alcuni fiori,

delle conchiglie, delle pigne e delle galassie, fino alle orbite dei pianeti. Ma qui consideriamo i fenomeni microscopici della stabilità nucleare e delle vibrazioni delle stringhe.
Dopo aver costruito con una tabella i numeri primi naturali (coefficiente f) all'interno dei numeri primi aritmetici (coefficiente n) in base alla comune formula:

$$P_f = 6f \pm 1 \quad \text{e} \quad P_n = 6n \pm 1, \; (4.2)$$

confronteremo insieme i numeri primi naturali delle loro tabelle con la tabella dei numeri fenomenici e scopriremo che essi coincidono tutti, con eventuali piccolissime discrepanze d, del tutto assenti nei numeri primi naturali associati alle vibrazioni delle stringhe.

Tabella 1.

Numeri magici M della stabilità nucleare. Ricordiamo che si osservano per i nuclei alcune regolarità analoghe a quelle che si presentano nella tavola periodica degli elementi e queste vengono descritte mediante i cosiddetti numeri magici: 2, 6, 8, 14, 20, 28, 50, 82, 126. I nuclei con un numero magico di protoni e di neutroni si distinguono dagli altri per diverse proprietà (elevate energie di legame, piccoli momenti di quadripolo elettrico, ecc…); quelli con numero magico di protoni possiedono inoltre numerosi isotopi stabili, mentre quelli con numero magico di neutroni hanno numerosi isotoni (nuclei atomici aventi ugual numero di neutroni, ma numero diverso di protoni).

Numeri magici M (F = M)	Numeri P più vicini (P_n)	Coeff. di Fibonacci	Discrepanza (M - P_n)
$2 = 6\times 0 + 1 + 1$	$1 = 6\times 0 + 1$	0	1
$8 = 6\times 1 + 1 + 1$	$7 = 6\times 1 + 1$	1	1
$20 = 6\times 3 + 1 + 1$	$19 = 6\times 3 + 1$	3	1
$28 = 6\times 5 - 1 - 1$	$29 = 6\times 5 - 1$	5	-1
$50 = 6\times 8 + 1 + 1$	$47 = 6\times 8 - 1$	8	3
$82 = 6\times 13 + 4$	$83 = 6\times 14 - 1$	$14 \cong 13 + 1$	-1
	$83 = 6\times 13 + 5$	13	-1
$114 = 6\times 19 + 0$	$113 = 6\times 19 - 1$	$19 = 21 - 2$	1
$126 = 6\times 21 + 0$	$127 = 6\times 21 + 1$	21	-1
$184 = 6\times 30 + 4$	$181 = 6\times 30 + 1$	$30 = 34 - 4$	3
$298 = 6\times 50 - 2$	$293 = 6\times 50 - 7$	$50 = 55 - 5$	5

Nota.
In questo caso esiste una piccola ma poco importante discrepanza anche tra i coefficienti di Fibonacci 14 = 13 + 1; 19 = 21 – 2; 30 = 34 – 4; 50 = 55 – 5.
Notiamo inoltre che i numeri 114, 184 e 298 sono numeri magici composti. Infatti abbiamo:
114 = 82 + 28 + 2 + 2; 184 = 126 + 50 + 8; 298 = 184 + 114.

Tabella 2.

Numeri S di vibrazione delle stringhe (serie di numeri primi ottenuti dalle frequenze delle note musicali compresi i semitoni. Vedi pag. 7 cap.2). In questo caso i numeri fenomenici F corrispondono ai numeri S, quindi F = S.
Ricordiamo che la serie di Fibonacci è data dai numeri: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,… e che i numeri 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31, 37, 47, 59, 83, 131, 139 e 233 sono numeri primi.

F = S (numeri fenomenici)	Numeri primi P_n più vicini	Coefficienti f di Fibonacci	Discrepanza ($d = S - P_n$)
$2 = 6\times 0 + 1 + 1$	$1 = 6\times 0 + 1$; 2	0	1; 0
$3 = 6\times 0 + 1 + 2$	$1 = 6\times 0 + 1$; 3	0	2 ; 0
$5 = 6\times 1 - 1$	$5 = 6\times 1 - 1$	1	0
$7 = 6\times 1 + 1$	$7 = 6\times 1 + 1$	1	0
$11 = 6\times 2 - 1$	$11 = 6\times 2 - 1$	2	0
$13 = 6\times 2 + 1$	$13 = 6\times 2 + 1$	2	0
$19 = 6\times 3 + 1$	$19 = 6\times 3 + 1$	3	0
$31 = 6\times 5 + 1$	$31 = 6\times 5 + 1$	5	0
$37 = 6\times 6 + 1$	$37 = 6\times 6 + 1$	$6 = 5 + 1$	0
$47 = 6\times 8 - 1$	$47 = 6\times 8 - 1$	8	0
$59 = 6\times 10 - 1$	$59 = 6\times 10 - 1$	$10 = 13 - 3 = 8 + 2$	0
$83 = 6\times 14 - 1$	$83 = 6\times 14 - 1$	$14 = 13 + 1$	0
$131 = 6\times 22 - 1$	$131 = 6\times 22 - 1$	$22 = 21 + 1$	0
$139 = 6\times 23 + 1$	$139 = 6\times 23 + 1$	$23 = 21 + 2$	0
$233 = 6\times 39 - 1$	$233 = 6\times 39 - 1$	$39 = 34 + 5$	0

Tabella 3

Numeri primi naturali P_n costruiti con la formula $P_n = 6 \times f \pm 1$.
Evidenziamo che i numeri primi naturali così costruiti ed associati alla serie di Fibonacci, fino al numero 987 sono: 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 47, 79, 127, 331, 863, 1399, 3659 e 5923.

f	$6f \pm 1$	$6f - 1$	$6f + 1$
0	$6 \times 0 \pm 1$	-1	$+1$
1	$6 \times 1 \pm 1$	5	7
1	$6 \times 1 \pm 1$	5	7
2	$6 \times 2 \pm 1$	11	13
3	$6 \times 3 \pm 1$	17	19
5	$6 \times 5 \pm 1$	29	31
8	$6 \times 8 \pm 1$	47	$(49 = 7 \times 7)$
13	$6 \times 13 \pm 1$	$(77 = 7 \times 11)$	79
21	$6 \times 21 \pm 1$	$(125 = 5 \times 5 \times 5)$	127
34	$6 \times 34 \pm 1$	$(203 = 7 \times 29)$	$(205 = 5 \times 41)$
55	$6 \times 55 \pm 1$	$(329 = 7 \times 47)$	331
89	$6 \times 89 \pm 1$	$(533 = 13 \times 41)$	$(535 = 5 \times 107)$
144	$6 \times 144 \pm 1$	863	$(865 = 5 \times 173)$
233	$6 \times 233 \pm 1$	$(1397 = 11 \times 127)$	1399
377	$6 \times 377 \pm 1$	$(2261 = 7 \times 17 \times 19)$	$(2263 = 31 \times 73)$
610	$6 \times 610 \pm 1$	3659	$(3661 = 7 \times 523)$
987	$6 \times 987 \pm 1$	$(5921 = 31 \times 191)$	5923

È evidente che tutti i numeri primi naturali P_f coinvolti nei fenomeni S ed M, hanno come coefficienti f i numeri di Fibonacci confermando la nostra ipotesi iniziale di numeri naturali basati sui numeri di Fibonacci. La sola differenza è che nei numeri primi aritmetici $P_n = 6n \pm 1$, n è la serie dei numeri naturali, mentre per i numeri primi naturali $P_f = 6f \pm 1$, f è la serie di Fibonacci.

Conclusione.

Pur essendo i numeri primi naturali P_f potenzialmente infiniti, poiché la serie f dei numeri di Fibonacci è anch'essa infinita, i numeri primi naturali reali si fermano dopo un valore di 233 per le vibrazioni S delle stringhe e 293 per i numeri magici M correlati alla stabilità nucleare. Questo perché il massimo numero magico, 298, riflette in qualche modo il numero massimo possibile consentito dalla Tavola periodica degli elementi chimici, e corrisponde all'elemento più pesante e

più stabile: il piombo. Lo stesso si può affermare per le stringhe, poiché le loro vibrazioni si ripercuotono con un meccanismo "a cascata" dalle stringhe, ai quark, agli adroni e, infine, agli atomi. Quindi, notiamo come in entrambi i casi si finisce sempre nella Tavola periodica degli elementi chimici. Per quanto riguarda le stringhe, l'ipotesi di Riemann e la sua funzione zeta, è possibile che per gli elementi più stabili (e quindi con i numeri magici M) vi siano livelli energetici L collegabili anch'essi ai numeri primi naturali P_f, in modo da collegare anche i livelli energetici (ed i relativi intervalli) ai numeri primi naturali e quindi agli zeri della funzione zeta di Riemann.
Se anche i livelli energetici degli elementi più stabili (con numeri magici M) sono collegabili in qualche modo ai numeri primi naturali P_f ed agli zeri della funzione zeta, l'ipotesi di Riemann avrebbe qualche indizio positivo in più e quindi una maggiore probabilità di risultare vera.
Infine, il coinvolgimento dei numeri primi e dei coefficienti di Fibonacci (già presenti in natura in molti fenomeni), potrebbe dare maggiore stabilità e regolarità a diversi fenomeni fisici, oltre a quelli relativi alle stringhe ed alla stabilità nucleare: per esempio, i sopra accennati livelli energetici degli atomi, collegabili numericamente alle vibrazioni delle stringhe e quindi conseguenza di queste ultime.

Numeri primi naturali e funzione zeta.

Così come dai numeri naturali, coinvolti nelle vibrazioni delle stringhe (numeri S), si "discende" verso i livelli energetici, specialmente quelli degli atomi più stabili (con numeri magici M), dal "basso" (numeri primi aritmetici) si potrebbe risalire agli zeri di Riemann con la funzione zeta.
Questo potrebbe essere fatto ricalcolando gli zeri della funzione zeta usando i numeri primi naturali al posto dei numeri primi aritmetici, quindi con la variante della funzione zeta:

$\zeta(s) = \Pi \dfrac{1}{1 - P_{f_j}^{-s}}$, (4.3) anziché quella classica $\zeta(s) = \Pi \dfrac{1}{1 - P_j^{-s}}$. (4.4)

Avremo, quindi, un'altra serie di zeri calcolata con i numeri primi naturali P_f, dove f è il coefficiente di Fibonacci. Inoltre, la distanza media (intervalli) tra gli zeri così calcolati, sarà leggermente superiore a quella tra gli zeri classici della funzione zeta classica.
Questi nuovi zeri, che possono essere chiamati "zeri di Fibonacci", sarebbero collegati agli zeri classici corrispondenti ai livelli energetici degli elementi chimici più stabili (correlati ai numeri primi naturali relativi ai numeri magici M). In altre parole, ci potrebbe essere una qualche concordanza tra livelli energetici degli elementi più stabili, con gli zeri di Fibonacci calcolati con la nostra variante della funzione zeta classica. D'altronde, gli intervalli tra i livelli energetici di tutti gli elementi chimici sono molto simili agli intervalli tra gli zeri calcolati con tutti i numeri primi, e tali intervalli sembrano dipendere dai piccoli intervalli tra i numeri primi, regolati dai Teoremi di Bombieri, Goldston, Yldirim e ultime loro varianti, che suggeriscono fortemente la fondatezza della congettura dei numeri primi gemelli (infinità delle loro coppie). E anche su questo possiamo dire qualcosa con la nostra dimostrazione della congettura di Chen, generalizzazione della congettura sui numeri primi gemelli, secondo le quali anche ogni altro numero pari $p > 2$ è infinite volte la differenza tra due numeri primi, così come 2 lo è per i primi gemelli.
Il Prof. A. Languasco dell'Università degli Studi di Padova, in un suo articolo: "Ci sono piccoli intervalli tra i numeri primi consecutivi", afferma che è molto difficile trovare questi intervalli. Con la nostra dimostrazione della congettura di Chen, evidenziamo che questo è possibile, basandoci sia sulla nostra dimostrazione della congettura di Goldbach (incentrata su una tavola di addizione dei numeri primi), sia su una tavola di sottrazione dei numeri primi. Il risultato è che le differenze

possibili (tutti i numeri pari, anche i più piccoli come 2, 4 e 6) sono infinite volte la differenza tra due numeri primi, nella misura di circa:

$$P \approx \frac{P}{\log(P)^2}, \quad (4.5)$$

(formula valida teoricamente sia per le coppie di Goldbach che per le coppie di gemelli) dove P è un qualsiasi numero pari. Infine, questa formula può essere corretta con il numero c = 1,08366 (vedi "Metodo" n. 21 – Giugno 2005) e fornisce così risultati più precisi della ( ) sul numero delle G coppie di Goldbach per $N = 10^n$, e delle g coppie di gemelli fino a $N = 10^n$. Avremo quindi:

$$G \cong \frac{10^n}{4n^2 \cdot c^3}; \quad (4.6) \qquad\qquad g \cong \frac{10^n}{4n^2} \cdot c. \quad (4.7)$$

Questa dimostrazione conferma i suddetti teoremi sui piccoli intervalli (Goldston, ecc…) e quindi potrebbe essere utilissima nello studio degli intervalli tra i livelli energetici e gli zeri della funzione zeta. E, concludendo, essa potrebbe essere il nostro secondo contributo, insieme al concetto di numeri primi naturali P_f , descritto precedentemente, agli attuali e futuri studi sulla possibile relazione tra stringhe e funzione zeta, e, più in generale, tra stringhe ed Ipotesi di Riemann, in particolare a quelli attuati dal Nardelli.

5. Teoremi sulle partizioni p(n) e sulle relazioni con i numeri primi ed i numeri di Fibonacci.

Com'è noto, le partizioni di un numero n sono tutte le p(n) possibilità di dividere n oggetti o un numero n in gruppi distinti, la cui somma totale sia sempre n.
Per esempio, per n = 5 , abbiamo 7 partizioni (quindi p(5) = 7):
1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5;
2 + 1 + 1 + 1 = 5;
2 + 2 + 1 = 5;
3 + 1 + 1 = 5;
3 + 2 = 5;
4 + 1 = 5;
5 = 5

I numeri di partizioni p(n), per i numeri interi n che vanno da 1 a 15 sono:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Come si vede, il numero delle partizioni p(n) cresce rapidamente al crescere di n , per cui, per esempio, per n = 200 si hanno: p(n) = p(200) = 3.972.999.029.038 partizioni.
La formula, dovuta al grande matematico indiano S. Ramanujan:

$$p(n)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{1\le k\le N}\sqrt{k}\left(\sum_{h \bmod k}\omega_{h,k}e^{-2\pi i\frac{hn}{k}}\right)\frac{d}{dn}\left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{k}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-1}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right)+O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right),\quad (5.1)$$

o la sua variante: $p(n)\approx\frac{e^{\left(\pi\sqrt{2n/3}\right)}}{4n\sqrt{3}}$ per $n\to\infty$, (5.2)

fornisce il numero quasi esatto di p(n) per ogni n. Difatti, per esempio, per n = 11, avremo:

$p(11)\approx\frac{2{,}7^{\left(3{,}14\sqrt{2\cdot 11/3}\right)}}{4\cdot 11\sqrt{3}}\approx\frac{2{,}7^{8{,}4}}{44\cdot 1{,}7}\approx\frac{4201{,}99}{74{,}8}\approx 56{,}1\cong 56$. Per n = 12, avremo:

$p(12)\approx\frac{2{,}7^{\left(3{,}14\sqrt{2\cdot 12/3}\right)}}{4\cdot 12\sqrt{3}}\approx\frac{2{,}7^{8{,}8}}{48\cdot 1{,}7}\approx\frac{6251{,}74}{81{,}6}\approx 76{,}61\cong 77$.

In seguito è stata scoperta un'ulteriore variante di tale formula che fornisce una risposta rigorosamente esatta.
Il problema delle partizioni era una specialità, insieme ai numeri primi, del giovane matematico indiano S. Ramanujan, al quale è dedicato questo capitolo. Noi cercheremo di affrontare il problema delle partizioni sia dal punto di vista geometrico, che dal punto di vista aritmetico, esplorando eventuali relazioni con il Teorema n. 1 sui numeri primi nella loro forma generale $P=6n\pm 1$, tranne il 2 ed il 3, e con i numeri di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,…, perché come questi numeri, anche una partizione p(n) potrebbe essere una somma di partizioni precedenti di numeri più piccoli.
Questa proprietà si verifica con i numeri di Fibonacci, infatti essa non è limitata ai due soli numeri precedenti, ma anche a quelli ancora più piccoli. Detto per inciso, qualsiasi numero di Fibonacci -1 è la somma di tutti i numeri precedenti, cioè:

2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3 = 1 + 1 + 3; 8 = 5 + 3 = 5 + 1 + 2;
13 = 8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 8 + 2 + 1 + 2; 21 = 13 + 8 = 13 + 3 + 5 = 13 + 1 + 2 + 5.

Accenniamo adesso alla relazione tra somme e prodotti, che si verifica, come vedremo, anche con i numeri magici M della maggiore stabilità nucleare di alcuni elementi chimici.

Es: 50 = 28 + 20 + 2 (tutti numeri magici)
20 = $2\cdot 8+2\cdot 2$ (tutti numeri magici)
28 = 20 + 8 (tutti numeri magici), ecc…

Per le partizioni p(n) a partire da n = 3 fino a n = 10, osserviamo cosa succede:

p(3) = p(2) + p(1) = 2 + 1 = 3 = p(3);
p(4) = p(3) + p(2) = 3 + 2 = 5 = p(4);

p(5) = p(4) + p(2) = 5 + 2 = 7 = p(5);
p(6) = p(4) + p(3) + p(2) + p(1) = 5 + 3 + 2 + 1 = 11 = p(6);
p(7) = p(5) + p(4) + p(3) = 7 + 5 + 3 = 15 = p(7);
p(8) = p(6) + p(5) + p(3) + p(1) = 11 + 7 + 3 + 1 = 22 = p(8);
p(9) = p(7) + p(5) + p(4) + p(3) = 15 + 7 + 5 + 3 = 30 = p(9);
p(10) = p(8) + p(6) + p(5) + p(2) = 22 + 11 + 7 + 2 = 42 = p(10).

Avremo cioè $p(n)$ come somma di alcuni $p(n_i)$ precedenti, con $n_i < n$. Questo riflette il fatto che anche n è somma di numeri precedenti. Per es:

3 = 1 + 2;   4 = 2 + 2 = 1 + 3;   5 = 1 + 4 = 2 + 3;   6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3…ecc

Consideriamo il rapporto $r = \frac{p(n)}{n}$. Calcolando i successivi rapporti tra gli p(n) per i relativi n, otteniamo la serie dei seguenti valori di r, naturalmente crescenti al crescere di p(n), che riportiamo nella tabella che segue.

$p(n)$	n	$r = \frac{p(n)}{n}$
1	1	1
2	2	1
3	3	1
5	4	1,25
7	5	1,40
11	6	1,83
15	7	2,14
22	8	2,75
30	9	3,33
42	10	4,20
56	11	5,09
77	12	6,41
101	13	7,76
135	14	9,64
176	15	11,73

Avremo, mettendo in grafico tali valori e precisamente $x = \frac{p(n)}{n}$ e $y = n$, una curva logaritmica regolare con $x = r$ e $y = n$, tali che $p(n) = n \cdot r$, per cui $r = x = \frac{p(n)}{n}$.

Per es. $14 \cdot 9{,}64 = 134{,}96 \cong 135 = p(14)$, ecc… Poiché r cresce al crescere di n, anche $n \cdot r = p(n)$ cresce al crescere di n.
Vediamo ora la relazione con i numeri di Fibonacci. Costruiamo una tabella con le colonne n, p(n), $\frac{p(n) \pm 1}{6}$ (numeri sesti), resti, numeri primi, numeri di Fibonacci e poi traiamo le conseguenze.

n	$p(n)$	$s = \frac{p(n) \pm 1}{6}$	resti $\left(p(n)/s\right)$	n. primi	n. Fibonacci
1	1	-	-	-	
2	2	-	-	-	
3	3	-	-	-	
4	5	1	0	1	1
5	7	1	0	1	1
6	11	2	1	2	2
7	15	2	1	2	2
8	22	3	1	3	3
9	30	5	0	5	5
10	42	7	0	7	7 (8 = 7 + 1)
11	56	9	2	-	-
12	77	13	12 = 11 + 1	13	13
13	101	17	16 = 7 + 9	17	17 ± 4=21;13
14	135	22	3	-	22 – 1 = 21
15	176	29	2	29	29 + 5 = 34

Come si vede facilmente, i numeri sesti $s = \frac{p(n) \pm 1}{6}$ sono quasi tutti numeri primi, (2, 3, 5, 7, 13, 17 e 29) o di Fibonacci (1, 2, 3, 5 e 13) o, insieme, primi e di Fibonacci (2, 3, 5 e 13) o molto vicini a numeri di Fibonacci (7, 9 e 22). Ma anche tra i numeri delle partizioni p(n) ci sono numeri primi (2, 3, 5, 7, 11 e 101), sebbene più rari, e di Fibonacci (1, 2, 3 e 5). È plausibile affermare che lo stesso andamento potrebbero avere i numeri p(n) successivi a 176, che, divisi per 6 o direttamente, daranno una serie di numeri tra i quali ci saranno altri numeri primi, di Fibonacci e misti. In tal caso, la nostra relazione tra partizioni p(n), il teorema n. 1 sui numeri primi $\left(P = 6n \pm 1\right)$, ma con n diverso da n di p(n), ed i numeri di Fibonacci, sarebbe dimostrata in misura maggiore dalla tabella precedente limitata ad n = 15 e quindi alle partizioni di 15, con p(15) = 176.
È noto che i numeri primi hanno un andamento logaritmico, come del resto anche i numeri di Fibonacci, tra i quali troviamo anche diversi numeri primi (detti numeri primi di Fibonacci). Anche le partizioni, si è notato, hanno un andamento logaritmico in quanto sono collegate sia ai numeri primi che ai numeri di Fibonacci tramite i numeri sesti (vedi tabella). Curve logaritmiche molto simili, quindi, per tutti e tre i tipi di numeri:

Concludendo, tutte e tre le curve logaritmiche tendono ad assomigliarsi su grande scala e ad avere qualche punto di contatto, in particolare P con F (ed è questo il caso in cui si hanno i numeri primi di Fibonacci), ma anche P con p(n).
Tutti e tre i tipi di numeri p(n), P ed F sembrano, inoltre, essere correlati anche con i numeri magici M della stabilità nucleare. Ciò si verifica soprattutto per i numeri magici 2, 8, 20 e 28 che sono correlati con buona approssimazione a p(n) = 2, 7, 22 e 30; P = 2, 7, 17 e 29 e F = 2, 8, 21 e 34.
Riguardo invece la fattorizzazione di un numero $N = p \cdot q$, questa può essere vista come un caso limite di partizione di N, $N = q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_p$, ossia N come somma di p volte q oppure di q volte p, con il caso particolare q = p = n da cui $N = p \cdot q = n \cdot n = n^2$.
Questo, ovviamente, per N numero primo non si verifica perché, in tal caso, N non ha fattori diversi da 1 e da N. Riguardo ad N numero dispari (e a volte anche primo), esso può essere somma di tre numeri primi (ipotesi di Goldbach debole) o di k primi con k dispari (estensione dell'ipotesi di Goldbach debole) e quindi può avere delle partizioni p(n), come per esempio:

p(5) = 7, p(11) = 56, p(13) = 101, ecc…

Quindi, il problema delle partizioni p(n) di un numero n, tanto caro al matematico S. Ramanujan, viene qui collegato, tramite i numeri sesti di p(n), ai numeri primi e ad i numeri di Fibonacci (e quindi alle vibrazioni delle stringhe, come vedremo nel seguito del lavoro), coinvolgendo anche i numeri magici M anche questi, a loro volta, collegati ai numeri primi e di Fibonacci.

Stati di energia discreta di un atomo, formule di Majorana e collegamenti con partizioni, primi e Fibonacci.

Bohr postulò che gli elettroni in un atomo hanno specifici livelli di energia nei quali possono stare, e quando saltano da un livello più alto ad un livello più basso emettono un fotone di energia pari alla differenza tra le energie necessarie a percorrere le due orbite. Il più basso livello di energia in cui può stare l'elettrone di un atomo si chiama stato fondamentale, e quando assorbe un fotone per muoversi ad un livello maggiore, questo si chiama stato eccitato. La legge matematica dei possibili livelli energetici di un atomo di idrogeno è:

$$E = \frac{-k \cdot q_e^2}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\frac{1}{n^2} \right), \quad (5.3)$$

dove k è una costante di proporzionalità, q_e è la carica elementare, a_0 è il raggio dell'atomo di idrogeno allo stato fondamentale ed n è il livello energetico, iniziando con 1 per lo stato fondamentale, e aumentando a 2, 3, 4, …
Perciò l'energia dello stato fondamentale di un atomo di idrogeno è:

$$E_0 = \frac{-k \cdot q_e^2}{2 \cdot a_0} \cdot \left(\frac{1}{1^2} \right) = -13{,}6 eV. \quad (5.4)$$

Sapendo questo è più semplice definire i livelli energetici come:

$E = \frac{E_0}{n^2}$, (5.5) e la differenza tra diversi livelli energetici come: $\Delta E = E_0 \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$, (5.6)

dove n_1 è il livello energetico iniziale ed n_2 quello finale. Vediamo adesso il calcolo per i livelli energetici iniziale e finale: $n_1 = 5$ ed $n_2 = 2$. L'energia di ogni livello è:

$$E_1 = \frac{E_0}{n_1^2} = -0{,}544 eV \qquad E_2 = \frac{E_0}{n_2^2} = -3{,}4 eV .$$

La differenza di energia tra i due livelli è:

$$\Delta E = E_0 \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) = -2{,}855 eV \text{ , oppure } \quad E_2 - E_1 = -2{,}855 eV .$$

Vediamo adesso i collegamenti con Fibonacci e le partizioni. Abbiamo:

$$\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 1{,}375} = \sqrt{\frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right]} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot c^4} = 0{,}586 .$$

Ricordiamo, infatti, che 1,375 è uguale a c^4 per c = 1.083. Il valore trovato 0,586 è molto vicino a quello dato 0,544.
Adesso:

$(1{,}375)^4 = 3{,}5744$; $\quad (c^4)^4 = 3{,}5744$, per cui:

$$\left[\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right]^4 = (c^4)^4 = 3{,}5744 ,$$

che è un valore molto vicino a quello dato 3,40.

La teoria di Majorana fornisce una formula che esprime la massa e l'energia delle varie particelle in funzione del loro spin j, facendo intervenire una sola costante assegnata m_0:

$$\frac{m_0}{j + \frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

Majorana si era posto fin da principio il problema di costruire una teoria lineare, relativisticamente invariante, nella quale tutti gli autovalori della massa fossero positivi. Quindi, una teoria relativisticamente invariante di particelle con spin arbitrario, sia intero che semintero.
Il punto di partenza della sua teoria è l'equazione differenziale lineare della forma di Dirac:

$$\left[\frac{w}{c}+\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\beta m_0 c\right]\psi=0 \qquad (5.8)$$

Poiché nell'originaria teoria dell'elettrone di Dirac, le masse negative hanno origine dal fatto che l'operatore β (una matrice) ha autovalori ± 1, Majorana si domanda se non sia possibile costruire una teoria lineare, relativisticamente invariante, nella quale gli autovalori di β sono tutti positivi. Egli nota quindi che una delle condizioni affinché l'equazione (5.8) risulti relativisticamente invariante è che sia tale anche la densità di Lagrangiana che figura nel principio variazionale da cui si deduce l'equazione (5.8) stessa:

$$\delta\int\psi^*\left[\frac{w}{c}+\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\beta m_0 c\right]\psi dvdt=0 \qquad (5.9)$$

Gli autovalori della matrice β, ad infinite dimensioni, trovati da Majorana, sono:

$$\frac{1}{j+\frac{1}{2}} \qquad (5.10)$$

dove j percorre tutti i valori di una delle due serie dei numeri interi o seminteri non negativi, quindi j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22,…., oppure j = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2, 11/2, 13/2, 15/2, 17/2, 19/2, 21/2, 23/2, 25/2, 27/2, 29/2, 31/2, 33/2, 35/2, 37/2, 39/2, 41/2, 43/2,….

Questo risultato comporta che gli autovalori dell'energia sono dati dall'equazione (5.7).

È importante evidenziare che gli autovalori sono collegati ai livelli quantistici d'energia nei nuclei degli atomi.

Adesso prendiamo la formula (5.10) e andiamo a sostituire a j tre valori: 31/2, 37/2 e 41/2.

Per j = 31/2, otteniamo:

$$\frac{1}{\frac{31}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{32}{2}}=\frac{1}{16}\cong 0{,}0625\,.$$

Ricordando il numero corrispondente alla sezione aurea, cioè 0,618033 , avremo

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)/10=0{,}0618033/10\cong 0{,}0618\,.$$

Infine, per il numero corrispondente al fattore medio di crescita delle partizioni, cioè 1,375, avremo:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 1{,}375\right)/10=0{,}06875=\left[\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]/10=0{,}06875\,.$$

Per j = 37/2 avremo 1/19 = 0,0526 correlato sia a $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)/12 = 0{,}0515$, che a $\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1{,}375}\right)/10 = 0{,}0586$.

Per j = 41/2 avremo, infine, 1/21 = 0,0476 correlato sia a $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)/13 = 0{,}0475$, che a $\left(\frac{1}{3}\cdot 1{,}375\right)/10 = 0{,}0458$.

Notiamo anzitutto come i numeri 31, 37 e 41 siano numeri primi e come i nove valori ottenuti siano ben correlati tra loro: 0,0625 – 0,0618 – 0,0687; 0,0526 – 0,0515 – 0,0586; 0,0476 – 0,0475 – 0,0458.
Come è facile notare, la formula (5.10) è correlata sia alle formule relative alla sezione ed al rapporto aureo, che al numero correlato al fattore medio di crescita delle partizioni. Quindi ancora una volta sembra esistere un collegamento tra livelli d'energia, serie di Fibonacci, numeri primi e partizioni.

Formule di Riemann e collegamento con Fibonacci. [8]

Prendiamo la seguente formula concernente la funzione zeta di Riemann:

$$\frac{1}{s}\log\zeta(s) = \int_0^\infty J(x)x^{-s-1}dx \text{ . (5.11)}$$

Con tale formula è possibile esprimere $\pi(x)$, cioè il numero di primi minori del numero reale x compreso, in termini di J(x). Ricordiamo che J(x) è una funzione "gradino" che ha il seguente valore:

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \frac{1}{5}\pi(\sqrt[5]{x}) + \ldots$$

Anche qui il simbolo π rappresenta la funzione "conteggio" dei numeri primi come definita prima, per ogni numero reale x.
Invertendo l'espressione, è possibile esprimere J(x) in termini della funzione zeta: di conseguenza è possibile esprimere $\pi(x)$ in termini della funzione zeta. Per s = 1, 2 il valore numerico di tale espressione è esattamente 1,434385276163 ed è uguale a $\frac{1}{s}\log\zeta(s)$.
La cosa interessante è che tale risultato è correlabile sia ai numeri di Fibonacci che alle partizioni. Infatti :

$$\left[\sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right] = \sqrt[4]{1{,}618033} + \frac{1}{2}\cdot 0{,}618033 = 1{,}127838 + 0{,}3090 = 1{,}4368 \quad (5.12)$$

che è un valore molto prossimo a quello fornito dalla formula (5.11).
Riguardo alle partizioni, crescendo queste con buona approssimazione con un fattore medio di circa 1,375 , avremo la seguente espressione:

$$\left[1,375+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)/10\right]=1,375+0,0618...=1,43...\quad (5.13),$$

ed anche questo è un valore molto prossimo a quello fornito dalla formula (5.11).

Da questo è possibile intravedere ulteriori correlazioni tra funzione zeta (e quindi numeri primi e zeri ad essa collegati), numeri di Fibonacci (precisamente la sezione aurea ed il rapporto aureo) e partizioni.

Esiste una regola per la spaziatura media degli zeri della funzione zeta ad altezza T nella striscia critica, ed essa è data dalla formula: $\dfrac{2\pi}{\log\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)}$. (5.14)

Se T = 20, la formula fornisce come risultato 5,4265725. Se proviamo ad inserirvi T = 21 (dove 21 è anche un numero di Fibonacci), il risultato sarà 5,20715… Si trova allora che per $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3+\sqrt{1,375}=5,408...$ e che per $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3+c^2=5,410...$, valori molto vicini a quelli dati dalla formula collegata alla funzione zeta. Inoltre, si trova che $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3+\sqrt[128]{1,375}=4,23580+1,00249=5,23829...$ e che $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3+\sqrt[128]{c}=4,23580+1,00062=5,23642...$, anche questi, valori molto vicini a quelli dati.

Infine, il matematico Andrew Odlyzko ha pubblicato un elenco di 10000 zeri nelle vicinanze di $\frac{1}{2}+1370919909931995308897i$ ed in quell'intorno, $\dfrac{2\pi}{\log\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)}$ vale circa 0,13416467. Tale valore è possibile ottenerlo con $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^9=0,1458971-0,013155428=0,132741672$, con $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4-\frac{1,375}{100}=0,1458971-0,01375=0,1321471$, e, infine, con $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4-\frac{c}{100}=0,1458971-0,0108366=0,1350344$. La media tra questi due valori, inoltre, è circa 0,134 cioè esattamente uguale al valore calcolato da Odlyzko. Da questi calcoli si può notare come il numero 1,08366 collegato ai numeri primi, il numero 1,375 che è il fattore medio delle partizioni ed i numeri 1,618033 e 0,618033 (rapporto aureo e sezione aurea) collegati ai numeri di Fibonacci, e i risultati delle relative formule in cui essi sono posti, sono ottimamente correlati ai risultati di una formula legata agli zeri della funzione zeta.

Andiamo adesso ad analizzare il risultato del matematico Littlewood del 1914: $Li(x)-\pi(x)$ è alternativamente positivo e negativo un numero infinito di volte. (Ricordiamo che $\pi(N)$ rappresenta il numero di primi minori o uguali a N) Ora, $\pi(x)$ è definito "termine di errore assoluto" e gli zeri non banali della funzione zeta sono collegati intimamente ad esso. Ci si chiede dov'è il primo punto di incrocio, la prima "violazione di Littlewood", in cui $\pi(x)$ diventa uguale ed in seguito maggiore di $Li(x)$? Nel 2000 i matematici Bays ed Hudson a partire dal teorema di Lehman, hanno mostrato che esistono violazioni di Littlewood in prossimità di $1{,}39822\times 10^{316}$, inoltre mostrano una vasta zona di violazione intorno a $1{,}617\times 10^{9608}$. Il valore 1,617 si nota facilmente che è molto prossimo a 1,618033 quindi a $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Riguardo l'altro, cioè 1,39822 sono stati effettuati i seguenti calcoli: $1{,}375+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8 = 1{,}375+0{,}021285963 = 1{,}396285964$. Inoltre, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8 + c^4 = 0{,}021285963+(1{,}08366)^4 = 0{,}021285963+1{,}379025103 = 1{,}400311066$. La media tra i due valori è 1,398298515 vicinissima al valore dato. Anche qui, usando i numeri 0,618033 , 1,375 e 1,08366 in relative formule, si ottengono valori ottimamente correlati con quelli relativi ai termini di errore, quindi, ancora una volta, agli zeri non banali della funzione zeta.

È consuetudine riferirsi all'altezza sulla retta "critica" come a T . Esiste una formula per il numero di zeri fino all'altezza T: $N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right)-\frac{T}{2\pi}+O(\log T)$. (5.15)

Si tratta di una formula notevolmente accurata che fornisce approssimazioni eccellenti anche per valori di T abbastanza bassi. Ignorando il termine O grande, per T uguale a 100, 1000 e 10000, si ottengono i valori 28,127 , 647,741 e 10142,090. Il reale numero di zeri fino a queste altezze è precisamente 29, 649 e 10142. Da qui si evince che i valori precedenti sono ottimamente approssimati. I nostri calcoli, invece, mostrano che $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^7 = 29{,}03$ e che $c^{42}=(1{,}08366)^{42}=29{,}2$. Inoltre, anche $(1{,}375\cdot 8)\times(1{,}375)^3 = 11\times 2{,}599609375 = 28{,}5957...$ e che $(1{,}375)^{11}-(1{,}375)^4 \cong 33{,}21-3{,}57=29{,}6$. Infine, $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{10}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{13} \cong 122{,}911+520{,}9977=643{,}98$ e $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{14}-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{11} = 842{,}9916018-199{,}0036873=643{,}98$. Ora $643{,}98+(1{,}375)^4 = 643{,}98+3{,}57=647{,}55$ valore vicinissimo a quello ottenuto dalla formula. Riguardo a c, si ottiene $c^{80}=(1{,}08366)^{80}=618{,}6...$ e $c^{81}=(1{,}08366)^{81}=670{,}4$, ma $\frac{1}{2}(618{,}6+670{,}4)=644{,}5$. Comprensivo di tutti i decimali il valore è 644,5257897 a cui aggiungendo $(1{,}375)^4=3{,}57446289$ fornisce 648,10 anche questo valore vicinissimo a quello dato. Ancora una volta, quindi, con alcune formule collegate al numero di Legendre "c", al rapporto aureo ed al fattore medio di crescita delle partizioni, si ottengono dei valori ottimamente correlati a quelli forniti da una formula collegata alla funzione zeta di Riemann, specificamente ai suoi zeri.

Nel 1972 il matematico H. Montgomery studiando la separazione tra gli zeri non banali della funzione zeta di Riemann, sviluppò una congettura secondo cui la funzione di distribuzione per quelle separazioni si otteneva integrando $1-(sen\pi u/\pi u)^2$. Il fisico F. Dyson notò che tale formula era simile al fattore di forma per la correlazione di coppia degli autovalori delle matrici casuali hermitiane. La successiva legge, chiamata di Montgomery-Odlyzko, afferma che la distribuzione delle spaziature tra zeri non banali successivi della funzione zeta di Riemann (normalizzata adeguatamente) è identica dal punto di vista statistico alla distribuzione delle spaziature degli autovalori in un operatore GUE. L'insieme di matrici casuali hermitiane (ovvero, casuali gaussiane), è chiamato nella sua totalità "Gaussian Unitary Ensemble", o GUE. Il termine "ensemble" si riferisce ad una collezione di operatori, che forniscono un modello matematico per la descrizione dei sistemi dinamici, che condividono alcune proprietà statistiche comuni. Prendiamo la seguente matrice casuale 4×4:

$$\begin{pmatrix} 1{,}9558 & 0{,}0104 - 0{,}4043i & 1{,}8694 - 1{,}2410i & 0{,}8443 - 0{,}4180i \\ 0{,}0104 + 0{,}4043i & 1{,}8675 & 0{,}7520 + 1{,}1290i & 0{,}2270 + 0{,}1323i \\ 1{,}8694 + 1{,}2410i & 0{,}7520 - 1{,}1290i & 0{,}0781 & -1{,}6122 + 0{,}8667i \\ 0{,}8443 + 0{,}4180i & 0{,}2270 - 0{,}1323i & -1{,}6122 - 0{,}8667i & -2{,}0378 \end{pmatrix}$$

Ad ogni matrice $N \times N$ è associato un polinomio caratteristico di grado N, denominato polinomio caratteristico. Gli zeri del polinomio caratteristico sono chiamati autovalori della matrice. La somma degli autovalori è chiamata traccia della matrice, ed è uguale alla somma degli elementi sulla diagonale principale. Nel caso particolare di una matrice hermitiana, gli autovalori sono tutti reali e dunque sono anche reali i coefficienti del polinomio caratteristico e la traccia. Per la matrice sopra indicata, il polinomio caratteristico è:

$x^4 - 1{,}8636x^3 - 15{,}3446x^2 + 26{,}0868x - 2{,}0484$ che uguagliato a zero fornisce i seguenti autovalori: -3,8729 , 0,0826 , 1,5675 e 4,0864 , mentre la traccia è 1,8636. Quindi gli zeri di tale polinomio sono quattro. Notiamo con interesse che:

$$-\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right] = -(4{,}236060 - 0{,}381964) \cong -3{,}85$$

$$\left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{10}\right] = (0{,}090169222 - 0{,}00813048) \cong 0{,}082$$

$$\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6\right] = 1{,}618033 - 0{,}055727555 \cong 1{,}562$$

$$\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4\right] = 4{,}2360602 - 0{,}1458971 \cong 4{,}09$$

$$\left[(1{,}08366)^8 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6\right] = 1{,}901710236 - 0{,}055727555 = 1{,}84598$$

$$\left[(1{,}08366)^8 + \left(1 - \sqrt{1{,}08366}\right)\right] \cong 1{,}9017 - 0{,}0409 \cong 1{,}86 .$$

Notiamo quindi come anche in questo caso i valori ricavati dalle formule in cui compaiono la sezione aurea, il rapporto aureo ed il numero di Legendre, siano correlati alle soluzioni del polinomio, quindi ai suoi zeri. Dunque, gli zeri non banali della funzione zeta e gli autovalori delle matrici casuali hermitiane sono in qualche modo collegati, e tutto ciò, a sua volta, è ottimamente connesso ai numeri di Fibonacci ed al numero di Legendre. Gli zeri non banali della funzione zeta di Riemann nascono da ricerche sulla distribuzione dei numeri primi, mentre gli autovalori di una

matrice casuale hermitiana nascono da ricerche sul comportamento dei sistemi di particelle subatomiche soggette alle leggi della meccanica quantistica. Che cosa ha a che fare la distribuzione dei numeri primi con il comportamento delle particelle subatomiche? È da questo "collegamento" che è possibile già intravedere la connessione trovata tra alcune equazioni inerenti la teoria di superstringa ed alcune equazioni concernenti la funzione zeta di Riemann, quindi zeri non banali e distribuzione di numeri primi, a sua volta correlati con partizioni (fattore medio c = 1,375), numero di Legendre (c = 1,08366) e serie di Fibonacci (sezione e rapporto aureo $\phi = 0{,}618033$ e Φ = 1,618033).
Andiamo adesso a descrivere alcune formule relative alla distribuzione delle spaziature tra gli zeri della funzione zeta.
Un passo importante per uno studio dettagliato della distribuzione degli zeri della funzione zeta, fu fatto da H. L. Montgomery. Sotto l'assunzione dell'Ipotesi di Riemann (RH), egli ha mostrato che se definiamo

$$F(\alpha,T) = 2\pi(T\log T)^{-1} \sum_{\substack{0<\gamma\leq T\\ 0<\gamma'\leq T}} T^{i\alpha(\gamma-\gamma')} \frac{4}{4+(\gamma-\gamma')^2} \quad (5.16)$$

per α e T reali, $T \geq 2$, dove $1/2 + i\gamma$ e $1/2 + i\gamma'$ indicano zeri non banali della funzione zeta, allora

$$F(\alpha,T) = (1+o(1))T^{-2\alpha}\log T + \alpha + o(1) \text{ per } T \to \infty \quad (5.17)$$

uniformemente per $0 \leq \alpha \leq 1$. Montgomery ha anche presentato alcune argomentazioni che suggeriscono che

$$F(\alpha,T) = 1 + o(1) \text{ per } T \to \infty \quad (5.18)$$

uniformemente per $\alpha \in [a,b]$, dove $1 \leq a < b < \infty$ sono delle costanti. Se la congettura (5.18) è vera, allora otterremo la seguente stima, conosciuta come la "congettura di correlazione di coppia di Montgomery":

$$\frac{\left|\left\{(\gamma,\gamma') : 0<\gamma,\gamma'\leq T, 2\pi\alpha(\log T)^{-1} \leq \gamma-\gamma' \leq 2\pi\beta(\log T)^{-1}\right\}\right|}{\frac{T}{2\pi}\log T} \approx \int_\alpha^\beta \left[1-\left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right]du \quad \text{per} \quad T \to \infty$$

(5.19)

La congettura (5.19), nel linguaggio della fisica matematica afferma che $1-(\sin \pi u/\pi u)^2$ è la funzione di correlazione di coppia degli zeri della funzione zeta. F. J. Dyson affermò che le matrici causali hermitiane Gaussiane (GUE) hanno la stessa funzione di correlazione di coppia. Le matrici casuali hermitiane sono state studiate in maniera molto approfondita in fisica matematica per i modelli per la distribuzione dei livelli di energia in sistemi composti da molte particelle. Le GUE consistono di matrici complesse hermitiane $n \times n$ della forma $A = (a_{jk})$, dove $a_{jj} = 2^{1/2}\sigma_{j,j}$, $a_{jk} = \sigma_{j,k} + i\eta_{j,k}$ per j < k, e $a_{j,k} = \bar{a}_{k,j} = \sigma_{k,j} - i\eta_{k,j}$ per j > k, dove $\sigma_{j,k}$ e $\eta_{j,k}$ sono variabili standard indipendenti normali. Quando $n \to \infty$ e gli autovalori delle matrici GUE sono opportunamente normalizzate, le loro correlazioni di coppia divengono $1-(\sin \pi u/\pi u)^2$. La possibile connessione tra zeri della funzione zeta ed autovalori delle matrici casuali riveste notevole

interesse in Teoria dei Numeri per le congetture di Hilbert e Polya, le quali affermano che gli zeri della funzione zeta corrispondono agli autovalori di un operatore lineare positivo.
Adesso consideriamo soltanto zeri ρ della funzione zeta con $\mathrm{Im}(\rho) > 0$, e li identifichiamo con $\rho_1, \rho_2, \ldots$ così che $0 < \mathrm{Im}(\rho_1) \le \mathrm{Im}(\rho_2) \le \ldots$. Tutti gli zeri ρ_n che sono stati calcolati sono semplici e giacciono sulla "linea critica", così possiamo scriverli come $\rho_n = 1/2 + i\gamma_n, \gamma_n \in R^+$. Abbiamo $\gamma_1 = 14.134\ldots, \gamma_2 = 21.022\ldots$, ecc. Si abbia:

$$\theta(t) = \arg\left[\pi^{-it/2}\Gamma(1/4 + it/2)\right], \ (5.20) \qquad S(t) = \pi^{-1} \arg \zeta(1/2 + it), \ (5.21)$$

dove in entrambi i casi l'argomento è definito dalla variazione continua di s in $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ o $\zeta(s)$, rispettivamente, partendo da s = 2, andando in alto verticalmente a s = 2 + it, e poi orizzontalmente a s = 1/2 + it, dove assumiamo (nel caso di S(t)) che non ci sono zeri ρ con $\mathrm{Im}(\rho) = t$. Se N(t) indica il numero di zeri ρ con $0 < \mathrm{Im}(\rho) < t$, allora

$$N(t) = 1 + \pi^{-1}\theta(t) + S(t). \ (5.22)$$

Dalla formula di Stirling, abbiamo

$$\theta(t) = \frac{1}{2} t \log[t/(2\pi e)] - \pi/8 + O(t^{-1}) \text{ per } t \to \infty \quad (5.23)$$

così che

$$N(t) = \frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi e} + \frac{7}{8} + O(t^{-1}) + S(t). \ (5.24)$$

Il massimo limite assoluto che si conosce per S(t) è

$$S(t) = O(\log t) \text{ per } t \to \infty. \ (5.25)$$

Considerato il limite (5.25), vediamo dalla (5.24) che N(t) è quasi esattamente uguale a $\pi^{-1}\theta(t)$. In particolare, gli zeri divengono più densi più in alto si và nella striscia critica, e la spaziatura verticale media tra zeri consecutivi ad altezza t è $\dfrac{2\pi}{\log\left(\dfrac{t}{2\pi}\right)}$. Quindi, definiamo la spaziatura normalizzata tra zeri consecutivi $1/2 + i\gamma_n$ e $1/2 + i\gamma_{n+1}$ come

$$\delta_n = (\gamma_{n+1} - \gamma_n)\frac{\log \frac{\gamma_n}{2\pi}}{2\pi}. \ (5.26)$$

Dalle (5.24) e (5.25) segue che δ_n ha valore medio 1 nel senso che per qualche intero positivo N ed M,

$$\sum_{n=N+1}^{N+M} \delta_n = M + O(\log NM). \ (5.27)$$

In questa notazione, la congettura di correlazione di coppia di Montgomery può essere riformulata per affermare che per qualche $\alpha, \beta, 0 < \alpha < \beta < \infty$ fissato,

$$N^{-1}\left|\{(n,k): 1 \le n \le N, k \ge 0, \delta_n + \delta_{n+1} + ... + \delta_{n+k} \in [\alpha, \beta]\}\right| \approx \int_{\alpha}^{\beta}\left[1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right]du\,, \quad (5.28)$$

per $N \to \infty$. Se la congettura di correlazione di coppia è mantenuta, dobbiamo aspettarci che essa sia ancora più forte, vale a dire che

$$M^{-1}\left|\{(n,k): N+1 \le n \le N+M, k \ge 0, \delta_n + ... + \delta_{n+k} \in [\alpha, \beta]\}\right| \approx \int_{\alpha}^{\beta}\left[1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right]du\,, \quad (5.29)$$

per $N, M \to \infty$ con M non troppo piccolo in confronto ad N, cioè $M \ge N^{\eta}$ per qualche $\eta > 0$.
La definizione dei δ_n rende facile il confronto con la distribuzione delle spaziature tra zeri consecutivi della funzione zeta e le spaziature normalizzate tra autovalori consecutivi nelle GUE, in quanto anche queste ultime sono normalizzate per avere valore medio 1. L'ipotesi GUE è usata per affermare la congettura che la distribuzione dei δ_n si avvicina asintoticamente alla distribuzione conosciuta che è valida per gli autovalori delle GUE.

Riprendiamo adesso l'espressione $\frac{1}{s}\log\zeta(s) = \int_0^{\infty} J(x)x^{-s-1}dx$ e invertiamola allo scopo di ottenere J(x) in termini della funzione zeta. L'espressione esatta di J(x) in termini della funzione zeta è:

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t}. \quad (5.30)$$

Prendiamo l'equazione quadratica $z^2 - 11z + 28 = 0$, con z al posto di x in quanto siamo nel campo dei numeri complessi. Il membro di sinistra di tale equazione è una funzione polinomiale. Le soluzioni di questa equazione sono:

$\frac{11 \pm \sqrt{121-112}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} = z_1 = \frac{11-3}{2} = 4; z_2 = \frac{11+3}{2} = 7$. Cioè, 4 e 7 sono gli zeri della funzione $z^2 - 11z + 28$. Notiamo, con interesse, che i valori 4 e 7 possono ottenersi anche dai seguenti calcoli:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 = 4{,}2360 - 0{,}2360 = 4\,; \quad \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 = 6{,}8540.. + 0{,}1458.. = 7\,.$$

Le funzioni che hanno come dominio l'insieme di tutti i numeri complessi e che mostrano un comportamento abbastanza buono, sono chiamate funzioni intere. Una funzione intera può avere molti zeri, come ad esempio un polinomio: 4 e 7 sono gli zeri di $z^2 - 11z + 28$ come abbiamo adesso mostrato. Visto che i polinomi possono essere riscritti in termini dei loro zeri, è possibile riscrivere in questo modo tutte le funzioni intere che hanno zeri? Sotto determinate condizioni è possibile farlo. E Riemann proprio questo fece: trasformò la funzione zeta in una funzione intera, i cui zeri sono esattamente gli zeri non banali della funzione zeta.

Per valutare $\sum_{\rho} Li(x^{\rho})$, cioè il secondo termine dell'espressione (5.30), bisogna accoppiare ogni zero di zeta con la sua immagine speculare, successivamente queste coppie devono essere prese secondo l'ordine crescente delle parti immaginarie positive. Quindi, prendiamo gli zeri in questo ordine:

$$\frac{1}{2}+14{,}134725i;\frac{1}{2}-14{,}134725i;$$
$$\frac{1}{2}+21{,}022040i;\frac{1}{2}-21{,}022040i; \qquad \frac{1}{2}+25{,}010858i;\frac{1}{2}-25{,}010858i \ldots.$$

Prendiamo ora un valore reale di x, ad esempio x = 20, in modo da dover calcolare J(20) che vale 9 + 7/12, cioè 9,5833333… Eleviamo 20 alla potenza 1/2 + 14,134725i; il risultato è – 0,302303 – 4,46191i. Calcoliamone l'integrale logaritmico, otteniamo: - 0,105384 + 3,14749i. Ora consideriamo il membro coniugato di questa coppia di zeri: eleviamo 20 alla potenza 1/2 – 14,134725i; il risultato è – 0,302303 + 4,46191i. Calcoliamone l'integrale logaritmico ed otteniamo – 0,105384 – 3,14749i. Sommando i due risultati, si ottiene per la prima coppia di zeri: – 0,210768. (Notiamo che le parti immaginarie si sono naturalmente annullate).
Dopo aver eseguito per 86000 volte quest'operazione, il risultato finale è – 0,370816425… Questo è il secondo termine dell'espressione (5.30). Il primo è Li(20) (cioè l'integrale logaritmico di 20), che vale 9,90529997763…, il terzo termine è log 2, che è uguale a 0,69314718055994…, infine, l'integrale al quarto termine è uguale a 0,000364111… Sostituendo tali valori nell'espressione (5.30) otteniamo 9,58333333 che è uguale a J(20).
È interessante notare che:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5=6{,}85+2{,}61+0{,}09\cong 9{,}55,$$

e che approssimando 1,618033 e 0,618033 a 1,618 e 0,618 il risultato è $\cong 9{,}56$, valore vicinissimo a quello dato dalla formula inerente la funzione zeta. Anche in questo caso, quindi, è palese la connessione tra una formula che riguarda la funzione zeta di Riemann e una formula che contiene i valori del rapporto e della sezione aurea, collegata quindi ai numeri di Fibonacci.

Connessioni ottenute tra teoria di stringa e funzione zeta di Riemann

5.1 Teoremi sulle coppie di Goldbach e le coppie di numeri gemelli.[1]

Nel lavoro "Teorema sulle coppie di Goldbach e le infinite coppie di numeri primi gemelli: nuove formule rettificate con c = 1,08366 = numero di Legendre" di **Francesco Di Noto e Annarita Tulumello**, viene corretta la formula unica

$$G \simeq g \simeq \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \qquad (5.1.1)$$

(per il calcolo del numero di coppie di Goldbach e delle coppie di gemelli fino a $N = 10^n$) con il numero correttore c = 1,08366 (già correttore della formula logaritmica $\pi(N) = \frac{N}{\log N}$ nella $\pi(N) = \frac{N}{\log N - 1{,}08366}$)

La formula (1) si sdoppia così in:

$$G \simeq \frac{10^n}{4 \bullet n^2 \bullet c^3} \quad \text{e} \quad g \simeq \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \bullet c \qquad (5.1.2)$$

le quali danno valori di G e di g fino a $N = 10^n$ molto più precisi del valore unico ottenuto con la (5.1.1).

Infine, notiamo la relazione

$$c^{9k} \simeq 2^k$$

con c abbreviato da 1,08366 in 1,08; e viene proposto di considerare il numero $c = 1{,}08366 \simeq \sqrt[9]{2}$ come una nuova e utile costante naturale, che viene chiamata costante di Legendre, buona correttrice delle curve che riguardano i numeri primi già considerate (π (N), G e g), ma anche le altre:

$$\pi(N) = \frac{n}{\log N} \quad \text{in} \quad \frac{N}{\log N} \bullet c,$$

$$\pi(N) = \frac{10^n}{2n} \quad \text{in} \quad \frac{10^n}{2 \bullet n \bullet c};$$

e possibilmente anche altre curve ancora in futuro; e potrebbe avere benissimo un ruolo anche per la futura dimostrazione della congettura di Riemann, che riguarda collettivamente i numeri primi e la loro regolarità.

La formula per il calcolo statistico approssimativo del numero delle coppie di Goldbach fino a numeri del tipo $N = 10^n$ è del tipo:

$$G_N = \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \qquad (5.1.3)$$

Riguardo all'infinità delle coppie di numeri primi gemelli, la relativa formula è invece:

$$g_N = \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \qquad (5.1.4)$$

Tale formula è la stessa della precedente per il calcolo delle G_N coppie di Goldbach; ma con la differenza che la (5.1.3) dà valori in lieve eccesso al numero reale di coppie di Goldbach per N = 10^n, mentre la seconda li dà in difetto:

$$G_N < \frac{10^n}{4 \bullet n^2} < g_N.$$

Per esempio, per N = 10^4 = 10.000, sia la (5.1.3) che la (5.1.4), essendo uguali, danno
G = g = 156 mentre i rispettivi valori reali sono:
G = 118 coppie di Goldbach per N = 10.000
G = 170 coppie di numeri gemelli fino a N = 10.000.
Esiste però numero correttore 1,08366 che, per comodità, viene chiamato "c", numero correttore di tutte le curve che riguardano collettivamente i numeri primi. Tale numero è stato trovato da Legendre per correggere in meglio i valori dati dalla formula

$$\pi \quad (N) \simeq \frac{N}{\log N}, \text{ così corretta in}$$

$$\pi \quad (N) \simeq \frac{N}{\log (N) - 1{,}08366}$$

che dà un numero molto prossimo al numero dei numeri primi fino a N.
Con questo numero correttore c = 1,08366 è infatti possibile e utile anche a noi correggere la nostra formula, sdoppiandola in due formule simili ma più efficienti:

$$G'_N = \frac{10^n}{4 \bullet n^2 \bullet c^3} \qquad (5.1.5)$$

$$g'_N = \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \bullet c \qquad (5.1.6)$$

Proposte di soluzione per alcuni problemi additivi di tipo Goldbach e sugli insiemi sparsi e intervalli corti.

I principali problemi additivi di tipo Goldbach, e cioè N pari o dispari come somma di due numeri primi (congettura di Goldbach forte), di tre numeri (congettura debole) o di quattro o più primi, e quindi k primi (estensione di Goldbach a k primi), sono già stati affrontati e risolti da **Francesco Di Noto** e da **Annarita Tulumello**, ed i relativi lavori sono stati già pubblicati sui numeri 20-2004, 21-2005 e 22-2006 della rivista "Metodo".
Oltre questi problemi, esistono anche i problemi sottrattivi, tipo i numeri primi gemelli q e p con q – p = 2, ed i primi qualsiasi q e p con q – p = d numero pari qualsiasi maggiore di 2 (congettura di Chen, la cui dimostrazione si può consultare su "Metodo" n° 22-2006).
Un altro problema del genere è quello di trovare numeri primi vicini ad un primo dato. Sapendo, per esempio, che la somma di due primi gemelli è sempre un multiplo di 12 per una conseguenza del Teorema n° 1 (vedi "Metodo" 19-2003 e 21-2005), per la dimostrazione di Goldbach (metodo delle colonne a + b) si nota che ci sono più numeri primi vicini ad un numero gemello che a qualsiasi altro. Se infatti p è un gemello, $p \pm 1$ è l'altro gemello, e $p \pm 4$, $p \pm 6$,…, $p \pm d$ possono essere gli altri numeri primi più vicini; se p è invece non gemello, i numeri primi ad esso più vicini cominciano con $p \pm d$ con d > 2, e tali numeri primi sono in conseguenza di meno dei numeri

primi vicini ad un primo gemello (ricordiamo che, per la dimostrazione della congettura di Chen, d è infinite volte la differenza tra due numeri primi diversi, così come d = 2 è infinite volte la differenza tra altrettante infinite coppie di due numeri primi gemelli). Per esempio, prendiamo i due numeri primi gemelli 29 e 31, la cui somma è 29 + 31 = 60, poiché 29 + 31 si può scrivere (in base al Teorema n° 1, anche come $(6n - 1) + (6n + 1) = 6n - 1 + 6n + 1 = 12n$) anche come:

$$6 \times 5 - 1 + 6 \times 5 + 1 = 30 - 1 + 30 + 1 = 29 + 31 = 60 = 12 \times 5;$$

ed una coppia di gemelli è sempre l'ultima coppia di Goldbach per i multipli di 12 (sebbene non tutti i multipli di 12 lo siano, per es. 48 è il primo a non esserlo, poiché $48/2 \pm 1 = 23$ e 25, con 23 primo e $25 = 5 \times 5 = 5^2$ = composto). Ma ritorniamo al numero primo 29 per vedere quali sono i numeri primi ad esso più vicini:

29 ± 2 = 27 e <u>31</u> primo (e quindi gemello, poiché d = 2);
29 ± 4 = 25 e 33 entrambi non primi;
29 ± 6 = <u>23</u> e 35 con 23 primo;
29 ± 8 = 21 e <u>37</u> con 37 primo;
29 ± 10 = <u>19</u> e 39 con 19 primo;
29 ± 12 = <u>17</u> e <u>41</u> con 17 e 41 primi e gemelli;

e quindi con i sei numeri primi più vicini a 29, che sono 31, 23, 37, 19, 17 e 41 entro la distanza d = 12.
Con lo stesso sistema, si trova che i numeri primi più vicini a 31 sono 29, 37, 23, 41, 19 e 43 sempre entro la distanza d = 12.
Nel caso di numeri primi non gemelli, per esempio 47, i numeri ad esso più vicini sono solo cinque: 43, 41, 53, 37 e 59, già uno in meno rispetto al numero 29, che possiede il gemello 31. Questa differenza aumenta al crescere di p, per esempio i numeri primi più vicini a 101 (gemello di 103) risultano essere cinque: 103, 107, 109, 89 e 113, sempre entro la distanza d = 12 (che comunque può essere variata a piacere. Qui si è scelto il numero d = 12 per fare un esempio); mentre per il numero 113, che non ha un gemello, i numeri primi più vicini risultano essere solo tre: 109, 107 e 103.
Quindi, per trovare un qualsiasi breve intervallo numerico più ricco di numeri primi rispetto ad altri intervalli della stessa lunghezza (quantificabile in $p \pm d$), occorre che p sia un numero gemello e ovviamente è al centro dell'intervallo numerico scelto, quale che sia p gemello e quale che sia d pari come differenza tra p e i numeri primi più vicini. Ora, poiché i numeri gemelli sono infiniti (vedi "Metodo" n. 21 – 2005) ci sono infiniti intervalli numerici più ricchi di numeri primi rispetto ad analoghi intervalli in cui però p non è un numero primo gemello (non ha importanza se si considera il gemello più piccolo o quello più grande, il risultato non cambia: per esempio per p = 31, i sei numeri primi più vicini sono 29 = 31 – 2 (l'altro gemello), 37 = 31 + 6, 23 = 31 – 8, 41 = 31 + 10, 19 = 31 – 12, e 43 = 31 + 12, così come sei sono i numeri primi più vicini a 29, con la differenza che per p = 29 c'è 31 al posto di 29 e 41 al posto di 43 (vedi esempio precedente per p = 29)).
Tutto questo spiega, su grande scala, ($p \pm d$, quando p è gemello, è molto più spesso di forma $6n \pm 1$, la forma dei numeri primi, e quindi è più probabile che anche $p \pm d$ sia anch'esso primo come p, cosa che succede più raramente se p non è primo gemello) perché quando N pari è un numero multiplo di 12, e quindi un cosiddetto numero "altamente composto" (avente cioè come fattori primi anche 2, 3 con qualche ripetizione e quindi anche 6 e 12 come fattori composti), esso è somma di due numeri diversi G volte, con G (numero delle coppie di Goldbach per il numero N) circa il doppio del numero G dei numeri pari vicini ad N ma non multipli di 12.
Per esempio, per p = 101 (con $N = 2(101 + 1) = 204 = 12 \times 17$), ci sono cinque numeri primi vicini a 101, come è stato detto in precedenza, mentre per p = 113, che non è un gemello, esso ha solo tre numeri primi vicini entro la distanza d = 12, e 5/3 = 1.66 = circa 2, poiché tale rapporto rispecchia

il rapporto tra i numeri G di Golbach per i due $N = 2(101 + 1) = 204$ e $N' = 2(113 + 1) = 228$, che, pur essendo multiplo di 12 (infatti $228 = 12 \times 19$), esso non è la somma di due gemelli, poiché $N/2 \pm 1 = 113$ e $115 = 5 \times 23$ con solo 113 primo ma non gemello.
Quindi, G cresce con apparente irregolarità al crescere di N, ma non scende mai sotto la curva minima G (e quindi non scende mai fino a G = 0, che invaliderebbe la soluzione positiva della congettura di Goldbach), né cresce mai sopra la curva massima 2G, con andamento a "cresta di gallo", mentre la curva dei numeri g (numero delle coppie di gemelli fino a N) ha un andamento più uniforme e regolare.
Quindi, nessuna difficoltà nel trovare numeri primi vicini ad un dato numero. Noi abbiamo considerato p primo e abbiamo usato la soluzione positiva della congettura di Chen, e cioè d pari come infinite volte la differenza tra due numeri primi diversi, ponendo p al centro dell'intervallo $p \pm d$ con d scelto a piacere (abbiamo usato come esempio $d = 12$, ma qualsiasi numero pari va bene lo stesso, tanto più grande quanto più grande sarà ovviamente p).
Tale problema è collegato a Goldbach se si pone $N = 2(p \pm 1)$, dal fatto che se p è gemello esso ha numeri primi vicini per lo stesso motivo per cui $N = 12n$ ha più coppie di Goldbach, circa 2G, rispetto ai numeri N pari vicini ma non multipli di 12.
Passiamo ora all'altro problema dell'insieme sparso (per esempio i numeri primi) ed un intervallo numerico corto. Per esempio, se vogliamo sapere anche approssimativamente quanti numeri primi ci siano in un dato intervallo corto a piacere (da qualche decina di unità a qualche migliaio o anche più), possiamo procedere in questo modo:

1) individuare le potenze di dieci più vicine all'inizio e alla fine dell'intervallo;
2) prendere in considerazione le frequenze f dei numeri primi fino a tali potenze n-esime di 10;
3) dividere il numero I che esprime l'intervallo numerico (per esempio, se l'intervallo è tra 11.150 e 12.230, I sarà la loro differenza e cioè $I = 12.230 - 11.150 = 1.080$) per la frequenza media dei numeri primi fino a 10.000 (che è 8,1366) e fino a 100.000 (che è 10,4253); facendo la media aritmetica tra le due frequenze, abbiamo $8,1366 + 10,4253 / 2 = 9,28095$; e $1.080 / 9,28095 = 116,36$ che è un numero molto vicino al numero reale di 110 numeri primi compresi tra 11.150 e 12.230.

Se però da questo numero togliamo metà del numero delle possibili coppie di gemelli, che fanno ottenere un numero calcolato (in questo caso 116) un po' più grande di quello reale (110), otteniamo un nuovo valore calcolato ancora più vicino a quello reale. Poiché il numero delle coppie di gemelli è dato da N diviso il quadrato del suo logaritmo (frequenza), e quindi g = circa N / f^2, nell'intervallo considerato ci saranno grosso modo $I / f^2 = 1.080 / 9,28095^2 = 1.080 / 86,1360 = 12,53$ che diviso per due (poiché uno dei gemelli è già considerato nella stima generale dei numeri primi fino a N) fa 6,265 , che sottratto a 116,36 dà un valore di 110,095 , vicinissimo al valore reale di 110 numeri primi compresi nell'intervallo considerato. Se l'intervallo invece comprende una potenza di 10 nel suo interno, basterebbe considerare la sola frequenza relativa a questa potenza di 10. Per esempio, per l'intervallo $I = 10.200 - 9.900 = 300$ con 32 numeri primi effettivi nel suddetto intervallo, consideriamo la sola frequenza per 10.000 che è 8,1316 , e $300 / 8,1316 = 36,89$, vicino a 32. Ma se togliamo metà dei possibili gemelli = $300 / 2\times 8,1316^2 = 2,26$, che sottratto a 36,89 dà 34,63 un valore calcolato ancora più vicino al valore reale di 32.
A volte, però, la metà del numero approssimativo dei gemelli deve essere aggiunta anziché sottratta al numero di numeri primi $\pi(I)$ nell'intervallo considerato. Per esempio, per $I = 8.650 - 8.500 = 150$; frequenza media $8,1 + 10,4 / 2 = 9,25$
$I = 150 / 9,25 = 16,2$. Poiché i numeri primi tra 8.500 e 8.650 sono 18, a 16,2 occorre aggiungere $I / 2f^2 = 150 / 2\times 85,562 = 0,87$ e avremo $16,2 + 0,87 = 17,07$ numero calcolato molto vicino al valore reale di 18 numeri primi nelle 150 unità dell'intervallo suddetto, e cioè $\pi(150) = 18$. Quindi, la formula più esatta potrebbe essere la seguente:

$$\pi(I) = I / f \pm I / 2f^2 ,$$

con il segno + quando N è più vicino ma inferiore ad una potenza di 10 (per es. 8.650 è più vicino a 10.000 che a 1.000), mentre il segno –, viceversa, quando N è di poco superiore ad una potenza di 10 (per es. 12.330 è più vicino a 10.000 che a 100.000), ma questa è una cosa che andrà verificata con ulteriori esempi.

Con ciò, anche il problema del numero dei numeri primi compresi in un intervallo numerico corto è così in linea di massima risolto, sia pure in modo eventualmente e ulteriormente perfezionabile. Così come il precedente problema di trovare i numeri primi più vicini ad un dato numero primo p, con la formula $p_v = p \pm d$, con d pari a partire da 2 (che può dare un primo gemello quando il numero $N = 2(p \pm 1) = 12n$ e quindi è un multiplo di 12 (relazione con la nostra soluzione della congettura di Goldbach)). Ne consegue che intorno alla metà di tutti gli N multipli di 12 c'è una maggiore "densità" di numeri primi, che si ripercuote poi su un maggiore numero G di coppie di Goldbach rispetto ai numeri N che non sono multipli di 12 (i soli che possono avere l'ultima coppia di Goldbach formata da due numeri gemelli e quindi con differenza minima d = 2).

Questi due problemi sembrano legati, specialmente il secondo, alle ipotesi del Nardelli sulle possibili relazioni fisico-matematiche tra vibrazioni delle stringhe e numeri primi, con riferimenti ai teoremi di Goldston e simili su questi argomenti. E quindi, le nostre soluzioni dei due problemi potrebbero essere in qualche modo utilmente collegate alle teorie di stringa considerate dal Nardelli qui di seguito, e da qui poi alle Teorie di Grande Unificazione (GUT) basate sulle teorie di stringa

5.2 Soluzioni cosmologiche da un sistema D3/D7.[2] [3] [4] [5]

L'azione completa nella M-teoria consiste di tre parti: un termine di volume, , un termine di correzione quantico, $S_{quantum}$, ed un termine che origina una membrana, S_{M2}. L'azione è allora data dalla somma di queste tre parti:

$$S = S_{bulk} + S_{quantum} + S_{M2}. \quad (5.2.1)$$

Le parti individuali sono:

$$S_{bulk} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{11}x\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{48}G^2\right] - \frac{1}{12\kappa^2}\int C \wedge G \wedge G, \quad (5.2.2)$$

dove abbiamo definito G = dC, con C che è l'usuale tre-forma della M-teoria, e $\kappa^2 \equiv 8\pi G_N^{(11)}$. Questa è la parte bosonica dell'azione classica della supergravità 11-dimensionale. La principale correzione quantistica all'azione può essere scritta come:

$$S_{quantum} = b_1 T_2 \int d^{11}x\sqrt{-g}\left[J_0 - \frac{1}{2}E_8\right] - T_2\int C \wedge X_8. \quad (5.2.3)$$

Il coefficiente T_2 è la tensione della membrana. Per il nostro caso, $T_2 = \left(\frac{2\pi^2}{\kappa^2}\right)^{1/3}$, e b_1 è una costante numerica data esplicitamente da $b_1 = (2\pi)^{-4}3^{-2}2^{-13}$. L'azione della M2 brana è data da:

$$S_{M2}=-\frac{T_2}{2}\int d^3\sigma\sqrt{-\gamma}\left[\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu X^M\partial_\nu X^N g_{MN}-1+\frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu X^M\partial_\nu X^N\partial_\rho X^P C_{MNP}\right],\ (5.2.4)$$

dove X^M sono le coordinate di "immersione" della membrana. La metrica del "volume d'universo" $\gamma_{\mu\nu}, \mu,\nu=0,1,2$ è semplicemente il "pull-back" di g_{MN}, la metrica dello spazio-tempo. Il moto di questa M2 brana è ovviamente influenzato dal "background" dei G-flussi.

Classificazione e stabilità delle soluzioni cosmologiche.

La metrica che otteniamo per il tipo IIB è della seguente forma generale :

$$ds^2=\frac{f_1}{t^\alpha}\left(-dt^2+dx_1^2+dx_2^2\right)+\frac{f_2}{t^\beta}dx_3^2+\frac{f_3}{t^\gamma}g_{mn}dy^m dy^n\quad (5.2.5)$$

dove $f_i=f_i(y)$ sono alcune funzioni delle coordinate della quadri-varietà e α,β e γ possono essere numeri positivi o negativi. Per arbitrarie $f_i(y)$ e arbitrarie potenze di t, la metrica di tipo IIB può derivare in generale da una metrica di M-teoria della forma

$$ds^2=e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+e^{2B}g_{mn}dy^m dy^n+e^{2C}|dz|^2,\ (5.2.6)$$

con tre differenti fattori di curvatura A, B e C , dati da:

$$A=\frac{1}{2}\log\frac{f_1 f_2^{\frac{1}{3}}}{t^{\alpha+\frac{\beta}{3}}}+\frac{1}{3}\log\frac{\tau_2}{|\tau|^2},\quad B=\frac{1}{2}\log\frac{f_3 f_2^{\frac{1}{3}}}{t^{\gamma+\frac{\beta}{3}}}+\frac{1}{3}\log\frac{\tau_2}{|\tau|^2},\quad C=-\frac{1}{3}\left[\log\frac{f_2}{t^\beta}+\log\frac{\tau_2^2}{|\tau|}\right].\ (5.2.7)$$

Per vedere quali sono le possibili scelte per un tale background, occorre trovare la differenza B – C . Questa è data da:

$$B-C=\frac{1}{2}\log\frac{f_2 f_3}{t^{\gamma+\beta}}+\log\frac{\tau_2}{|\tau|}.\ (5.2.8)$$

Poichè le parti dipendenti inerenti lo spazio ed il tempo della (5.2.8) possono essere isolate, la (5.2.8) può annullarsi soltanto se

$$f_2=f_3^{-1}\cdot\frac{|\tau|}{\tau_2},\qquad \gamma+\beta=0,\ (5.2.9)$$

con α e $f_1(y)$ che rimangono completamente arbitrarie.
Adesso studiamo il seguente caso interessante, dove $\alpha=\beta=2$, $\gamma=0$ $f_1=f_2$. La 6-varietà interna è indipendente dal tempo. Questo esempio corrisponderebbe ad un esatto background di tipo de-Sitter, e quindi questo produrrebbe un universo in accelerazione con i tre fattori di curvatura dati da:

$$A=\frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2},\quad B=\frac{1}{2}\left[\log f_3+\frac{1}{3}\log\frac{f_1}{t^2}\right],\quad C=-\frac{1}{3}\log\frac{f_1}{t^2}.\ (5.2.10)$$

Vediamo che la quadri-varietà interna ha fattori di curvature dipendenti dal tempo sebbene lo spazio 6-dimensionale di tipo IIB è completamente indipendente dal tempo. Un tale background ha il vantaggio che la dinamica quadri-dimensionale che dipenderebbe sullo spazio interno adesso diviene indipendente dal tempo. Questo caso presuppone che la dipendenza dal tempo ha una forma peculiare, cioè la varietà interna 6D della teoria di tipo IIB è assunta costante, e le direzioni non-compatte corrispondono ad uno spazio di de-Sitter 4D. Usando la (5.2.10), la corrispondente metrica 11D nello scenario della M-teoria, può allora, in linea di principio, essere inserita nelle equazioni del moto che seguono dalla (5.2.1).

5.3 Soluzione applicata alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB.[2] [3] [4] [6]

Consideriamo la seguente azione in (q+n+2) dimensioni, contenente la metrica, $g_{\mu\nu}$, un campo diatonico, ϕ, con un potenziale scalare generale, $V(\phi)$, ed un campo di forza (q+2)-forma, $F_{q+2} = dA_{q+1}$, conformemente accoppiato al dilatone:

$$S = \int_{\mathrm{M}_{q+n+2}} d^{q+n+2}x\sqrt{|g|}\left[\alpha R - \beta(\partial\phi)^2 - \frac{\eta}{(q+2)!}e^{-\sigma\phi}F_{q+2}^2 - V(\phi)\right]. \quad (5.3.1)$$

Qui R è lo scalare di Ricci costruito dalla metrica ed M è una costante. La stabilità richiede che le costanti α, β e η siano positive, infine, $V = \Lambda e^{-\lambda\phi}$ è il potenziale di Liouville, per il quale Wiltshire ed i suoi collaboratori hanno mostrato che le equazioni del moto non ammettono soluzioni di tipo buco nero eccetto per il caso di una costante cosmologica pura negativa, $\lambda = 0$ e $\Lambda < 0$.
La soluzione che cerchiamo può essere realizzata su una tre-sfera S^3 per fornire una soluzione alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB. Questa teoria a 10D contiene un gravitone, un campo scalare e la 3-forma NSNS tra altri campi ed ha un'azione 10 dimensionale, molto simile alla (5.3.1), fornita da

$$S_{10} = \int d^{10}x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{4}R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12}e^{-2\phi}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right]. \quad (5.3.2)$$

Abbiamo una configurazione 10 dimensionale data da

$$ds_{10}^2 = \left(\frac{2}{r}\right)^{3/4}\left[-h(r)dt^2 + r^2 dx_{0,5}^2 + \frac{r^2}{h(r)}dr^2\right] + \left(\frac{r}{2}\right)^{5/4}\left[d\theta^2 + d\psi^2 + d\varphi^2 + \left(d\psi + \cos\theta d\varphi - \frac{Q}{5r^5}dt\right)^2\right]$$

$$\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2},$$

$$H_3 = -\frac{Q}{r^6}dr \wedge dt \wedge (d\psi + \cos\theta d\varphi) - \frac{g}{\sqrt{2}}\sin\theta d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi. \quad (5.3.3)$$

Questa soluzione 10-dimensionale descrive NS-5 brane che si intersecano con le stringhe fondamentali nella direzione del tempo.

Adesso effettuiamo la "manipolazione" delle variabili angolari della tre-sfera introducendo le seguenti 1-forme di SU(2) invarianti a sinistra:

$$\sigma_1 = \cos\psi d\theta + \sin\psi \sin\theta d\varphi, \quad \sigma_2 = \sin\psi d\theta - \cos\psi \sin\theta d\varphi, \quad \sigma_3 = d\psi + \cos\theta d\varphi, \quad (5.3.4)$$

e
$$h_3 = \sigma_3 - \frac{Q}{5}\frac{1}{r^5}dt. \quad (5.3.5)$$

Poi, eseguiamo il seguente cambio di variabili

$$\frac{r}{2} = \rho^{\frac{4}{5}}, \quad t = \frac{5}{32}\tilde{t}, \quad dx_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}d\tilde{x}_4, \quad dx_5 = \frac{1}{2}dZ, \quad g = \sqrt{2}\tilde{g}, \quad Q = \sqrt{2}2^7\tilde{Q}, \quad \sigma_i = \frac{1}{\tilde{g}}\tilde{\sigma}_i.$$
(5.3.6).

É semplice verificare che la soluzione 10-dimensionale (5.3.3) diviene, dopo questi cambi

$$d\tilde{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\rho^{-1}\left[d\tilde{s}_6^2\right] + \frac{\rho}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + \rho dZ^2,$$
$$\phi = -\ln\rho,$$
$$H_3 = -\frac{1}{\tilde{g}^2}\tilde{\sigma}_1 \wedge \tilde{\sigma}_2 \wedge \tilde{h}_3 + \frac{\tilde{Q}}{\sqrt{2}\tilde{g}\rho^5}d\tilde{t} \wedge d\rho \wedge \tilde{h}_3, \quad (5.3.7)$$

dove definiamo

$$d\tilde{s}_6^2 = -\tilde{h}(\rho)d\tilde{t}^2 + \frac{\rho^2}{\tilde{h}(\rho)}d\rho^2 + \rho^2 d\tilde{x}_{0,4}^2 \quad (5.3.8)$$

e, dopo aver rimisurato M,

$$\tilde{h} = -\frac{2\tilde{M}}{\rho^2} + \frac{\tilde{g}^2}{32}\rho^2 + \frac{\tilde{Q}^2}{8}\frac{1}{\rho^6}. \quad (5.3.9)$$

Adesso trasformiamo la soluzione dal riferimento di Einstein a quello di stringa. Questo conduce a

$$d\tilde{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\rho^{-2}\left[d\tilde{s}_6^2\right] + \frac{1}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = -2\ln\rho,$$

$$\bar{H}_3 = H_3. \quad (5.3.10)$$

Abbiamo una soluzione per la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB con un campo NSNS non banale. Se eseguiamo una trasformazione di S-dualità a questa soluzione, otteniamo ancora una soluzione per la teoria di tipo IIB, ma con una RR 3-forma, F_3 non banale. La trasformazione di S-dualità agisce soltanto sulla metrica e sul dilatone, lasciando invariante la tre-forma. In questo modo siamo condotti alla seguente configurazione, che è S-duale a quella derivata sopra

$$d\overline{s}_{10}^{2}=\frac{1}{2}\left[d\widetilde{s}_{6}^{2}\right]+\frac{\rho^{2}}{\widetilde{g}^{2}}\left[\widetilde{\sigma}_{1}^{2}+\widetilde{\sigma}_{2}^{2}+\left(\widetilde{\sigma}_{3}-\frac{\widetilde{g}\widetilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^{4}}d\widetilde{t}\right)^{2}\right]+\rho^{2}dZ^{2},$$

$$\overline{\phi}=2\ln\rho,$$

$$F_{3}=H_{3}. \qquad (5.3.11)$$

Riguardo alla T-dualità, nel riferimento di stringa abbiamo

$$d\overline{s}_{10}^{2}=\frac{1}{2}\left[ds_{6}^{2}\right]+\frac{r^{2}}{g^{2}}\left[\sigma_{1}^{2}+\sigma_{2}^{2}+\left(\sigma_{3}-\frac{gQ}{4\sqrt{2}}\frac{1}{r^{4}}dt\right)^{2}\right]+r^{-2}dZ^{2}. \quad (5.3.12)$$

Questa espressione fornisce una soluzione alla supergravità di tipo IIA con RR 4-forma, C_4 eccitata. Procediamo effettuando una trasformazione di T-dualità, che conduce ad una soluzione della teoria di tipo IIB con RR 3-forma, C_3 non banale. La soluzione completa allora diviene

$$d\overline{s}_{10}^{2}=\frac{1}{2}\left[ds_{6}^{2}\right]+\frac{r^{2}}{g^{2}}\left[\sigma_{1}^{2}+\sigma_{2}^{2}+\left(\sigma_{3}-\frac{gQ}{4\sqrt{2}}\frac{1}{r^{4}}dt\right)^{2}\right]+r^{2}dZ^{2},$$

$$\overline{\phi}=2\ln r$$

$$C_{3}=-\frac{1}{g^{2}}\sigma_{1}\wedge\sigma_{2}\wedge h_{3}-\frac{Q}{\sqrt{2}g}\frac{1}{r^{5}}dt\wedge dr\wedge h_{3}. \quad (5.3.13)$$

Siamo condotti in questo modo, precisamente alla stessa soluzione 10D come è stata trovata in precedenza [vedi formula (5.3.11)].

5.4 Connessioni con alcune equazioni riguardanti la funzione zeta di Riemann.[2] [3] [4] [7]

Sono state ottenute delle interessanti connessioni tra alcune soluzioni cosmologiche di un sistema D3/D7, alcune soluzioni riguardanti la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB ed alcune equazioni riguardanti la funzione zeta di Riemann, in modo specifico il teorema di Goldston-Montgomery.
Nel capitolo "Numeri di Goldbach in intervalli corti" dell'articolo di Languasco "La congettura di Goldbach", è descritto il teorema di Goldston-Montgomery.
Assumiamo l'ipotesi di Riemann. Abbiamo le seguenti implicazioni: se $0<B_1\leq B_2\leq 1$ e $F(X,T)\approx\frac{1}{2\pi}T\log T$ uniformemente per $\frac{X^{B_1}}{\log^3 X}\leq T\leq X^{B_2}\log^3 X$, allora

$$\int_1^X(\psi((1+\delta)x)-\psi(x)-\delta(x)^2dx\approx\frac{1}{2}\delta X^2\log\frac{1}{\delta}, \quad (5.4.1)$$

uniformemente per $\frac{1}{X^{B_2}} \le \delta \le \frac{1}{X^{B_1}}$. Prendiamo il Lemma 3 di questo teorema:

<u>Lemma 3.</u>

Sia $f(t) \ge 0$ una funzione continua definite su $[0,+\infty)$ così che $f(t) << \log^2(t+2)$. Se

$$I(k) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin ku}{u}\right)^2 f(u)du = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'(k)\right)k \log\frac{1}{k}, \quad (5.4.2) \qquad \text{allora}$$

$$J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T \quad , \quad (5.4.3)$$

con $|\varepsilon'|$ piccolo se $|\varepsilon(k)| \le \varepsilon$ uniformemente per $\frac{1}{T\log T} \le k \le \frac{1}{T}\log^2 T$.

Adesso, prendiamo l'equazione (5.2.10) e precisamente $A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2}$. Notiamo che dall'equazione (5.4.3) per $\varepsilon' = -\frac{2}{3}$ e T = 2, abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T = \frac{2}{3}\log 2$. Questo risultato è correlato a $A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2}$ ponendo $\frac{f_1}{t^2} = 2$, quindi con il Lemma 3 del teorema di Goldston-Montgomery. Allora, abbiamo la seguente relazione interessante

$$A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2} \Rightarrow \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T, \quad (5.4.4)$$

quindi la connessione tra la soluzione cosmologica e l'equazione correlata alla funzione zeta di Riemann.

Adesso, prendiamo le equazioni (5.3.3) e (5.3.11) e precisamente $\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2}$ e $\bar{\phi} = 2\ln\rho$. Notiamo che dall'equazione (5.4.3) per $\varepsilon' = \frac{3}{2}$ e T = 1/2 , abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T = \frac{5}{4}\log\frac{1}{2}$.

Inoltre, per $\varepsilon' = 3$ e T = 1/2 , abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T = 2\log\frac{1}{2}$.

Questi risultati sono correlati a $\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2}$ ponendo r = 1 ed a $\bar{\phi} = 2\ln\rho$ ponendo $\rho = 1/2$, quindi con il Lemma 3 del teorema di Goldston-Montgomery. Allora, abbiamo le seguenti relazioni interessanti

$$\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2} \Rightarrow -\int_0^T f(t)dt = -[(1+\varepsilon')T\log T], \qquad \bar{\phi} = 2\ln\rho \Rightarrow \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T, \quad (5.4.5)$$

quindi la connessione tra le soluzioni 10-dimensionali ed alcune equazioni correlate alla funzione zeta di Riemann.
Notiamo come la (5.4.5) sia ben correlabile anche con la (5.11). Otteniamo infatti:

$$\int_0^\infty J(x)x^{-s-1}dx = \frac{1}{s}\log\zeta(s) \Rightarrow \phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2} \Rightarrow -\int_0^r f(t)dt = -[(1+\varepsilon')T\log T]. \quad (5.4.6)$$

Da questo il possibile legame tra soluzioni cosmologiche inerenti la teoria di stringa, funzione zeta, numeri di Fibonacci e partizioni.

6. Sulla possibile unificazione delle "costanti ultime" di Eddington tramite i due numeri c = 1,08366 numero di Legendre e Φ = 1,618033 sezione aurea.

Il grande astrofisico A. Eddington, iniziò la sua ricerca volta a spiegare i numeri puri che definiscono il nostro universo nel 1921, nelle pagine del suo famoso manuale sulla relatività generale. Egli proponeva che le caratteristiche delle particelle elementari di natura come l'elettrone, debbano derivare dalla struttura locale dello spazio e del tempo in cui risiedono, cosicché deve esistere un'equazione, finora ignota, che descrive tale relazione nella forma:

raggio dell'elettrone in qualsiasi direzione = costante numerica × raggio di curvatura dello spazio-tempo in tale direzione.

Tra i numeri che Eddington considerava di importanza primaria c'era il cosiddetto "numero di Eddington" che è pari al numero di protoni dell'universo visibile. Questo numero immenso, solitamente indicato con N_{Edd}, è approssimativamente pari a 10^{80}. Ciò che attrasse l'attenzione di Eddington su di esso fu il fatto che deve essere un numero intero e quindi, in linea di principio, potrebbe essere calcolato *esattamente*.
Negli anni '20, quando Eddington intraprese il suo tentativo di spiegare le costanti di natura, le forze deboli e forti non erano ben comprese e le uniche forze fisiche note e ben studiate erano quelle che definivano la gravità e la forza elettromagnetica. Eddington le combinò in tre numeri puri adimensionali. Servendosi dei valori sperimentali dell'epoca, egli considerò il rapporto tra le masse del protone e dell'elettrone $M_{pr}/M_e = 1840$, l'inverso della costante di struttura fine $hc/2\pi^2 = 137$ ed il rapporto tra forza elettromagnetica e forza gravitazionale agenti tra un elettrone ed un protone $e^2/GM_{pr}M_e = 10^{40}$. Ad esse, Eddington aggiunse il suo numero $N_{Edd} = 10^{80}$. Questi quattro numeri furono da lui definiti le "costanti ultime", proponendo come massima sfida della scienza teorica la spiegazione dei loro valori. Eddington sperava di riuscire a formulare una teoria che connettesse il mondo macroscopico della cosmologia con il mondo subatomico della fisica delle particelle, specificamente dei protoni e degli elettroni. I suoi numeri erano "strani" sotto molti aspetti. Anzitutto, ovviamente, non si aveva la benché minima idea del perché assumevano quei particolari valori. In secondo luogo, erano distribuiti in un "ventaglio" di ampiezze enorme.

Il rapporto tra le masse del protone e dell'elettrone e la costante di struttura fine potrebbero plausibilmente risultare prodotti di numeri come 2, 3 o π in formule matematiche non troppo complicate. Questo era almeno ciò che sperava Eddington. Ma gli altri due numeri da lui calcolati sono del tutto diversi: sono immensi. La comparsa di numeri come 10^{40} e 10^{80}, in una formula fisica richiede una spiegazione assai speciale, o per lo meno una ragione che sia molto diversa da quelle che siamo abituati a trovare per le cose nella scienza. Eddington, lavorò con grande ostinazione su teorie che potessero giustificare i numeri più piccoli che sono vicini a 137 e a 1840: tali numeri controllano quasi tutte le caratteristiche di insieme degli atomi e delle strutture atomiche.
Ora noi, prima di addentrarci nella possibile unificazione delle costanti che proponiamo in questo capitolo, parleremo brevemente della relazione tra i due numeri c = 1,08366 usato dal matematico francese Legendre per correggere le stime di Gauss sul numero dei numeri primi fino a N (da noi ripreso per correggere le nostre stime del numero delle coppie di Goldbach e di numeri primi gemelli fino a N e che chiameremo "costante di Legendre"), e il più noto numero $\Phi = 1{,}618033$ cioè il rapporto aureo che è alla base della nota serie F(n) dei numeri di Fibonacci. Tali numeri sono entrambi alla base (in seguito coinvolgeremo anche π) della nostra proposta di unificazione delle costanti di natura, che riteniamo immutabili in quanto basate su numeri primi e di Fibonacci e anche π, anch'essi eterni ed immutabili nel tempo.
Precedentemente abbiamo ipotizzato l'esistenza di numeri primi naturali di forma generale $P_n = 6f \pm 1$ con f = F(n) = numeri di Fibonacci, simili, ma solo nella forma, ai già noti numeri primi aritmetici che sono di forma generale $P = 6n \pm 1$ con n numero naturale, in base al Teorema n. 1 che esclude i soli numeri primi 2 e 3 ed include nella formula anche i semiprimi (prodotti tra numeri primi esclusi il 2 e il 3, per es. $35 = 5 \times 7$).
Ovviamente, i primi naturali sono un particolare sottoinsieme dei numeri primi aritmetici, a sua volta sottoinsieme infinito dei numeri naturali. I numeri primi naturali, pur potenzialmente infiniti anch'essi (poiché anche i numeri f di Fibonacci sono infiniti), in realtà potrebbero risultare utili sono fino ad un numero finito, precisamente alcune decine, in quanto legati alla Tavola Periodica degli Elementi Chimici, almeno nei fenomeni in cui abbiamo individuato un possibile coinvolgimento dei numeri primi, che in questi casi chiamiamo "numeri primi naturali reali". Abbiamo collegato tali numeri primi naturali reali in ben due fenomeni naturali: le frequenze S di vibrazione delle stringhe ed i numeri magici M collegati alla stabilità nucleare. In questo capitolo, vogliamo estendere la relazione tra i numeri primi, tramite il loro numero "rappresentativo" c = 1,08366 o "costante di Legendre", anche se non ne conosciamo ancora la formula (a differenza del numero "e" base dei logaritmi naturali), ed i numeri di Fibonacci, calcolabili con la nota formula di Binet, e con il loro numero rappresentativo $\Phi = 1{,}618033$; infine, tramite questi due numeri, coinvolgere le costanti di natura che tenteremo di unificare dal punto di vista strettamente matematico, coinvolgendo anche i numeri "e" = 2,718… e $\pi = 3{,}14\ldots$
Partendo dal numero c = 1,08366 (che abbiamo usato per le nostre stime delle G coppie di Goldbach per N = 10^n: $G \approx 10^n / 4n^2 \cdot c^3$, e delle coppie g di gemelli fino a N = 10^n: $g \approx \left(10^n / 4n^2\right) \cdot c$) e con il numero $\Phi = 1{,}618033$, possiamo calcolare con ottima precisione tutti i primi numeri di Fibonacci, con creazione di frattali a partire da un certo numero di ripetizioni della formula, e tali frattali successivi riproducono ognuno, ancora una volta, la serie di Fibonacci. La nostra formula approssimativa che collega c a Φ è la seguente:

$$F(n) \approx c^{(6k+2)} \cdot \Phi \quad (6.1)$$

In seguito andremo ad analizzare anche la formula

$$F(n) \approx \left(\Phi^{k'}\right) \cdot \pi \qquad (6.2)$$

la quale anche produce frattali che riformano la serie di Fibonacci. È interessante notare che anche l'inverso della costante di struttura fine è correlata sia a Φ che a c per la seguente formula:

$$1/\alpha \approx \Phi \cdot c^{55} \cdot \left(\sqrt[4]{c} + \sqrt{c}\right)/2 = 1{,}618 \cdot 82{,}755 \cdot \left(1{,}020275 + 1{,}040961\right)/2 =$$
$$= 133{,}89759 \cdot 1{,}03061 = 137{,}99 \approx 137 \qquad (6.3)$$

Ma torniamo ai numeri di Fibonacci, analizzando gli esponenti m = 6k + 2.

$m_1 = 2 = 6 \cdot 0 + 2$	$m_5 = 26 = 6 \cdot 4 + 2$	$m_9 = 50 = 6 \cdot 8 + 2$
$m_2 = 8 = 6 \cdot 1 + 2$	$m_6 = 32 = 6 \cdot 5 + 2$	$m_{10} = 56 = 6 \cdot 9 + 2$
$m_3 = 14 = 6 \cdot 2 + 2$	$m_7 = 38 = 6 \cdot 6 + 2$	$m_{11} = 62 = 6 \cdot 10 + 2$
$m_4 = 20 = 6 \cdot 3 + 2$	$m_8 = 44 = 6 \cdot 7 + 2$	……………………

Si nota facilmente che $m_i - 1$ è spesso un numero primo (p.es. 8 – 1 = 7, 14 – 1 = 13, 20 – 1 = 19, 32 – 1 = 31, 38 – 1 = 37, 44 – 1 = 43, 62 – 1 = 61, ecc…), e ciò potrebbe essere correlato in tutto o in parte alla relazione tra c e Φ da noi ipotizzata. Ma anche $m_i - 3$ fornisce numeri primi. Anche così, infatti, si hanno numeri della forma $6n \pm 1$, infatti:
8 – 3 = 5, 14 – 3 = 11, 20 – 3 = 17, 32 – 3 = 29, 44 – 3 = 41, 62 – 3 = 59,…
Analizziamo adesso la seguente tabella:

n	F(n) reali	$F(n) = c^{(6k+2)} \cdot \Phi$
1	0	
2	1	
3	1	
4	2	1,90 $\approx$ 2
5	3	3,07 $\approx$ 3
6	5	4,98 $\approx$ 5
7	8	8,07 $\approx$ 8
8	13	13,06 $\approx$ 13
9	21	21,16 $\approx$ 21
10	34	34,27 $\approx$ 34
11	55	55,49 $\approx$ 55
12	89	89,87 $\approx$ 89
13	144	145,54 d = 1,54 $\approx$(1+2)/2
14	233	235,69 d = 2,69 $\approx$3
15	377	381,69 = 4,69 $\approx$5
16	610	618,11 = 8,11 $\approx$5+3
17	987	1000,99 = 13,99 $\approx$5+8+1
18	1597	1621,02 = 24,02 $\approx$21+3
19	2584	2625,10 = 41,10 $\approx$34+5+2
20	4181	4251,14 = 70,14$\approx$34+21+13+2

Come è facile notare, le differenze d tra i valori calcolati e quelli reali riproducono, come frattali, nuovamente i numeri della serie di Fibonacci e questo potrebbe rivestire un certo interesse dal punto di vista teorico. Il riprodursi di frattali confermerebbe, infatti, la teoria del caos, insita nella teoria dei numeri (in particolare nella serie di Fibonacci), secondo la quale piccole differenze nei dati iniziali producono grandi differenze dopo un certo numero di passaggi. In questo caso si riproducono soltanto frattali che contengono ancora la serie di Fibonacci. È doveroso evidenziare che la teoria del caos ed i frattali ad essa collegati sono molto noti in fisica, in quanto si ritrovano coinvolti in numerosi fenomeni naturali.

Una possibile relazione tra c, Φ ed il numero "e" la si trova nella seguente formula:

$$e \approx \Phi \cdot c^{\sqrt{40}} = \Phi \cdot c^{6,32} \approx 1.618033 \cdot 1,662198863 = 2,689... \approx 2,7 \approx 2,718 = e\,.$$

In questo caso, 40 potrebbe essere legato all'esponente di 10^{40} (una delle costanti trovata da Eddington, precisamente il rapporto tra forza elettromagnetica e forza gravitazionale agenti tra un elettrone ed un protone). Poiché il numero "e" si potrebbe scrivere anche come

$$e \approx c^{13} = 1,08^{13} = 2,719623 \approx 2,718...$$

abbiamo un altro esponente di c, cioè 13, da aggiungere ai precedenti. Avremo così:

$c^1 = c = 1{,}08366$; c^3 correlato alla formula $G \approx 10^n / 4n^2 \cdot c^3$; $c^8 = c^{(6k+2)}$ per k=1; c^{15} correlato alla formula $\sqrt[8]{c} \cdot c^{15} / c^{\sqrt{c}} \approx \pi$; $c^{13} \approx e$; $c^{29} \approx 10$ e $c^{47} \approx 40$ correlati a 10^{40}; $c^{55} \approx 80$ correlato a 10^{80}; $c^{94} \approx 1905$.

Costruiamo ora una tabella dove nella prima colonna mettiamo gli esponenti, nella seconda le differenze tra tali esponenti ed i numeri di Fibonacci immediatamente precedenti e nella terza i numeri risultanti:

esponenti	esponenti – numeri Fibonacci	numeri risultanti
1	1 – 1	0
3	3 – 1	2
8	8 – 5	3
13	13 – 8	5
15	15 – 13	2
29	29 – 21	8
47	47 – 34	13
55	55 – 34	21
94	94 – 89	5

È solo un caso che in diverse costanti, rappresentate da esponenti del numero c = 1,08366 spesso approssimato per difetto, tali esponenti siano collegati ai numeri di Fibonacci con le differenze tra esponenti e numeri di Fibonacci precedenti, e i numeri risultanti da tali differenze siano essi stessi ancora numeri di Fibonacci? Tutto ciò potrebbe essere in qualche misura non casuale ed il significato fisico potrebbe essere un indizio della supposta unificazione delle vaie costanti intese come potenze di c, con i vari esponenti sopra riportati, e quindi tali costanti potrebbero collegarsi sia ai numeri primi tramite il loro numero caratteristico c = 1,08366 , sia alla serie di Fibonacci attraverso il suo numero rappresentativo Φ = 1,618033 , anche questo correlabile a c attraverso la relazione:

$$\Phi = c^6 / 1{,}0009 = 1{,}6179592 \approx 1{,}618... = \Phi,$$

dove 1,0009 è la media tra la 64-esima e la 128-esima radice di c, cioè: $(\sqrt[64]{c} + \sqrt[128]{c})/2 = (1{,}0012 + 1{,}0006)/2 = 1{,}0009$.

Riguardo al numero 1836, cioè il rapporto tra la massa del protone e quella dell'elettrone, anche questo è esprimibile con un'espressione contenente c^{94}. Avremo quindi:

$$c^{94} / \left[\left(\sqrt{c} + \sqrt[4]{c}\right)/2\right] \cdot \left[\left(\sqrt[8]{c} + \sqrt[16]{c}\right)/2\right] = c^{94} / (1{,}030 \cdot 1{,}0075) = 1905 / 1{,}037725 = 1835{,}74 \cong 1836.$$

Più esattamente, abbiamo 1905 diviso la media della radice quadrata di c e della radice quarta di c, moltiplicata per la media tra la radice 8-esima e la radice 16-esima di c. Si ottiene, in tal modo, il numero 1835,74 valore vicinissimo a 1836.

In tal modo molte costanti fisiche ($\alpha, 10^{40}, 10^{80}$) ed anche matematiche come c, "e", Φ e π, sarebbero esprimibili come approssimative potenze di c (o con espressioni contenenti c), con gli esponenti legati con buona approssimazione alla serie di Fibonacci, quindi al numero $\Phi = 1{,}618033$, dalla formula approssimata:

$$C \approx c^{\Phi^k \cdot \pi}, \quad (6.4)$$

(Ad esempio $\Phi^k \cdot \pi = 1{,}618033^7 \cdot 3{,}141592654 = 91{,}21$ e $c^{94} = c^{91+3}$) dove C vuol dire "Costanti", che rafforza la nostra ipotesi iniziale sulle costanti di natura collegate ai numeri primi, simbolo c, ai numeri di Fibonacci, simbolo Φ, ed al numero π, che insieme darebbero regolarità e stabilità a moltissimi fenomeni naturali.
Ricordiamo ancora che il numero 6 dell'esponente m = 6k+2, analizzato in precedenza, era già nella forma generale dei numeri primi e semiprimi $P = 6n \pm 1$, ed anche nei numeri primi naturali $P_n = 6f \pm 1$ dove ad f andranno sostituiti i numeri di Fibonacci.
Questa proposta di unificazione delle costanti di natura dal punto di vista matematico, se confermata potrebbe essere un indizio importante sul fatto che la Natura si basa essenzialmente sui numeri primi (specie sui numeri primi naturali e reali) e sui numeri di Fibonacci (specie sui primi numeri della serie, al massimo qualche decina, che sono poi i coefficienti f dei numeri primi naturali), per regolare e stabilizzare i suoi fenomeni. Numeri primi e di Fibonacci che, eterni e quindi immutabili nel tempo, darebbero regolarità e stabilità agli atomi e sarebbero collegati alle vibrazioni delle stringhe (che danno esistenza ai quark e quindi anche agli atomi ed alle loro energie, ecc…). Senza tali numeri e le costanti che ne deriverebbero, l'Universo sarebbe forse "meno" stabile e quindi meno duraturo.

Ricordiamo che la migliore candidata a Teoria del Tutto sembra essere la Teoria delle Superstringhe. Le stringhe, sembrano vibrare con frequenze legate ai numeri primi, e particolarmente ai numeri primi naturali. In questa direzione stiamo quindi procedendo approfondendo la connessione con i primi naturali, coinvolgendo quindi i numeri di Fibonacci ed anche le partizioni. Quindi, dai numeri primi e di Fibonacci siamo passati ai numeri primi naturali ed alle costanti di natura, collegate ad esponenti di c (o ad espressioni contenenti esponenti di c), a loro volta collegati ai numeri di Fibonacci. Tutto questo sembra essere correlato, almeno dal punto di vista matematico, alle vibrazioni delle stringhe, dove viene coinvolta la funzione zeta di Riemann che è collegata direttamente ai numeri primi.
Con ulteriori calcoli, è possibile collegare la funzione zeta ai numeri primi naturali, ricalcolando gli zeri con i soli numeri primi naturali anziché con tutti i noti numeri primi matematici, e quindi confrontare gli intervalli tra i nuovi zeri così calcolati, con gli intervalli tra i livelli energetici degli atomi, specialmente di quelli più stabili, in quanto i loro numeri magici M sono collegati ai numeri primi naturali. Tutto ciò permette di confermare e rafforzare l'ipotesi di Riemann dal punto di vista fisico-matematico. Successivamente, si potrebbe tentare di dimostrare tale ipotesi dal punto di vista strettamente matematico, ricalcolando gli zeri della funzione zeta sostituendo ai numeri primi i valori della loro forma $6n \pm 1$, e quindi aggiungendovi i semiprimi in una nostra generalizzazione dell'ipotesi di Riemann, con estensione dai soli primi ai primi e ai semiprimi insieme. I nuovi zeri così calcolati saranno probabilmente anch'essi sulla retta reale 1/2 , e, in tal caso, l'ipotesi potrebbe essere ritenuta fortemente valida, poiché i primi sono un sottoinsieme dell'insieme formato da primi e semiprimi, e quest'ultimo insieme è un sottoinsieme dei numeri naturali N. In altre parole, un terzo di tutti i numeri meno i due numeri primi 2 e 3 , è formato da tutti i primi ed i semiprimi. Negli altri 2/3 di numeri ci sono tutti i numeri composti, cioè prodotti tra primi e semiprimi con fattori 2 e 3 e loro potenze, per esempio $100 = 5 \times 5 \times 2 \times 2 = 5^2 \times 2^2$; $250 = 125 \times 2 = 5 \times 5 \times 5 \times 2 = 5^3 \times 2$, e così via.
Dalle costanti si risale, insomma, alla teoria delle superstringhe e da questa si potrebbe arrivare ad una TOE, tramite lo schema seguente:

NUMERI DI FIBONACCI ($\Phi = 1{,}618033; \phi = 0{,}618033$) E NUMERI PRIMI (c = 1,08366)→ COSTANTI E NUMERI PRIMI NATURALI→ TEORIA DELLE SUPERSTRINGHE E FUNZIONE ZETA DI RIEMANN (livello attuale delle nostre ricerche)→ TOE.

Possibile relazione tra π e Φ.

Abbiamo notato anche che, ripetendo più volte l'operazione $(\Phi^k) \cdot \pi \approx F(n)$ o $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^k \cdot \pi \approx F(n)$, otteniamo la serie di Fibonacci con buona approssimazione e con la solita produzione di numeri che si ripetono come frattali a partire dal numero 56,33 e che sono essi stessi numeri di Fibonacci , come precedentemente è stato visto per $\Phi \cdot c^{(6k+2)}$. Abbiamo infatti:

$1{,}618 \cdot 3{,}14 = 5{,}08052$; $(1{,}618)^2 \cdot 3{,}14 = 8{,}22028$; $(1{,}618)^3 \cdot 3{,}14 = 13{,}30$;
$(1{,}618)^4 \cdot 3{,}14 = 21{,}52$; $(1{,}618)^5 \cdot 3{,}14 = 34{,}81$; $(1{,}618)^6 \cdot 3{,}14 = 56{,}33$ (56=55+1);
$(1{,}618)^7 \cdot 3{,}14 = 91{,}15$ (91=89+2); $(1{,}618)^8 \cdot 3{,}14 = 147{,}48$ (147=144+3);
$(1{,}618)^9 \cdot 3{,}14 = 238{,}63$ (238=233+5); $(1{,}618)^{10} \cdot 3{,}14 = 386{,}11$ (377+5+3+1);
$(1{,}618)^{11} \cdot 3{,}14 = 624{,}73$ (624=610+13+1); $(1{,}618)^{12} \cdot 3{,}14 = 1010{,}81$ (1010=987+21+2).

Ma abbiamo notato anche che:

$e \approx \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + 0{,}1 = (\Phi)^2 + 0{,}1 = (1{,}618)^2 + 0{,}1 = 2{,}6180307 + 0{,}1 = 2{,}7180307 \approx e$ (base dei logaritmi naturali), ed anche che:

$\left(\sqrt{e}\right)^a \cdot \pi \approx (1{,}648)^a \cdot \pi \approx F(n)$ con produzione di numeri che si ripetono come frattali. Infatti:

$1{,}648 \cdot 3{,}14 = 5{,}174$; $(1{,}648)^2 \cdot 3{,}14 = 8{,}52$; $(1{,}648)^3 \cdot 3{,}14 = 14{,}05$ (14=13+1);
$(1{,}648)^4 \cdot 3{,}14 = 23{,}16$ (23=21+2); $(1{,}648)^5 \cdot 3{,}14 = 38{,}16$ (38=34+1+3); ecc…

Quindi, unificando le formule precedenti è possibile affermare che:

$c^{(6k+2)} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \approx \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^k \cdot \pi \approx \left(\sqrt{e}\right)^a \cdot \pi \approx F(n)$, oppure

$c^{(6k+2)} \cdot \Phi \approx (\Phi)^k \cdot \pi \approx \left(\sqrt{e}\right)^a \cdot \pi \approx F(n)$

con produzione di numeri aventi andamento frattale ed essi stessi numeri di Fibonacci. Vengono coinvolte così le quattro costanti matematiche e, c, Φ e π in diversi modi per ricavare in modo approssimato la serie di Fibonacci, con frattali che la riproducono infinitamente al crescere dei valori calcolati.

Ricordiamo che la serie esatta dei numeri di Fibonacci si ottiene con la somma dei due numeri precedenti, e, come abbiamo prima visto, con varie formule ma in modo più approssimato e con produzione di numeri aventi andamento frattale. La formula più precisa, oltre alla formula di Binet, è la seguente:

$$F(n) = F(n-1)\cdot\Phi\,, \quad (6.5)$$

che fornisce di solito risultati interi ma, talvolta, anche decimali che sono vicinissimi ai numeri della serie di Fibonacci. (Per es. $55 = 34\cdot 1{,}618 = 55{,}012$; $89 = 55\cdot 1{,}618 = 88{,}99 \cong 89$; ecc…)
Inoltre, anche π compare in una delle formule per F(n), ma anche nella formula del volume della sfera $V = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3$, e poiché gli atomi più stabili sono quelli più "sferici", π conferisce insieme sfericità e stabilità ad alcuni atomi, stabilità data anche dai numeri primi naturali con coefficiente f uguale ai numeri di Fibonacci, i quali potrebbero essere ricalcolati in modo approssimativo nel modo che segue:

$$P_n = 6\left[\Phi^k\cdot\pi\right]\pm 1\,, \quad (6.6)$$

quindi sostituendo f con la formula che coinvolge π. Concludendo, π e Φ conferiscono stabilità, "sfericità" e regolarità agli elementi chimici della Tavola Periodica, nonché ad altri fenomeni naturali, poiché sia i numeri primi che i numeri di Fibonacci sono eterni ed immutabili. Se quindi essi fossero alla base della costante di struttura fine, come ipotizziamo in questo lavoro, tale costante non cambierebbe mai nel tempo e nello spazio.
Analizziamo, infine, due serie, elaborate da S. Ramanujan, comprendenti la funzione π, che derivano da una classe di funzioni chiamate "serie ipergeometriche", esaminate per la prima volta da L. Euler e C. F. Gauss, e che da un punto di vista algebrico sono ritenute assolutamente formidabili:

$$1 - 5(1/2)^3 + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \ldots = \frac{2}{\pi} = 0{,}636619772\,;$$

$$1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4 + \ldots = \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}\left\{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^2} = 1{,}0148476\,.$$

Notiamo che:

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8,5} = 0{,}618033 + 0{,}016734 = 0{,}634767\,;$$

$$\frac{1}{2}(1{,}375) - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6 = 0{,}6875 - 0{,}0557 = 0{,}6318\,;$$

$$\frac{1}{2}\left(c^4\right) - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2}(1{,}08366)^4 - (0{,}618033)^6 \cong 0{,}6338\,.$$

E che:

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt[32]{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}+\sqrt[33]{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}\right]=\frac{1}{2}(1{,}015+1{,}014688996)=1{,}0148445\,;$$
$$\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt[5]{c}\right)+\left(\sqrt[6]{c}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt[5]{1{,}08366}\right)+\left(\sqrt[6]{1{,}08366}\right)\right]=\frac{1}{2}(1{,}016198+1{,}013480)=1{,}014839\,;$$
$$\left(\sqrt[22]{1{,}375}\right)=1{,}014580\,.$$

Come si evince, i valori calcolati con le formule contenenti il rapporto aureo, la sezione aurea, il numero di Legendre e il fattore medio delle partizioni, sono ottimamente correlati a quelli forniti dalle due serie di Ramanujan in cui è contenuta la funzione π. Quindi, ulteriore connessione tra π e $\Phi, \phi, c, F_m\, p(n)$.

Le partizioni ed i numeri di Fibonacci.

Scriviamo nuovamente, su due righe, i numeri naturali n da 1 a 15, e le relative partizioni p:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Poiché sembra che ci sia una relazione tra le partizioni e Fibonacci, vediamo quale possa essere tramite differenze orizzontali tra i numeri p di partizioni e i precedenti, e verticali tra p ed il relativo n soprastante, e poi anche con i rapporti tra ciascun p ed il precedente.
Differenze verticali p – n : 0, 0, 0, 1, 2, 5, 8, 14, 21, 32, 45, 65, 88, 121, 161

F(n): 1, 2, 5, 8, 14=13+1, 32=34-2, 88=89-1, (45+65)/2=55, (121+161)/2=141=144-3.

Differenze orizzontali p – p precedente: 1, 1, 2, 2, 4, 4, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 34, 41
con 1, 2, 8, 21 e 34 numeri di Fibonacci ed altri molto vicini. Ad es. 4=3+1, 12=13-1, 14=13+1, inoltre 13=(14+12)/2.
Tutto questo potrebbe ritenersi interessante in quanto dedurre la densità dei livelli energetici in certi sistemi quantistici semplici, si riduce a comprendere il modo in cui cresce il numero delle partizioni, e tale numero p di partizioni, come abbiamo visto, cresce in orizzontale toccando in diversi punti la serie di Fibonacci (o la media tra due di essi), e quindi le loro curve potrebbero essere molto simili tra di loro, almeno in questa fase iniziale con n da 1 a 15. Tali livelli energetici potrebbero essere correlati anche con i numeri magici M della stabilità nucleare, anch'essi collegabili alla partizioni, in quanto ogni numero M è la somma di numeri M precedenti.
Andiamo adesso ad analizzare i successivi rapporti r tra un numero p ed il precedente:

$r = p_i / p_{i-1}$ 2/1 =2 ; 3/2 = 1,5 ; 5/3 = 1,6 ; 7/5 = 1,4 ; 11/7 = 1,57 ; 15/11 = 1,36
22/15 = 1,46 ; 30/22 = 1,36 ; 42/30 = 1,4 ; 56/42 = 1,33 ; 77/56 = 1,37
101/77 = 1,31 ; 135/101 = 1,33 ; 176/135 = 1,30

Valore medio del rapporto (somma dei vari r diviso il numero degli r) = 20,29 / 14 = 1,449.

Ora, $1,449 \cdot c^2 = 1,449 \cdot 1,1664 = 1,690$. Inoltre, 1,449 (o meglio 1,44) è anche dato da: $\frac{c^5}{\left(\sqrt{c} + \sqrt[4]{c}\right)/2} = \frac{1,4898}{1,0304} \cong 1,446$. Abbiamo poi $\left(\sqrt[4]{c} + \sqrt[8]{c}\right)/2 = 1,015191379$, da cui

$\Phi \cdot 1,015 = 1,618 \cdot 1,015 = 1,6426$ che è un ulteriore valore medio calcolato. Oppure, coinvolgendo ancora c: $c^6 \cdot 1,015191379 = 1,619415374 \cdot 1,015191379 = 1,644$. Il valore medio reale è però circa 1,371 e questo è fornito dalla seguente espressione:

$$\frac{\left(1,644 + \sqrt{1,644}\right)/2 + \left(1,644/\sqrt{1,644}\right)}{2} = \frac{1,462 + 1,28}{2} = 1,371. \quad (6.7)$$

Questo è il valore medio reale del rapporto tra un numero p di partizioni ed il precedente, e quindi ogni p, moltiplicato per tale valore medio reale, fornisce all'incirca il successivo ($p \cdot 1,371 \approx$ p successivo):

$1 \cdot 1,371 = 1,371 \approx 2$; $2 \cdot 1,371 = 2,742 \approx 3$; $3 \cdot 1,371 = 4,113 \approx 5$;
$5 \cdot 1,371 = 6,855 \approx 7$; $7 \cdot 1,371 = 9,597 \approx 11$;……. $101 \cdot 1,371 = 138,471 \approx 135$;
$135 \cdot 1,371 = 185,085 \approx 176$.

Ulteriori risultati si ottengono con valore medio reale $c^4 = 1,375$, e precisamente per $2^k \cdot c^4$ e questi sono molto vicini a quelli reali, anzi, spessissimo coincidono esattamente o sono uguali alla somma di due numeri p precedenti:

$2 \cdot 1,375 = 2,75 \approx 2$; $2^2 \cdot 1,375 = 5,5 \approx 5$; $2^3 \cdot 1,375 = 11$; $2^4 \cdot 1,375 = 22$;
$2^5 \cdot 1,375 = 44 = 42 + 2$; $2^6 \cdot 1,375 = 88 = 77 + 11$; $2^7 \cdot 1,375 = 176$

Ricordando che $2^k \approx c^{9k}$ (ad es. $2^2 = c^{9 \cdot 2} = c^{18}$; $2^3 = c^{9 \cdot 3} = c^{27}$; $2^4 = c^{9 \cdot 4} = c^{36}$, ecc… per $c = 1,08366 \cong 1,08$), è possibile che anche le partizioni siano correlate ai numeri primi tramite il numero c, inoltre alcuni p sono primi essi stessi: 2, 3, 5, 7, 11, 101 (e probabilmente ce ne saranno ancora altri al crescere di n), così come sono primi anche alcuni numeri di Fibonacci, detti appunto numeri primi di Fibonacci.

Il fattore medio teorico calcolato per le partizioni 1,644 può essere ricavato dalla formula:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{5,5}+1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}(1,618 + 1,672) = \frac{1}{2} \cdot 3,29 = 1,645,$$

(valore molto vicino a quello calcolato in precedenza) cioè la media aritmetica tra Φ e Φ' calcolato con 5,5 anziché 5 come nella formula di Binet. Il valore 5,5 potrebbe derivare, come vedremo, dal valore calcolato per p(4), partizioni per n = 4, con il fattore reale 1,375 (difatti $1,375 \times 4 = 5,5$) che per le partizioni ha lo stesso ruolo di Φ nei numeri di Fibonacci. Nelle partizioni, ogni p(n) moltiplicato per 1,375 fornisce in modo approssimativo il numero di partizioni successivo p(n+1), con numeri interi a partire da $11 = 5,5 \times 2 = 2^3 \cdot 1,375$, e poi $22 = 2^4 \cdot 1,375$, ecc…, fino a p(15) = 176, numero di partizioni per n = 15.
Gli antichi filosofi-scienziati volevano connettere la Natura ai numeri interi, ora noi, in questo lavoro, stiamo dimostrando che diversi fenomeni naturali sono regolati da numeri di Fibonacci,

numeri primi naturali e numeri di partizioni (per esempio nella stabilità nucleare, nella spaziatura tra i livelli di energia e in alcune soluzioni di equazioni correlate alla teoria delle superstringhe) e tutti e tre i tipi di numeri sono interi e collegati tra di loro nelle nostre formule, che, per comodità, usano i loro numeri caratteristici: c = 1,08366 per i numeri primi, $\Phi = 1{,}618033$ e $\phi = 0{,}618033$ per i numeri di Fibonacci e $\rho = 1{,}375$ per le partizioni. Il suddetto sogno degli antichi filosofi potrebbe quindi essere presto realizzato tramite i numeri primi naturali, i numeri di Fibonacci e i numeri di partizioni, tutti molto importanti in Natura e coinvolti in vari modi nelle formule di alcune costanti di Natura, come abbiamo già visto.

Il numero ρ = 1,375 potrebbe essere considerato una nuova costante di natura, e può essere collegato ai numeri primi come quarta potenza di c, quindi $\rho \approx c^4 = 1{,}375$ con c approssimato ad 1,083. Ma può essere collegato anche a Φ, quindi ai numeri di Fibonacci, dalla formula:

$$\rho = \Phi / c^2 = 1{,}618033 / 1{,}1743 = 1{,}377\,, \quad (6.8)$$

che è un valore molto vicino al valore reale 1,375. Questo è ulteriormente approssimabile moltiplicando c^2 per la radice 32-esima di c, cioè:

$c^2 \cdot \sqrt[32]{c} = 1{,}174318996 \cdot 1{,}002513911 = 1{,}177271129$, per cui:

$\Phi / 1{,}177271129 = 1{,}37468 \approx 1{,}375 = \rho$, quindi il fattore delle partizioni.

Ora avremo che $p(n) \cdot \rho \approx p(n+1)$, come evidenziato nella seguente tabella:

p(n)	ρ	p(n+1) calcolato	p(n+1) reale
1	1,375	1,375	2
2	1,375	2,75	3
3	1,375	4,125	5
5	1,375	6,875	7
7	1,375	9,625	11
11	1,375	15,125	15
15	1,375	20,625	22
22	1,375	30,25	30
30	1,375	41,25	42
42	1,375	57,75	56
56	1,375	77	77
77	1,375	105,875	101
101	1,375	138,875	135
135 p(14)	1,375	185,625	176 p(15)

Da tale tabella, è possibile dedurre che il prossimo p(16) sarà circa uguale a $176 \times 1{,}375 = 242$. Quindi, con il numero $\rho = 1{,}375$ possiamo conoscere, in maniera approssimativa ma buona, come cresce p(n), e quindi le partizioni cosa questa che riveste una notevole importanza, visto il collegamento alle densità dei livelli energetici, questi ai loro intervalli, questi agli zeri della

funzione zeta, e, infine, quest'ultima alle soluzioni di alcune equazioni inerenti la teoria di superstringa.
Il numero ρ, collegato ai multipli e sottomultipli di 11, (già esso stesso numero di partizioni p(6) = 11) ed alle potenze di 2 tramite la formula, già analizzata in precedenza, $\rho \cdot 2^k$, fornisce risultati molto interessanti in quanto si ottengono numeri interi da 11 in poi, e tra questi numeri interi spuntano fuori altri p(n). Avremo, infatti, la seguente successione di valori:

$2^1 \cdot 1{,}375 = 2{,}75$; $2^2 \cdot 1{,}375 = 5{,}5$; $2^3 \cdot 1{,}375 = 11 = p(6)$; $2^4 \cdot 1{,}375 = 22$; $2^5 \cdot 1{,}375 = 44$;
$2^6 \cdot 1{,}375 = 88$; $2^7 \cdot 1{,}375 = 176 = p(15)$; $2^8 \cdot 1{,}375 = 352$; $2^9 \cdot 1{,}375 = 704$;
$2^{10} \cdot 1{,}375 = 1408$; $2^{11} \cdot 1{,}375 = 2816$; $2^{12} \cdot 1{,}375 = 5632$; $2^{13} \cdot 1{,}375 = 11264$;
$2^{14} \cdot 1{,}375 = 22528$; $2^{15} \cdot 1{,}375 = 45056$; $2^{16} \cdot 1{,}375 = 90112$;…..

Quindi se l'ipotesi è esatta, alcuni multipli di 11 e successivi al 176 possono essere anch'essi p(n), come lo sono $11 = 2^3 \cdot 1{,}375$ e $176 = 2^7 = 2^4 \cdot 2^3 \cdot 1{,}375$. Questo, come già detto prima, potrebbe essere molto interessante ai fini della crescita delle partizioni.
Anche interessante sembra la constatazione, valida anche per i numeri di Fibonacci, che ogni p(n) è circa la media aritmetica tra il precedente ed il successivo, con risultati esatti per $5 = (3+7)/2$ ed $11 = (7+15)/2$. In tutti gli altri casi si ottengono valori approssimati, con l'interessante differenza (con i numeri p(n) vicini) sempre multipla di 0,5. Per es. (11+22) / 2 = 16,5 e 16,5 – 15 = 1,5 = $3 \times 0{,}5$; (42+77) / 2 = 59,5 e 59,5 – 56 = 3,5 = $7 \times 0{,}5$, e così via.
Confrontiamo adesso i numeri p(n) corrispondenti alle partizioni ed i numeri M corrispondenti ai numeri magici:

p(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176
M		2			8			20	28		50	82	114	126	184

Si evince facilmente che 2 = 2; 8 = 7+1; 20 = 22 – 2; 28 = 30 – 2; 50 = 56 – 6; 82 = 77+5; 114 = 101+13; 126 = 135 – 9; 184 = 176+8, con differenze, quindi, uguali a numeri di Fibonacci (0, 1, 2, 5, 8 e 13) o a somme di essi (6 = 5+1; 9 = 8+1).
I numeri magici sono legati alla stabilità nucleare ed ai livelli energetici degli atomi, quindi un loro studio più approfondito potrebbe rivelarsi interessante per la funzione zeta e la teoria di superstringa. Tali numeri magici sono vicini essi stessi ai numeri di Fibonacci. Difatti:

2 = 2; 8 = 8; 20 = 21 – 1; 28 = 34 – 6; 30 = 34 – 4; 50 = 55 – 5; 82 = 89 – 7;
114 = 89+25 = 144 – 30; 126 = 144 – 18; 184 = 144+40 = 233 – 49; 298 = 233+65

con differenze, anche in questo caso, uguali a numeri di Fibonacci o a somme di essi. Anche per i numeri magici vige la regola, valida per le partizioni ed i numeri di Fibonacci, che ogni termine è uguale a circa la media aritmetica tra il termine precedente e quello successivo, con risultato talvolta anche esatto, come nel caso di 82 = (50+114) / 2, mentre in altri casi c'è qualche piccola differenza, per esempio (30+82) / 2 = 55 = 50+5 (con 5 numero di Fibonacci).
Una certa regolarità, infine, si trova tra le differenze tra un numero M ed il precedente, molto vicini a numeri di Fibonacci:

Differenze tra M ed M precedente:	114	58	12	32	20	2	8	12	5
Numeri di Fibonacci F vicini:	144	55	13	34	21	2	8	13	5
Differenze M – F:	30	3	1	2	1	0	0	1	0

Anche quest'ultima osservazione potrebbe risultare utile in un ulteriore lavoro di approfondimento.

7. Relazioni varie tra partizioni, livelli energetici e funzione zeta di Riemann.

Le partizioni, come abbiamo già detto, sono numeri che spuntano nel mondo fisico quasi con la stessa frequenza dei numeri di Fibonacci. Per esempio, dedurre la densità dei livelli energetici in certi sistemi quantistici semplici, si riduce a comprendere il modo in cui cresce il numero di partizioni.
È quindi interessante per i nostri scopi vedere come cresce la serie dei numeri delle partizioni di n, in simbolo p(n), per poi collegare p(n) con i livelli energetici e la funzione zeta, ed anche con i numeri di Fibonacci ed i numeri primi naturali. Da calcoli in merito, già è stato ottenuto il seguente risultato teorico: la serie p(n) cresce come la serie di Fibonacci, con la differenza che per Fibonacci abbiamo il numero $\Phi = 1{,}618033$ mentre per p(n) abbiamo il numero $\rho = 1{,}375$ valido fino a p(15) = 176, ma con l'importante constatazione che, essendo $11 = 8 \times 1{,}375$, dopo 11 = p(6), ci sono soltanto numeri p(n) interi, e molti di essi sono divisibili per 11. Ora, se tali numeri sono correlati, come sembra, anche ai valori dei livelli energetici, si prova che esiste una relazione ben precisa tra p(n) e livelli energetici, quindi indirettamente anche con le vibrazioni delle stringhe e la funzione zeta. Quindi l'ipotesi di Riemann ne esce rinforzata sotto l'aspetto matematico-fisico teorico.
Molti numeri di partizioni p(n) sono quindi multipli interi di 1,375 e da p(15) = 176 sono multipli interi e non di 11:

$1 = 1{,}375 \cdot 1 = 1{,}375;$ $2 = 1{,}375 \cdot 2 = 2{,}75;$ $3 = 1{,}375 \cdot 3 = 4{,}125;$ $5 = 1{,}375 \cdot 4 = 5{,}5;$
$7 = 1{,}375 \cdot 5 = 7{,}562;$ $11 = 1{,}375 \cdot 8 = 11 = 11 \cdot 1;$ $15 = 1{,}375 \cdot 10{,}9090;$ $22 = 1{,}375 \cdot 16 = 22 = 11 \cdot 2;$
$30 = 1{,}375 \cdot 21{,}8182 = 30;$ $42 = 1{,}375 \cdot 30{,}5455 = 42;$ $56 = 1{,}375 \cdot 40{,}7273 = 56;$
$77 = 1{,}375 \cdot 38{,}5 = 77 = 11 \cdot 7;$ $101 = 1{,}375 \cdot 73{,}4546 = 101;$ $135 = 1{,}375 \cdot 98{,}1819 = 135;$
$176 = 1{,}375 \cdot 128 = 176 = 11 \cdot 16;$ $231 = 11 \cdot 21 = 168 \cdot 1{,}375;$ $297 = 11 \cdot 27 = 216 \cdot 1{,}375;$
$385 = 11 \cdot 35 = 280 \cdot 1{,}375;$ $490 = 11 \cdot 44{,}5455;$ $627 = 11 \cdot 57 = 456 \cdot 1{,}375;$
$792 = 11 \cdot 72 = 576 \cdot 1{,}375;$ $1002 = 11 \cdot 91{,}0909;$ $1255 = 11 \cdot 114{,}0903;$ $1575 = 11 \cdot 143{,}1819;$
$1958 = 11 \cdot 178 = 1424 \cdot 1{,}375;$ $2436 = 11 \cdot 221{,}4546;$ $3010 = 11 \cdot 273{,}6364;$
$3718 = 11 \cdot 338 = 2704 \cdot 1{,}375;$ $4565 = 11 \cdot 415 = 3320 \cdot 1{,}375;$ $5604 = 11 \cdot 509{,}4546;$
$6842 = 11 \cdot 622 = 4976 \cdot 1{,}375;$ $8349 = 11 \cdot 759 = 6072 \cdot 1{,}375;$ $10143 = 11 \cdot 922{,}0909;$
$12310 = 11 \cdot 1119{,}0909;$ $14883 = 11 \cdot 1353 = 10824 \cdot 1{,}375;$ $17977 = 11 \cdot 1634{,}2728;$
$21637 = 11 \cdot 1967 = 15736 \cdot 1{,}375;$ $26015 = 11 \cdot 2365 = 18920 \cdot 1{,}375;$
$31185 = 11 \cdot 2835 = 22680 \cdot 1{,}375;$ $37338 = 11 \cdot 3394{,}3637;$ $44583 = 11 \cdot 4053 = 32424 \cdot 1{,}375;$
$53171 = 11 \cdot 4833{,}7273;$ $63261 = 11 \cdot 5751 = 46008 \cdot 1{,}375;$ $75175 = 11 \cdot 6834{,}0909;$
$89134 = 11 \cdot 8103{,}0909;$……………………………………………………………………..

Da questo deduciamo che sono importanti i numeri $\rho = 1{,}375$ e $8\rho = 11$, e che molti p(n) sono multipli di 11, specie quelli in cui l'altro fattore è un numero di Fibonacci o un numero molto vicino ad esso, o, ancora, è dato dalla somma tra numeri di Fibonacci. Ad esempio, $11 = 1{,}375 \cdot 8 = 11 \cdot 1$; $231 = 11 \cdot 21$; dove 8 e 21 sono numeri di Fibonacci e $385 = 11 \cdot 35$; $627 = 11 \cdot 57$; dove 35 = 34+1 e 57 = 55+2 sono numeri vicini a numeri di Fibonacci e $26015 = 11 \cdot 2365$, dove 2365 è dato da 2365 = 2194+114+55+2 che sono tutti numeri di Fibonacci. Quindi, l'ossatura principale delle partizioni p(n) di n sembra essere il prodotto tra 11 ed i numeri di Fibonacci o vicini ad essi, o a numeri composti da somme di numeri di Fibonacci. Inoltre, 11 è legato a $\rho = 1{,}375$ dalla relazione $8\rho = 8 \cdot 1{,}375 = 11$ (dove 8 è anch'esso un numero di Fibonacci).

Vediamo ora la fattorizzazione dei vari p(n), quindi p(n) = fattori di p(n). Risulta che essi sono primi o prodotti tra primi, ma con maggiori ripetizioni dei fattori più piccoli, anch'essi p(n):

1 = 1; 2 = 2; 3 = 3; 5 = 5; 7 = 7; 11 = 11; 15 = $3 \cdot 5$; 22 = $2 \cdot 11$; 30 = $2 \cdot 3 \cdot 5$;
42 = $2 \cdot 3 \cdot 7$; 56 = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$; 77 = $7 \cdot 11$; 101 = 101; 135 = $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5$;
176 = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 2^4 \cdot 11$; ……………… 6842 = $2 \cdot 11 \cdot 311$……………………………

Ogni p(n), oltre che ad essere, fino a 176, il prodotto del precedente p(n) (o di un valore ad esso molto vicino) per 1,375 cioè $p(n) \cong p(n-1) \cdot 1{,}375$, è anche molto vicino ad un multiplo di 11, o lo è esso stesso ($11 \cdot k + 0$), quindi: $p(n) = 11 \cdot k \pm 0{,}\pm1{,}\pm2 \pm 3$. Per esempio:

$11 = 11 \cdot 1 + 0$; $22 = 11 \cdot 2 + 0$; $30 = 11 \cdot 3 - 3 = 33 - 3 = 30$; $42 = 11 \cdot 4 - 2 = 44 - 2 = 42$;
$56 = 11 \cdot 5 + 1 = 55 + 1 = 56$; $77 = 11 \cdot 7 + 0$; $101 = 11 \cdot 9 + 2 = 99 + 2 = 101$;
$135 = 11 \cdot 12 + 3 = 132 + 3 = 135$; $176 = 11 \cdot 16 + 0$; $12310 = 11 \cdot 1119 + 1 = 12309 + 1 = 12310$;
$89134 = 11 \cdot 8103 + 1 = 89133 + 1 = 89134$……………………………………………………..

Quindi p(n) "costeggia" la retta $r = 11 \cdot k$, così come i numeri primi hanno una particolare preferenza per i numeri costruiti con $4 \cdot k \pm 1{,}\pm3$. Per esempio:

$4 \cdot 1 + 1 = 5$; $4 \cdot 2 + 3 = 11$; $4 \cdot 3 + 1 = 13$; $4 \cdot 4 + 1 = 17$; $22 \cdot 4 + 1 = 89$; ……..

Questo è spiegabile con il Teorema n. 1 $P = 6n \pm 1$. Poiché tutti i primi sono di forma $6n \pm 1$, anche $4k \pm 1$, $4k \pm 3$ deve essere di forma $6n \pm 1$, cioè $4k + 1$ e $4k + 3$ divengono $6n \pm 1$. Per esempio:

$5 = 4 + 1 = 6 \cdot 1 - 1$; $7 = 4 + 3 = 6 \cdot 1 + 1$; $11 = 4 \cdot 2 + 3 = 6 \cdot 2 - 1$; $13 = 4 \cdot 3 + 1 = 6 \cdot 2 + 1$;
$17 = 4 \cdot 4 + 1 = 6 \cdot 3 - 1$; $19 = 4 \cdot 4 + 3 = 6 \cdot 3 + 1$; …….e così via.

Ma, a differenza di $11 \cdot k$, che può essere p(n) pari o dispari, $4 \cdot k$ non può essere primo perché pari e, come è noto tutti i primi sono dispari, tranne il 2. Quindi sia $p(n) = 11k \pm 0{,}\pm1{,}\pm2{,}\pm3$ che $P = 4k + 1$, $4k + 3$ (conseguenza del Teorema n. 1), sono buoni risultati nell'ambito della Teoria dei Numeri, e $p(n) = 11k \pm 0{,}\pm1{,}\pm2{,}\pm3$ è potenzialmente molto importante per la teoria di superstringa, visto il legame che esiste tra p(n) ed i livelli energetici.
Dalla correlazione con il Teorema n. 1, è possibile scrivere p(n) anche come: $p(n) = 12k \pm 1{,}\pm2{,}\pm3{,}\pm4$ a partire da 11 (notiamo che $12 = 6 \cdot n$ per n = 2):

$11 = 12 - 1$; $15 = 12 + 3$; $22 = 12 \cdot 2 - 2$; $30 = 12 \cdot 2 + 6 = 36 - 6 = 12 \cdot 2{,}5$;
$42 = 12 \cdot 3 + 6 = 48 - 6 = 12 \cdot 3{,}5$; $56 = 12 \cdot 4 + 8 = 54 + 2 = 12 \cdot 4{,}5 + 2$;
$77 = 12 \cdot 6 + 5 = 84 - 7 = 12 \cdot 6{,}5 - 1$; $101 = 102 - 1 = 12 \cdot 8{,}5 - 1$; $135 = 12 \cdot 11 + 3$;
$176 = 12 \cdot 15 - 4$; $231 = 12 \cdot 19 + 3$;………… $21637 = 12 \cdot 1803 + 1$;……………….

Ma è possibile anche applicare una "variante" del Teorema n. 1, con $p(n) = 6k \pm 0{,}\pm1{,}\pm2{,}\pm3$, ottenendo così:

$5 = 6 \cdot 1 - 1$; $7 = 6 \cdot 1 + 1$; $11 = 6 \cdot 2 - 1$; $15 = 6 \cdot 2 + 3 = 6 \cdot 2{,}5$; $22 = 6 \cdot 4 - 2$; $30 = 6 \cdot 5 + 0$;
$42 = 6 \cdot 7 + 0$; $56 = 6 \cdot 9 + 2$; $77 = 6 \cdot 13 - 1$; $101 = 6 \cdot 17 - 1$; $135 = 6 \cdot 22 + 3$;
$176 = 6 \cdot 29 + 2$; $231 = 6 \cdot 38 + 3 = 6 \cdot 38{,}5$; ……… ; $21637 = 6 \cdot 3606 + 1$; …..

Quindi, anche $6k, 6k \pm 1, 6k \pm 2, 6k \pm 3$ non si discosta mai, per più di 3 unità, dalla retta $r = 6 \cdot k$, così come si è visto per $r = 11 \cdot k$ e così come i numeri primi, per il Teorema n. 1, non si discostano mai (tranne il 2 ed il 3) dalle due rette $r = 6n - 1$ ed $r' = 6n + 1$. Quindi, nuova relazione tra p(n) e P, cioè tra numeri di partizioni e numeri primi: $P = 6n \pm 1$; $p(n) = 6k; 6k \pm 1; 6k \pm 2; 6k \pm 3$.
Ma l'ossatura principale è 6k in questa relazione ed 11k e 12k nelle precedenti, sebbene con alcuni k mancanti in tutte e tre le forme. Quindi k non coincide con n = numeri naturali, ma ne salta diversi. D'altra parte, è importante osservare che k fornisce valori interi o molto vicini a p(n), quando k stesso è un numero di Fibonacci (2, 5, 13,…) o molto prossimo (7, 9, 22,…) o una somma tra essi (13 = 5 + 8). Quindi le sequenze unificatrici algebriche, numeri primi $P = 6n \pm 1$, con n = numeri naturali, numeri primi naturali $P_n = 6f \pm 1$, con f = numeri di Fibonacci, numeri di Fibonacci $F_n = 6k; 6k \pm 1, 6k \pm 2, 6k \pm 3$ (ad esempio: $6 \cdot 1 - 1 = 5$; $6 \cdot 1 + 2 = 8$; $6 \cdot 2 + 1 = 13$; $6 \cdot 3 + 3 = 21$; $6 \cdot 6 - 2 = 34$; $6 \cdot 9 + 1 = 55$; $6 \cdot 15 - 1 = 89$; $6 \cdot 24 + 0 = 144$;…) e numeri di partizioni $p(n) = 6k; 6k \pm 1; 6k \pm 2; 6k \pm 3$, possono essere la base per ulteriori studi sugli aspetti matematici della teoria di superstringa e della funzione zeta di Riemann, e, conseguentemente, dell'ipotesi di Riemann che ne uscirebbe rafforzata, per poi essere successivamente dimostrata dal punto di vista strettamente matematico.
Analizziamo ora brevemente l'aspetto geometrico, visti i risultati precedenti sotto l'aspetto puramente algebrico:

1) Gli zeri della funzione zeta sono tutti sulla retta 1/2 (ipotesi di Riemann);
2) I numeri primi ed i semiprimi sono sulle rette parallele (con origine in 1 e -1) 6n – 1 e 6n + 1 (dimostrabile con il Teorema n. 1);
3) Anche i numeri primi naturali P_n , sottoinsieme dei numeri primi aritmetici, ma con f = numeri di Fibonacci al posto di n, sono sulle rette 6f – 1 e 6f + 1;
4) I numeri di partizioni p(n) stanno tutti sulle sette rette $6k, 6k \pm 1, 6k \pm 2, 6k \pm 3$ con origine in $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$; ed anche sulle sette rette $11k, 11k \pm 1, 11k \pm 2, 11k \pm 3$;
5) I numeri di Fibonacci $F_n = 6k, 6k \pm 1, 6k \pm 2, 6k \pm 3$ stanno anch'essi sulle sette rette delle partizioni; in entrambi i casi, quindi, $k \cong F_n \cong p(n)$;
6) I livelli energetici saranno certamente collegati alle partizioni ed anche ai numeri primi naturali e di Fibonacci (vedi paragrafo "Stati di energia discreta di un atomo…").

Concludendo, possiamo affermare che la teoria di superstringa, almeno dal punto di vista puramente matematico, è simile ad una matassa in apparenza ingarbugliata di diversi fili (numeri) di vario colore (formule) che però sono simili e poco distinguibili tra di loro: numeri primi, numeri primi naturali, numeri di Fibonacci, numeri magici, numeri delle partizioni, zeri della funzione zeta di Riemann. Con questo lavoro si è cercato di identificare i vari fili (numeri), i loro colori (formule) e, soprattutto, le loro relazioni (nodi ed intrecci vari), per tentare di "sbrogliare" la suddetta matassa.
Alla fine, quando si arriverà ad una maggior chiarezza, le connessioni matematiche tra teoria di superstringa e funzione zeta di Riemann, appariranno ancora più comprensibili, con ogni filo al suo posto. Inoltre, poiché due dei fili, e cioè gli zeri ed i livelli energetici, riguardo direttamente l'ipotesi di Riemann, si nutre una certa speranza che anche questa alla fine sarà definitivamente dimostrata (oppure confutata). Noi però dalle argomentazioni qui esposte e da ulteriori studi in fase di preparazione, siamo più propensi a credere nella dimostrazione, quindi nella realtà dell'ipotesi di Riemann.

Ulteriori relazioni inerenti c = 1,08366, "e" = 2,718 , 1,375 , Φ e ϕ.

Il numero c^k potrebbe essere coinvolto anche nei calcoli comprendenti N e $N/\pi(N)$ fino ad N = 10^{18}, dove $\pi(N)$ è definito come il numero di primi minori o uguali a N. (Ricordiamo, a titolo di esempio, che per N = 1000, i numeri primi minori di N sono 168 e che 1000 / 168 = 5,952):

$10^3 \to 5{,}952 \cong 5$	12 / 5 = 2,4 →	$c^{11} = 2{,}4207$;
$10^6 \to 12{,}739 \cong 12$	19 / 12 = 1,58 →	$c^6 = 1{,}6197$; $c^{5,5} = 1{,}5556$;
$10^9 \to 19{,}666 \cong 19$	26 / 19 = 1,36 →	$c^4 = 1{,}3792$;
$10^{12} \to 26{,}590 \cong 26$	33 / 26 = 1,26 →	$c^3 = 1{,}2727$;
$10^{15} \to 33{,}506 \cong 33$	40 / 33 = 1,21 →	$c^{2,5} = 1{,}2224$.
$10^{18} \to 40{,}420 \cong 40$		

Riguardo agli esponenti di e^N, abbiamo:

1 → $2{,}718 = 2{,}718 \qquad \cong 3 = F(4)$
2 → $2{,}718^2 = 7{,}389 \qquad \cong 8 = F(6)$
3 → $2{,}718^3 = 20{,}085 \qquad \cong 21 = F(8)$
4 → $2{,}718^4 = 54{,}5981 \qquad \cong 55 = F(10)$,

da cui $e^N \cong F(n)$. Ma è possibile avere anche F(n) con la formula:

$$\left(\sqrt{e}\right)^m \cdot e = (1{,}648)^m \cdot 2{,}718, \quad (7.1)$$

per m = 1, 2, 3,…, n. Infatti, avremo:

$e = 2{,}718 \cong 3$
$1{,}648 \cdot 2{,}718 = 4{,}4793 \cong 5$; $\quad 1{,}648^2 \cdot 2{,}718 = 7{,}3819 \cong 8$; $\quad 1{,}648^3 \cdot 2{,}718 = 12{,}1654 \cong 13$;
$1{,}648^4 \cdot 2{,}718 = 20{,}04 \cong 21$; $\quad 1{,}648^5 \cdot 2{,}718 = 33{,}04 \cong 34$; $\quad 1{,}648^6 \cdot 2{,}718 = 54{,}45 \cong 55 \ldots$

Ora, i numeri di Fibonacci 3, 5, 8, 13, 21 e 55, per la formula $P_n = 6f \pm 1$, forniscono i seguenti numeri primi naturali: 17, 19, 29, 31, 47, 79, 127 e 331. Quindi, anche e^N è correlato ai numeri di Fibonacci e, indirettamente, ai numeri primi naturali.

Il genio matematico S. Ramanujan, elaborò un'equazione contenuta alla pagina 105 del quattordicesimo capitolo del suo primo "Quaderno":

$$x + n + a = \sqrt{ax + (n+a)^2 + x\sqrt{a(x+n) + (n+a)^2 + (x+n)\sqrt{ecc.}}} \quad (7.2)$$

Si scomponga qualunque numero in tre componenti, x, n ed a, dice tale equazione, ed è possibile rappresentarlo nella forma di radici quadrate nidificanti all'infinito. Per esempio, 3 avrebbe potuto essere immaginato come (x + n + a), in cui x = 2, n = 1 ed a = 0:

$$x+n+a=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+...}}}}}}\quad (7.3)$$

Si inseriscano, quindi, questi valori nell'equazione e si otterrà esattamente un valore che tenderà sempre di più a 3, fino ad arrivarci. Ora, se prendiamo il secondo membro di tale equazione fino al termine $\sqrt{1+5}$, otteniamo il valore 2,75505 un valore molto prossimo a 2,718, quindi ad "e". Inoltre:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=0{,}118033+2{,}618030\cong 2{,}736$$

$c^4=1{,}08366^4\cong 1{,}083^4=1{,}37566$; $1{,}37566\cdot 2=2{,}751$; $1{,}08366^4\cdot 2=1{,}379025\cdot 2\cong 2{,}758$;
infine 2,75505 / 2 = 1,377.
Come si vede, i valori 2,736 , 2,751 e 2,758 sono tutti molto vicini a 2,755 ed anche a 2,718, quindi ad "e". Inoltre 1,377 è molto vicino a 1,375 il fattore medio delle partizioni. Ancora una volta delle relazioni che connettono la sezione aurea, il rapporto aureo, il numero di Legendre, il fattore medio delle partizioni ed "e".

Un numero composto, ricordiamo, non è un numero primo. Il numero 21, ad esempio, è composto, in quanto prodotto di 3 per 7. Per ogni numero composto è possibile elencare tutti i numeri per i quali lo si può dividere. Per esempio, 21 ha come divisori 1, 3, 7 e 21. I divisori di 22 sono 1, 2, 11 e 22; il numero 24, invece, può essere diviso per 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 e 24. Il fondamentale articolo di S. Ramanujan sui numeri altamente composti, si occupava proprio di numeri come 24. I suoi otto divisori erano più numerosi di quelli di qualunque altro numero composto minore di 24, il che lo rendeva, secondo la terminologia di Ramanujan, "altamente composto".
I fattori primi da cui è formato un qualsiasi numero composto, N, possono essere scritti nella seguente forma:

$$N=2^{a_2}\times 3^{a_3}\times 5^{a_5}...\quad (7.4)$$

in cui a_2, a_3, a_5, e così via sono esattamente le potenze cui i numeri primi, 2, 3, 5…, sono elevati. Il numero altamente composto 24, per esempio, può essere considerato come $2^3\times 3^1$. In questa notazione, dunque, $a_2=3$ e $a_3=1$. Ramanujan scoprì che, per qualunque numero composto, a_2 era sempre uguale a o maggiore di a_3, a_3 era sempre uguale a o maggiore di a_5, e così via. Ramanujan mostrò inoltre che, con due eccezioni, cioè 4 e 36, l'ultima a_n necessaria a costruire un numero composto era sempre 1. È interessante notare che il numero altamente composto 24 è correlato alle seguenti formule:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^8+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=23{,}48924205+0{,}618033=24{,}10727505\cong 24{,}1;$$

$$\frac{1}{2}(c)^{48}+\frac{1}{4}(c)=\frac{1}{2}(47{,}30053625)+\frac{1}{4}(1{,}08366)=23{,}65026812+0{,}270915=23{,}92118312\cong 23{,}9;$$

$(1{,}375)^{10}-\frac{1}{9}(1{,}375)=24{,}156-0{,}1527\cong 24$. Notiamo, inoltre, che (24,1 + 23,9) / 2 = 24.

Anche in questo caso, quindi, esistono delle connessioni tra il numero composto 24 e il rapporto aureo, la sezione aurea, il numero di Legendre ed il fattore medio delle partizioni.

Un articolo scritto da S. Ramanujan ed G. H. Hardy, contiene una tavola calcolata da MacMahon, dei valori di p(n), il numero delle partizioni illimitate di n, per tutti i valori di n da 1 a 200. Esaminando i numeri di questa tavola, Ramanujan osservò curiose proprietà di congruenza, apparentemente soddisfatte da p(n). Così:

$$(1)\ \ p(4), p(9), p(14), p(19),... \equiv 0 (\bmod 5),$$
$$(2)\ \ p(5), p(12), p(19), p(26),... \equiv 0 (\bmod 7), \ldots$$

Ricordiamo che due numeri sono congruenti quando possono essere divisi per lo stesso numero e danno lo stesso resto, che potrebbe essere zero. Per esempio 14 / 7 = 2; nel linguaggio speciale delle congruenze si dice $14 \equiv 0 (\bmod 7)$, che significa che si può dividere 14 per 7, il "modulo", con l'avanzo di zero. E $15 \equiv 1 (\bmod 7)$, significa che 15, diviso per il modulo 7, dà un resto di 1. Il numero 22 è congruente con 15 perché anch'esso, diviso per 7, dà 1 di resto.
Ciò che Ramanujan aveva scoperto nella tavola di MacMahon erano determinati schemi persistenti e interessanti espressi al meglio in questo linguaggio semplice. Per esempio, aveva scoperto che:

$$p(5m+4) \equiv 0 (\bmod 5). \quad (7.5)$$

Si immagini che m abbia un qualsiasi valore a scelta e, qualunque valore si sia scelto, il numero di partizioni, come mostrò Ramanujan, sarà sempre divisibile per 5. Per esempio, si ponga m = 0. Allora 5m + 4 è uguale a 4. Per il numero 4 ci sono 5 partizioni ed il numero 5 è divisibile per 5. Posto m = 1 , allora 5m + 4 = 9; p(9) = 30; $30 \equiv 0 (\bmod 5)$, cioè 30 è divisibile per 5.
Ramanujan tirò fuori un'altra identità che diceva che p(7m + 5) era divisibile per 7. Difatti, per esempio, per m = 3, p(7m + 5) = p(26) = 2436; $2436 \equiv 0 (\bmod 7)$, cioè 2436 è divisibile per 7.
Ora, anzitutto notiamo che i divisori 5 e 7 sono numeri primi. Inoltre, essi sono correlati alle seguenti formule:

$$(c)^{24} + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cong 6,877 + 0,123 = 7; \quad (c)^{20} + \frac{1}{124}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \cong 4,987 + 0,0130 = 5;$$
$$(c)^{20} + \frac{1}{47}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cong 4,987 + 0,0130 = 5.$$

Ancora, come nel caso precedente, notiamo come per le congruenze del numero delle partizioni vi siano delle interessanti correlazioni con il numero di Legendre, la sezione aurea ed il rapporto aureo.

8. Su alcune formule inerenti le frazioni continue di Rogers-Ramanujan e le equazioni modulari di Ramanujan. [9]

Le prime frazioni continue infinite che si incontrano in un corso elementare di Teoria dei Numeri sono:

$$1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,... = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (8.1) \qquad \text{e} \qquad 1 - \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1-}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1-}\,... = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (8.2)$$

dove usiamo la notazione

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \, {}_{+} \frac{a_2}{b_2} \, {}_{+} \frac{a_3}{b_3} \, {}_{+} \cdots := b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}}.$$

In connessione con le identità di Rogers-Ramanujan, Rogers ha prima considerato la naturale generalizzazione della (8.1) nella quale l'n-mo numeratore parziale della (8.1) è sostituito da $q^n, 0 \le n < \infty$. Più precisamente, per $|q| < 1$, definiamo le "frazioni continue di Rogers-Ramanujan" attraverso la:

$$R(q) := \frac{q^{1/5}}{1} \, {}_{+} \frac{q}{1} \, {}_{+} \frac{q^2}{1} \, {}_{+} \frac{q^3}{1} \, {}_{+} \cdots,$$

e, definiamo: $S(q) := -R(-q)$ (8.3) e $K(q) := 1/R(q)$. (8.4)

Anche, per $|q| < 1$, le:

$$G(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} \qquad \text{e} \qquad H(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q;q)_n}$$

indicano le "funzioni di Rogers-Ramanujan", dove $(a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1 - aq^k)$, e dove, per la sequela $(a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a;q)_n$, $|q| < 1$. Rogers ha provato la rappresentazione

$$q^{-1/5}R(q) = \frac{H(q)}{G(q)}, \quad (8.5)$$

e le identità di Rogers-Ramanujan

$$G(q) = \frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty} \qquad \text{e} \qquad H(q) = \frac{1}{(q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty}. \quad (8.6)$$

Inoltre, combinando la (8.5) con le (8.6), otteniamo l'elegante rappresentazione:

$$R(q) = q^{1/5} \frac{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty}{(q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty}. \quad (8.7)$$

Ramanujan era profondamente interessato a determinare le formule esatte per $R\left(e^{-2\pi\sqrt{n}}\right)$ ed $S\left(e^{-\pi\sqrt{n}}\right)$ per valori razionali positivi di n. Nella sua prima lettera al matematico dell'Università di Cambridge G. H. Hardy, datata 16 Gennaio 1913, Ramanujan fornisce i valori

$$R\left(e^{-2\pi}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{e} \quad S\left(e^{-\pi}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

e nella sua seconda lettera del 27 Febbraio, fornisce il valore

$$R\left(e^{-2\pi\sqrt{5}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Inoltre, in entrambe le lettere, Ramanujan afferma che: " $R\left(e^{-\pi\sqrt{n}}\right)$ può essere esattamente trovato se n è qualche quantità razionale positiva".
Adesso, definiamo la funzione di Ramanujan $f(-q)$. Per $|q|<1$,

$$f(-q):=(q;q)_\infty=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2}. \quad (8.8)$$

La seconda uguaglianza nella (8.8) è il teorema del numero pentagonale di Eulero. Se $q=\exp(2\pi iz)$, dove $\operatorname{Im} z>0$, allora $q^{1/24}f(-q)=\eta(z)$, dove $\eta(z)$ indica la funzione-eta di Dedekind.

Teorema 1.
Adesso, sia $t=R(q)$, e poniamo $\alpha=(1-\sqrt{5})/2$ e $\beta=(1+\sqrt{5})/2$, Ramanujan ottenne le seguenti identità:

$$\frac{1}{\sqrt{t}}-\alpha\sqrt{t}=\frac{1}{q^{1/10}}\sqrt{\frac{f(-q)}{f(-q^5)}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha q^{n/5}+q^{2n/5}}, \quad (8.9)$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}-\beta\sqrt{t}=\frac{1}{q^{1/10}}\sqrt{\frac{f(-q)}{f(-q^5)}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\beta q^{n/5}+q^{2n/5}}, \quad (8.10)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^5-\left(\alpha\sqrt{t}\right)^5=\frac{1}{q^{1/2}}\sqrt{\frac{f(-q)}{f(-q^5)}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\alpha q^n+q^{2n}\right)^5}, \quad (8.11)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^5-\left(\beta\sqrt{t}\right)^5=\frac{1}{q^{1/2}}\sqrt{\frac{f(-q)}{f(-q^5)}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\beta q^n+q^{2n}\right)^5}. \quad (8.12)$$

Notiamo, per le posizioni che abbiamo fatto, che, ad esempio, la (8.9) e la (8.12), possono essere riscritte:

$$\frac{1}{\sqrt{R(q)}}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{R(q)}=\frac{1}{q^{1/10}}\sqrt{\frac{f(-q)}{f(-q^5)}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)q^{n/5}+q^{2n/5}}, \quad (8.9a)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{R(q)}}\right)^5-\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{R(q)}\right]^5=\frac{1}{q^{1/2}}\sqrt{\frac{f(-q)}{f(-q^5)}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)q^n+q^{2n}\right]^5}. \quad (8.12b)$$

Teorema 2.

Adesso, sia

$$t := q^{1/5}\,\frac{\chi(-q^{1/5})}{\chi(-q^5)} \qquad \text{e} \qquad s := \frac{\varphi(-q^{1/5})}{(-q^5)}.\ \text{Allora:}$$

$$\frac{f(-q^{1/5})}{q^{1/5} f(-q^5)} = \frac{s}{t}, \qquad \frac{f(-q^{2/5})}{q^{2/5} f(-q^{10})} = \frac{s}{t^2}, \qquad \frac{\psi(q^{1/5})}{q^{3/5}\psi(q^5)} = \frac{s}{t^3},\ \text{e}$$

$$2s = 1 - 2t - 2t^2 + t^3 + \sqrt{1 - 4t - 10t^3 - 4t^5 + t^6}\,.$$

Teorema 3.

Ora, sia t uguale alla forma data nel teorema 2, allora Ramanujan ottenne la seguente identità:

$$R(q) = \frac{1}{4t} \times \left[\left(1 + t\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\sqrt{1-t} - \sqrt{(1-t)\left(1 + t\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - 2t\left(\sqrt{5}+1\right)}\right] \times$$
$$\times \left[-\left(1 - t\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\sqrt{1-t} + \sqrt{(1-t)\left(1 - t\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 2t\left(\sqrt{5}-1\right)}\right].$$

Ramanujan derivò una formula simile anche per $R(q^2)$.

Adesso forniamo un elenco di tutte le equazioni modulari conosciute che riguardano R(q), precisamente, con due argomenti differenti.

Teorema 4.

Sia $u = R(-q)$ e $v = R(q)$. Allora, $uv(u-v)^4 - u^2v^2(u-v)^2 + 2u^3v^3 = (u-v)(1+u^5v^5)$.

Teorema 5.

Sia $u = R(q)$ e $v = R(q^2)$. Allora, $\dfrac{v-u^2}{v+u^2} = uv^2$.

Teorema 6.

Sia $u = R(q)$ e $v = R(q^3)$. Allora, $(v-u^3)(1+uv^3) = 3u^2v^2$.

Teorema 7.

Sia $u = R(q)$ e $v = R(q^4)$. Allora, $(u^5+v^5)(uv-1) + u^5v^5 + uv = 5u^2v^2(uv-1)^2$.

Teorema 8.

Sia $u = R(q)$ e $v = R(q^5)$. Allora, $\quad u^5 = v\dfrac{1-2v+4v^2-3v^3+v^4}{1+3v+4v^2+2v^3+v^4}$.

Tutti e quattro questi teoremi sono dovuti a Ramanujan. I teoremi 5, 6 e 7 furono espressi nel secondo "Quaderno" di Ramanujan, mentre il teorema 8 fu comunicato da Ramanujan nella sua prima lettera a G. H. Hardy.

Adesso, sia definita $f(-q)$ come nella (8.8). Avremo il

Teorema 9.

Per $0 < q < 1$, abbiamo: $\quad R(q) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\exp\left[-\dfrac{1}{5}\int_q^1 \dfrac{f^5(-t)}{f(-t^5)}\dfrac{dt}{t}\right]$ (8.13) e

$$R(q) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{1+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\displaystyle\int_0^q \dfrac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\dfrac{dt}{t^{4/5}}\right]}. \quad (8.14)$$

Per provare la (8.13), impieghiamo la famosa identità dovuta a Ramanujan:

$$\frac{f^5(-q)}{f(-q^5)} = 1 - 5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5}\right)\frac{nq^n}{1-q^n}, \quad |q| < 1, \ (8.15)$$

dove $\left(\dfrac{n}{5}\right)$ indica il simbolo di Legendre. Usando la (8.7) insieme alla (8.15), possiamo subito dedurre la (8.13). Per provare la (8.14), vengono impiegati i seguenti due lemmi e la (8.13).

Lemma 1.

Sia $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha\beta = \pi^2$, allora $\quad \alpha^{1/4}e^{-\alpha/12}f(-e^{-2\alpha}) = \beta^{1/4}e^{-\beta/12}f(-e^{-2\beta})$.

Lemma 2.

Sia $\alpha, \beta > 0, \alpha\beta = \pi^2, q := e^{-2\alpha}$ e $\quad Q := e^{-2\beta}$. Allora

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + R(q)\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + R(Q)\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Il precedente lemma fu comunicato da Ramanujan nella sua famosa seconda lettera al matematico Hardy. L'integrando nella (8.14) ha la seguente rappresentazione

$$q\frac{f^5(-q^5)}{f(-q)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5}\right)\frac{q^n}{(1-q^n)^2}, \quad |q| < 1, \ (8.16)$$

che accompagna la (8.15). L'uguaglianza (8.16) conduce ad un'elegante dimostrazione della congruenza di Ramanujan $p(5n+4)\equiv 0(\bmod 5)$, che abbiamo già esaminato (vedi eq. (7.5)), per la funzione di partizione p(n).

Teorema 10.

Sia $u = R(q)$ ed $\varepsilon = (1+\sqrt{5})/2$. Allora, per $|q|<1$, si ha

$$5^{3/4}\int_0^q \frac{f^2(-t)f^2(-t^5)}{\sqrt{t}}dt = 2\int_{\cos^{-1}\left((\varepsilon u)^{5/2}\right)}^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\varepsilon^{-5}5^{-3/2}\sin^2\phi}}.$$

9. <u>Correlazioni con la teoria di stringa</u>.

Prendiamo, a titolo d'esempio, la prima delle equazioni (5.4.5). Ricordando l'azione 10-dimensionale applicata alla supergravità di tipo IIB, avremo le seguenti connessioni:

$$\int d^{10}x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{4}R-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2-\frac{1}{12}e^{-2\Phi}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right]\to\phi=-\frac{5}{4}\log\frac{r}{2}\Rightarrow-\int_0^T f(t)dt=-[(1+\varepsilon')T\log T]\to$$

$$\to I(k)=\int_0^\infty\left(\frac{\sin ku}{u}\right)^2 f(u)du=\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon'(k)\right)k\log\frac{1}{k}\to$$

$$\to\frac{\left|\left\{(\gamma,\gamma'):0<\gamma,\gamma'\le T,2\pi\alpha(\log T)^{-1}\le\gamma-\gamma'\le 2\pi\beta(\log T)^{-1}\right\}\right|}{\frac{T}{2\pi}\log T}\approx\int_\alpha^\beta\left[1-\left(\frac{\sin\pi u}{\pi u}\right)^2\right]du \text{ per } T\to\infty\to$$

$$\to[P=6n\pm 1; P_n=6f\pm 1; F_n=6k,6k\pm 1,6k\pm 2,6k\pm 3; p(n)=6k,6k\pm 1,6k\pm 2,6k\pm 3]. \quad (9.1)$$

Quindi, avremo che la soluzione 10-d applicata alla supergravità di tipo IIB, è correlata alle equazioni inerenti il Teorema di Goldston-Montgomery (connesso alla funzione zeta di Riemann). Queste, a loro volta, sono correlate alla formula di Montgomery-Odlyzko. Questa espressione riguarda la funzione di correlazione di coppia degli zeri della funzione zeta, che è simile a quella delle matrici casuali hermitiane utilizzate come modelli per la distribuzione dei livelli di energia in sistemi costituiti da molte particelle. Ma gli zeri della funzione zeta, sono strettamente correlati alla distribuzione dei numeri primi. Quindi, tale espressione è correlata anche alle successive relazioni inerenti i numeri primi, i numeri primi naturali, i numeri di Fibonacci e le partizioni che, come abbiamo visto in precedenza, sono tutti strettamente interconnessi. È inoltre interessante evidenziare che, se l'azione 10-dimensionale applicata alla supergravità di tipo IIB è connessa anche a p(n) e ad F_n, quindi alla funzione di partizione ed alla serie di Fibonacci, entrambe correlate tra l'altro alla funzione zeta, come è stato dimostrato dalle argomentazioni matematiche precedentemente esposte, ricordando l'equazione (8.14) che è correlata alle proprietà di congruenza soddisfatte da p(n), e l'equazione (8.9a) correlata alle identità di Rogers-Ramanujan e, conseguentemente, alla sezione aurea, avremo le ulteriori nuove connessioni:

$$\int d^{10}x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{4}R-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2-\frac{1}{12}e^{-2\Phi}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right]\rightarrow\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right]}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{1}{\sqrt{R(q)}}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{R(q)}=\frac{1}{q^{1/10}}\sqrt{\frac{f(-q)}{f(-q^5)}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)q^{n/5}+q^{2n/5}}. \quad (9.2)$$

Su alcune equazioni inerenti le proprietà del vuoto eterotico da superpotenziali, collegate alle compattificazioni della teoria eterotica su varietà complesse 6-dimensionali non Kahleriane. [10]

Le varietà non Kahleriane che ora verranno descritte, sono tutti spazi 6-dimensionali del tipo

$$ds^2=\Delta_1^2 ds_{CY}^2+\Delta_2^2\left|dz^3+\alpha dz^1+\beta dz^2\right|^2, \quad (9.3)$$

dove $\Delta_i=\Delta_i(|z_1|,|z_2|)$ sono i fattori di curvatura e α,β dipendono da z^i e $\bar{z}^j$, le coordinate dello spazio interno. Lo spazio quadridimensionale di Calabi-Yau principale è descritto attraverso z^1 e z^2. Queste funzioni sono descritte da

$$\alpha=2i\bar{z}^2, \quad \beta=-(4+2i)\bar{z}^1, \quad \Delta_1^2\equiv\Delta^2=c_0+\psi(|z^1|,|z^2|), \quad \Delta_2=1, \quad (9.4)$$

dove c_0 è una costante, e $\psi\rightarrow 0$ quando la dimensione della varietà diviene infinita.
Il superpotenziale ha la forma

$$W_{het}=\int G\wedge\Omega, \quad (9.5)$$

dove G è una 3-forma e Ω è la (3,0)-forma olomorfa della varietà interna 6-dimensionale.
Di solito dove non c'è torsione, G è la 3-forma reale della teoria eterotica. Anche in presenza di torsione, ancora abbiamo la 3-forma reale, ma vi è un'altra scelta per la 3-forma G che compare nel superpotenziale sopra menzionato, che è necessaria per varietà interne non Kahleriane. Questa 3-forma G è sempre libera da anomalia (anomaly free) e gauge invariante e soddisfa la seguente equazione

$$G=d\mathrm{B}+\alpha'\left[\Omega_3\left(\omega_0-\frac{1}{2}\tilde{G}\right)-\Omega_3(\mathrm{A})\right], \quad (9.6)$$

dove $\Omega_3(\mathrm{A})=Tr\left(\mathrm{A}\wedge F-\frac{1}{3}\mathrm{A}\wedge\mathrm{A}\wedge\mathrm{A}\right)$ è il termine di Chern-Simons per il campo di gauge A e $\Omega_3(\omega_0)$ è il termine di Chern-Simons per la connessione di spin di torsione libera (torsion free spin-connection) ω_0, mentre B è il potenziale 2-forma della teoria eterotica. $\tilde{G}$ è la 1-forma ricavata dalla 3-forma G usando e_i^a ("vielbeins") come $\tilde{G}_i^{ab}=G_{ijk}e^{aj}e^{bk}$. Notiamo che G compare su entrambi i membri dell'equazione di sopra è quindi occorre risolvere "iterativamente" tale equazione per poter determinare G. La soluzione dell'equazione è

$$G+\frac{\alpha'}{2}tr\left(\omega_0\wedge R_{\tilde{G}}+\tilde{G}\wedge R_{\omega_0}-\frac{1}{2}\tilde{G}\wedge R_{\tilde{G}}\right)=d\mathrm{B}+\alpha'\left(\Omega_3(\omega_0)-\Omega_3(\mathrm{A})\right), \ (9.7)$$

dove sono state introdotte le curvature polinomiali $R_{\tilde{G}}$ ed R_{ω_0}, cioè

$$R_{\tilde{G}}=d\tilde{G}-\frac{1}{3}\tilde{G}\wedge\tilde{G}, \quad \text{e} \quad R_{\omega_0}=d\omega_0+\frac{2}{3}\omega_0\wedge\omega_0. \ (9.8)$$

Adesso, se indichiamo la dimensione della varietà interna con t, otteniamo dalla (9.7), un'equazione cubica, che prende la forma generale

$$h^3+ph+q=0 \quad \text{con} \quad G_{ijk}=hC_{ijk}, \quad \text{e} \quad g_{ij}=tg^0_{ij}, \ (9.9)$$

per ciascuna componente della 3-forma G. Qui C è un tensore antisimmetrico costante in sei dimensioni, le cui contrazioni sono fatte rispetto alla metrica g^0_{ij}. Inoltre, g^0_{ij} è scelta localmente costante. Inoltre, p, q ed f vengono definite come

$$p=\frac{t^3}{\alpha'}, \quad q=-\frac{ft^3}{\alpha'} \quad \text{e} \quad f=\left(d\mathrm{B}+\alpha'\Omega_3(\omega_0)-\alpha'\Omega_3(A)\right)_{ijk}\varepsilon^{ijk}. \ (9.10)$$

La prima equazione nella (9.9) ha tre radici. Una di esse è reale e le altre due sono complesse coniugate di ciascun altra. La radice reale compare nella trasformazione di supersimmetria dell'azione effettiva a bassa energia della stringa eterotica.
Adesso, consideriamo la lagrangiana eterotica, data dalla seguente equazione

$$S=\frac{1}{\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{g}e^{-2\phi}\left[R+4|\partial\phi|^2-\frac{1}{2}|f|^2+\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr|F|^2+\mathrm{O}\left(\alpha'^2\right)\right], \ (9.11)$$

dove $F=d\mathrm{A}+Tr\mathrm{A}\wedge\mathrm{A}$ ed f è data dalla (9.10). È possibile riscrivere la lagrangiana di sopra in maniera alternativa, per tutti gli ordini in α', nel modo seguente

$$S=\int_{\mathrm{M}_6}e^{-2\phi}\left[2|G|^2+Tr|F|^2+\sum_{m,n,p}a_{mnp}G^mF^nR^p\right]-\frac{1}{\kappa_4^2}\int d^4x\sqrt{g_4}e^{-2\phi}|\partial\phi|^2+\ldots, \ (9.12)$$

dove i termini di interazione sono stati contratti propriamente a forme scalari. Nella lagrangiana di sopra si richiede che G soddisfi le seguenti condizioni: (a) sia complesso; (b) sia con anomalia libera (anomaly free) e gauge invariante; (c) sia localmente rappresentato come

$$G=a(\mathrm{H}+\ldots)+ib(\omega_0+\ldots), \ (9.13)$$

dove H è la 3-forma reale della teoria eterotica (la radice reale dell'equazione di anomalia), a e b sono costanti arbitrarie. La radice complessa dell'equazione cubica deve soddisfare tutte e tre le condizioni su menzionate, possibile coefficiente dei termini geometrici (e quindi gauge invariante) che può in principio contribuire alla parte immaginaria della 3-forma G. Le tre radici dell'equazione cubica (9.9) possono essere scritte in termini di p e q. Definiamo due variabili A e B, che sono funzioni di p e q, in modo che le radici dell'equazione cubica sono

$$A+B\,, \qquad -\frac{1}{2}(A+B)\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B). \quad (9.14)$$

Le variabili A e B sono definite come

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \qquad \text{e} \qquad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

e sono reali. Quindi, la radice reale dell'equazione cubica è A + B. Questa è infatti la 3-forma eterotica che compare nella lagrangiana.
Il campo tensoriale H_{RR} della teoria di tipo IIB si rivolge alla radice reale H della teoria eterotica ed il campo tensoriale H_{NS} si rivolge alla connessione di spin. Adesso, effettuiamo la trasformazione

$$H_{RR}\to iH_{RR} \quad \text{e} \quad H_{NS}\to iH_{NS}\,, \quad (9.15)$$

tale trasformazione convertirà l'equazione cubica (9.9) in

$$G^3-pG+iq=0\,, \quad (9.16)$$

dove abbiamo preso $G\to iG$ nella (9.9). Adesso, effettuiamo la trasformazione $q\to iq$, da cui otterremo

$$G^3-pG-q=0\,, \qquad p>0\,,\; q>0\,, \quad (9.17)$$

le cui radici sono tutte reali. Le tre radici reali sono date da $2a\cos\frac{\theta}{3}$ e $-a\left(\cos\frac{\theta}{3}\pm\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)$, dove abbiamo definito $a=\sqrt{\frac{p}{3}}$ e $\cos\theta=\frac{q}{2}\sqrt{\frac{27}{p^3}}$.

Riguardo al superpotenziale perturbativo completo per la teoria eterotica compattificato sulla varietà non Kahleriana M_6, quando consideriamo una curvatura non banale ed anche possibili termini geometrici nella 3-forma complessa G, questo è dato dalla

$$W=\int_{\mathrm{M}_6}[\mathrm{H}+idJ]\wedge\Omega+\int_{\mathrm{M}_6}F\wedge J\wedge J\,. \quad (9.18)$$

La generica forma della 3-forma sarà adesso data dall'espressione

$$G=(a\mathrm{H}+*_6A)+i(dJ+B)\,, \quad (9.19)$$

dove A e B sono funzioni generiche di ω_0, la connessione di spin di torsione libera (torsion-free spin-connection). Quando consideriamo al primo ordine in α' nell'equazione di anomalia, otteniamo un'equazione cubica dove si ha che A = B = 0 , e quindi G è dato da

$$G=a\mathrm{H}+idJ\,. \quad (9.20)$$

Adesso riprendiamo l'equazione (9.16) ed effettuiamo la trasformazione $q \to -iq$, avremo

$$G^3 - pG + q = 0 \quad \text{con} \quad p > 0 \text{ e } q > 0. \quad (9.21)$$

Poniamo q = 1 e p = 2 , avremo $G^3 - 2G + 1 = 0$, equazione del tipo $x^3 - 2x + 1 = 0$. Le tre radici di tale equazione saranno: 1, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Queste ultime due radici sono uguali a 0,618033 cioè alla "sezione aurea" e -1,618033 cioè al "rapporto aureo" con segno meno. Queste due radici possono anche scriversi come $\varphi = 0{,}618033$ e $-\Phi = -1{,}618033$. La (9.18) che è l'equazione del superpotenziale perturbativo completo per la teoria eterotica compattificato su di una varietà non Kahleriana M_6,

$W = \int_{M_6} [H + idJ] \wedge \Omega + \int_{M_6} F \wedge J \wedge J$, essendo per la (9.20) $G = aH + idJ$, posto a = 1, diviene
$W = \int_{M_6} G \wedge \Omega + \int_{M_6} F \wedge J \wedge J$, e quindi

$$W = \int_{M_6} 0{,}618033 \wedge \Omega + \int_{M_6} F \wedge J \wedge J = \int_{M_6} \varphi \wedge \Omega + \int_{M_6} F \wedge J \wedge J. \quad (9.22)$$

Infine, dalla (9.12), che è la lagrangiana eterotica, posto $G = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}618033$, da cui $|G|^2 = |-1{,}618033|^2 = 2{,}618033 = 1 + \Phi = 2 + \phi$, avremo:

$$S = \int_{M_6} e^{-2\phi}\left[2(1+\Phi) + Tr|F|^2 + \sum_{m,n,p} a_{mnp} G^m F^n R^p\right] - \frac{1}{\kappa_4^2}\int d^4x\sqrt{g_4}\,e^{-2\phi}|\partial\phi|^2 + \ldots \quad (9.23)$$

È interessante evidenziare che, anche in questo caso, tale equazione è connessa a p(n) ed F_n, quindi alla funzione di partizione ed alla serie di Fibonacci. Infatti, ricordando le equazioni (8.9a) ed (8.14), avremo le ulteriori connessioni:

$$S = \int_{M_6} e^{-2\phi}\left[2(1+\Phi) + Tr|F|^2 + \sum_{m.n.p} a_{mnp} G^m F^n R^p\right] - \frac{1}{\kappa_4^2}\int d^4x\sqrt{g_4}\,e^{-2\phi}|\partial\phi|^2 + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{R(q)}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{R(q)} = \frac{1}{q^{1/10}}\sqrt{\frac{f(-q)}{f(-q^5)}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)q^{n/5} + q^{2n/5}}. \quad (9.24)$$

Ringraziamenti.

È espresso desiderio di M. Nardelli, coautore e curatore del presente lavoro, rivolgere i seguenti ringraziamenti.
Sono grato a F. Di Noto e ad A. Tulumello, per la loro proficua collaborazione, particolarmente al Di Noto per l'invio del prezioso materiale che ha permesso la stesura e l'elaborazione della presente tesi. Sono grato, inoltre, al mio amico e collega A. Palumbo, per i suoi utili suggerimenti ed importanti conversazioni.
Infine, desidero rivolgere un ringraziamento particolare a G. Tasinato dell'Università di Oxford, per l'amicizia e disponibilità sempre mostrata nei miei riguardi.

Bibliografia.

[1] Francesco Di Noto – Annarita Tulumello: "Teorema sulle coppie di Goldbach e le infinite coppie di numeri gemelli" – Metodo n.21, Giugno 2005.
[2] Michele Nardelli: "New Mathematical Connections Concerning String Theory" – Ed. Giannini – Settembre 2005.
[3] Michele Nardelli: "New Mathematical Connections Concerning String Theory II" – Ed. "Michelangelo" – Marzo 2006.
[4] A. Palumbo, M. Nardelli: "The Theory of String: A Candidate For A Generalized Unification Model" – Boll. Soc. Natur. Napoli – Nuova Serie – Vol III (in press).
[5] P. Chen, K. Dasgupta, K. Narayan, M. Shmakova, M. Zagermann: "Brane, Inflation, Solitons and Cosmological Solutions I" – hep-th/0501185.
[6] C. P. Burgess, C. Nunez, F. Quevedo, I. Zavala C., G. Tasinato: "General Brane Geometries from Scalar Potentials: Gauged Supergravities and Accelerating Universes" – JHEP08 (2003) 056.
[7] A. Languasco: "La Congettura di Goldbach" – Tesi di Dottorato di Ricerca in Matematica – Università degli Studi di Genova, VI ciclo, 1995.
[8] A. M. Odlyzko: "On The Distribution of Spacings Between Zeros of the Zeta Function" – AT&T Bell Laboratories – Murray Hill, New Jersey. (SPIRES DATABASE)
[9] Bruce C. Berndt, Heng Huat Chan, Sen-Shan Huang, Soon-Yi Kang, Jaebum Sohn and Seung Hwan Son: "The Rogers-Ramanujan Continued Fraction". (SPIRES DATABASE)
[10] K. Becker, M. Becker, K. Dasgupta and S. Prokushkin: "Properties of Heterotic Vacua From Superpotentials" – Nucl. Phys. B666 (2003) 144-174 – hep-th/0304001

Finito di stampare a Napoli nel mese di Settembre 2006