Su alcuni contributi al programma Langlands: ulteriori connessioni tra alcuni fenomeni fisici naturali, Teoria dei Numeri e Teoria di Stringa.

Michele Nardelli[1,2] e Francesco Di Noto

[1] Dipartimento di Scienze della Terra
Università degli Studi di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10
80138 Napoli, Italy

[2] Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Polo delle Scienze e delle Tecnologie
Monte S. Angelo, via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

INTRODUZIONE

Il programma Langlands si propone di connettere la Teoria dei Numeri con la Teoria quantistica dei Campi. Tale connessione, secondo noi, è possibile, in quanto i fenomeni naturali (compresi i fenomeni fisici, ed a maggior ragione i fenomeni quantistici studiati dalla Teoria Quantistica dei Campi) sono regolati notoriamente da leggi fisiche connesse con variazioni di quantità (spazio, tempo, materia, energia, ecc…); e poiché le quantità sono espresse da numeri, ed i numeri sono regolati dalla Teoria dei Numeri, ecco che è possibile una correlazione tra teorie fisiche in generale e teoria quantistica dei campi in particolare, poiché qui diviene importante l'aritmetica dei numeri interi. A questo livello, infatti, non è possibile parlare di 1/2 quanto o di 3,7 quanti ma soltanto di un quanto, due quanti, n quanti interi.
A sua volta, la teoria dei numeri interi è molto importante nell'algebra (teoria algebrica dei numeri) oltre che nella teoria aritmetica dei numeri.
La Natura, quindi, nel microcosmo opera sui numeri interi n (insieme N) che sono infiniti. Ma c'è da pensare che tra i numeri interi, la Natura scelga, per regolare i suoi fenomeni microscopici (e quindi quantistici) e poi su larga scala anche i fenomeni macroscopici, solo alcuni tipi di numeri interi. Tali numeri sono i numeri primi ed i numeri di Fibonacci, che combinati insieme forniscono i numeri primi naturali, che regolano le vibrazioni delle stringhe e la stabilità nucleare, i numeri (anch'essi interi) che riguardano le partizioni, che regolano i livelli energetici degli atomi, le cui spaziature sono connesse alle spaziature tra gli zeri della funzione zeta di Riemann sui numeri primi.
Di tutto ciò ne abbiamo già parlato nel lavoro "Sulle possibili relazioni matematiche tra Funzione zeta di Riemann, Numeri Primi, Serie di Fibonacci, Partizioni e Teoria di Stringa" (Nardelli, Di Noto, Tulumello), ed altri possibili contributi, come il presente lavoro, seguiranno nel futuro, come il "Progetto UNICOM" (già descritto in maniera parziale in questo ed in quasi tutti i precedenti lavori), sulla possibile unificazione delle costanti matematiche "c", ϕ, Φ, π, ed altre, tutte connesse in qualche modo da un lato con i numeri primi, e dall'altro con la teoria delle stringhe; la

Congettura dei due divieti, che cerca di connettere numeri primi, zeri di zeta e livelli energetici degli atomi (quindi vibrazioni di stringhe associate a tali livelli energetici).
Questi nostri lavori potrebbero essere un utile contributo al programma Langlands, poiché parlano di numeri interi particolari (primi, Fibonacci, partizioni) connessi con la teoria delle stringhe, che è una teoria fisica quantistica e relativistica (quindi cosmologica) allo stesso tempo, connessa quindi con la gravità quantistica, con la materia/energia oscura, le dimensioni nascoste, le membrane (o brane), etc…
In questa parte introduttiva, dedicata al programma Langlands, vogliamo riportare, oltre alle nostre considerazioni, anche quelle, molto utili ed importanti su questo argomento, del fisico australiano Paul Davies, tratte dal suo libro "La Mente di Dio", sul perché le leggi fisiche debbano essere espresse in forma matematica.
L'esistenza di regolarità nella Natura è un fatto matematico oggettivo. Le leggi naturali sono universali. Esse sono infatti considerate infallibilmente valide in ogni luogo dell'Universo ed in tutte le epoche della storia cosmica. Non sono consentite eccezioni: in questo senso sono anche perfette. Le leggi naturali sono assolute ed eterne. Il carattere atemporale, eterno delle leggi è riflesso nelle strutture matematiche impiegate per costruire modelli del mondo fisico. Nella meccanica classica, per esempio, le leggi della dinamica sono rappresentate in una funzione matematica detta "hamiltoniana" che agisce su ciò che viene chiamato "lo spazio delle fasi". Il fatto essenziale è che la hamiltoniana e lo spazio delle fasi sono indipendenti dal moto del punto che rappresenta lo stato del sistema.
Già al tempo di Platone alcuni filosofi sostenevano che la matematica possedesse un'esistenza indipendente. Il fatto che il mondo fisico rifletta le proprietà computazionali dell'aritmetica ha una profonda conseguenza. Significa che, in un certo senso, il mondo fisico è un computer, o, più precisamente, i computer non solo possono simularsi l'un l'altro, ma possono anche simulare il mondo fisico. C'è allora una *concordanza* cruciale fra le leggi della fisica da una parte e, dall'altra, la computabilità delle funzioni matematiche che descrivono *queste stesse leggi*.
I progressi più validi della fisica delle particelle sono venuti dall'uso di un ramo della matematica noto come "Teoria dei Gruppi" e strettamente collegato al tema della simmetria, una delle manifestazioni "favorite" della Natura. È possibile usare la teoria dei gruppi per associare, mettendole in famiglie unificate, particelle apparentemente distinte. Ora, il modo in cui questi gruppi possono essere rappresentati e combinati ed il numero delle particelle di ogni tipo che descrivono, sono determinati da regole matematiche ben definite e si spera che da tutto ciò emerga una descrizione in termini di teoria dei gruppi che richieda tre generazioni di particelle. A quel punto, l'apparente prodigalità della Natura ci apparirà una conseguenza necessaria di una simmetria unificatrice più profonda. (Davies, 1992).
Avremo, quindi, la seguente successione.

N = Teoria dei Numeri (interi: primi, Fibonacci, partizioni, ecc…) → Formule Matematiche (Matematica) → F = Leggi fisiche classiche e quantistiche (Natura) ←→ Connessione Matematica : rappresentazione razionale della connessione N → F .

Un accenno alla relazione tra aritmetica e fisica quantistica, relazione che dovrà essere la struttura portante del programma Langlands, almeno nei nostri contributi in tal senso, è riportato nel libro "L'Ossessione dei Numeri Primi" di J. Derbyshire. In esso sono riportate le osservazioni che seguono. "*…Non sorprende che la teoria pura dei numeri – i concetti che riguardano i numeri naturali e le loro relazioni reciproche – debba avere attinenza con la fisica subatomica. La fisica quantistica ha una componente aritmetica molto forte rispetto alla fisica classica, poiché dipende dall'idea che materia ed energia non siano infinitamente divisibili. L'energia si presenta in forma di 1, 2, 3 o 4 quanti, ma non come 1 + 1/2 , 2 + 17/32,* $\sqrt{2}$ *o* π *quanti. Certo questo non è tutto e la meccanica quantistica non avrebbe potuto essere sviluppata senza gli strumenti più potenti dell'analisi moderna. La famosa equazione d'onda di Schrodinger, per esempio, è scritta nel* *linguaggio dell'analisi tradizionale. Eppure, la componente aritmetica è nella meccanica quantistica, mentre nella meccanica classica è quasi del tutto assente*".

Quindi, relazione tra numeri interi e fisica quantistica come punto d'inizio. Noi con i nostri contributi (lavori passati e futuri su questo argomento), abbiamo fatto un importante passo avanti: abbiamo compreso e suggerito come tra i numeri interi, la Natura (a cominciare proprio dalla fisica quantistica) sembra preferire numeri interi "particolari", per conferire stabilità e regolarità ai suoi fenomeni. Tali numeri interi particolari, sottoinsiemi infiniti degli infiniti numeri naturali, come abbiamo visto e vedremo ancora nei nostri lavori, sono:

(i) I numeri primi, correlati alla funzione zeta di Riemann, a sua volta correlata ai livelli energetici degli atomi (quindi alle vibrazioni delle stringhe associate a tali livelli), tramite la connessione tra le spaziature di questi ultimi e le spaziature tra gli zeri di zeta;

(ii) I numeri di Fibonacci che, come coefficienti f della forma generale dei numeri primi, $P = 6n \pm 1$, danno luogo ai numeri primi "naturali", di forma $P_n = 6f \pm 1$, i quali sono associati alle frequenze di vibrazioni delle stringhe ed ai numeri magici M della stabilità nucleare, oltre che alle emissioni di biofotoni. Sia le stringhe, sia gli atomi, sono oggetti di studio della fisica quantistica;

(iii) I numeri di Fibonacci che, oltre che nei numeri primi naturali a livello quantistico, a livello di fisica classica sono coinvolti nelle spirali delle galassie, e a livello biologico nelle spirali di fiori, pigne, conchiglie, ecc…;

(iv) Il numero di partizioni di n, simbolo p(n), cioè il numero delle somme possibili con risultato finale n, ossia il numero dei modi in cui un insieme di n oggetti può essere suddiviso in gruppi distinti. Le partizioni a livello quantistico, sono associate al modo in cui variano i livelli energetici degli atomi e quindi alla variazione dell'energia associata alle vibrazioni delle stringhe.

Tutti questi numeri sono chiaramente interi, e ciascun tipo, per la sua parte, contribuisce a regolare, da solo e/o insieme agli altri, i fenomeni quantistici, per esempio le vibrazioni delle stringhe (numeri primi naturali), i livelli energetici (numeri primi tramite gli zeri della funzione zeta di Riemann e partizioni) e stabilità nucleare (numeri primi naturali, tramite i numeri magici della stabilità nucleare). Da evidenziare che i numeri di Fibonacci sono "nascosti" nei numeri primi naturali $P_n = 6f_n \pm 1$ come coefficienti f_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,…

I passi successivi saranno certamente le nuove ed ulteriori connessioni tra questi tipi di numeri con la teoria delle stringhe, con la Congettura (adesso Teorema) di Poincarè (già dimostrata dai due matematici cinesi Huai-Dong Cao e Xi-Ping Zhu e oggetto dell'interessante articolo "Poincarè and Geometrization Conjectures: mathematical connections between String Theory, Ricci Flow and Number Theory" di M. Nardelli), con la matematica associata alla dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat, e possibilmente si spera anche con gli aspetti quantistici della materia/energia oscura, dell'anti-materia, della fusione nucleare, etc…, sotto l'aspetto puramente matematico anzi, in questo caso, aritmetico.

Una volta compresi meglio tutti questi fenomeni connessi alla Teoria dei Numeri (e realizzando almeno in parte il programma Langlands), con i risultati ottenuti sarà possibile, successivamente, fare previsioni ed integrazioni dei medesimi con il Modello Standard della fisica delle particelle e con la Teoria di Stringa/Teoria M e infine, ovviamente se tutto andrà per il verso giusto, ottenere anche delle possibili ed augurabili sperimentazioni di laboratorio.

1. **I Numeri Primi Naturali e le cariche elettriche frazionarie**

Per numeri primi naturali intendiamo un particolare sottoinsieme dei normali numeri primi, di forma $P = 6n \pm 1$, in base al nostro Teorema n° 1 (Vedi "Primi per tutti" sul sito gio22). I numeri primi naturali, che chiamiamo così perché sembrano coinvolgere diversi fenomeni fisici naturali, per esempio le vibrazioni delle stringhe e la stabilità nucleare (vedi il lavoro " Numeri primi, Partizioni, Fibonacci e Teoria di stringa – Connessioni tra Teoria dei Numeri e Teoria di Stringa) e l'emissione di biofotoni da parte del corpo umano (vedi "I biofotoni e i numeri primi naturali"), ma anche, molto probabilmente, il ciclo biologico di due specie di cicale (vedi, su sito gio22 "Teorema di Goldbach, numeri primi e cicli biologici delle cicale") e, come vedremo nelle pagine successive, anche le possibili cariche frazionarie diverse da quella, unitaria e nota, dell'elettrone.
Tornando ai numeri primi naturali Pn, questi, (a differenza di quelli noti di forma $P = 6n \pm 1$) sono di forma

$$Pn = 6f \pm 1 \qquad (1.1)$$

dove f è la nota serie dei numeri di Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5,
13, 21, 34, 55, 89…, e che dà i seguenti numeri primi naturali :

T A B E L L A 1:

f	6 f - 1	6 f + 1
(0)	(-1)	(+1) numero primo improprio
1	5	7
2	11	13
3	17	19
5	29	31
8	47	49 = 7 * 7 = 7 ^ 2
13	77 = 7 *11	79
21	125 = 5*5*5	127
34	203 = 7*29	205 = 5*41
55	329 = 7*47	331
…		… …

Quindi, la serie iniziale dei numeri primi naturali è, fino a 331, la seguente:

5	7	11	13	17	19	
29	31	47	79	127	331	…

Oltre che alle frequenze delle vibrazioni delle stringhe, alla stabilità nucleare, ai cicli biologici di due specie di cicale (13 e 17 anni), tali numeri primi naturali potrebbero essere collegati anche alle cariche elettriche frazionarie 1/5, 1/11, 1/13 e 1/53 (sebbene 53 non sia numero primo naturale ma numero primo normale, ma molto vicino a 47 che è primo naturale, e il coefficiente 9 di 53=6*9-1 è contiguo a 8 di 47 = 6*8-1, con 8 numero di Fibonacci) .
Così infatti si legge nell'articolo "Superstringhe" della rivista Focus: …"La presenza di dimensioni nascoste, consente alle stringhe di vibrare in un'infinità di modi diversi, molto più di quanto si possa immaginare. La teoria delle stringhe, quindi, consente non solo di descrivere le particelle note come l'elettrone o i quark, ma anche di prevederne di nuove.
Alcune peserebbero di più di un atomo, altre avrebbero carica frazionaria, pari a 1/5, 1/11, 1/13 o 1/53 di quella dell'elettrone…"

E come abbiamo visto nella TABELLA 1, 5, 11, e 13 sono numeri primi naturali, e 53 è molto vicino al numero naturale 47 e, comunque, è un numero primo. Anche la rivista "Le Scienze" di aprile 2002, nell'articolo "Il rumore delle cariche frazionarie", accenna ai suddetti numeri includendo anche il 3, che non essendo numero primo naturale è un primo normale, oltre che numero di Fibonacci; pag.71:
…" Sorprendentemente, sono state scoperte altre quasi-particelle, la cui carica elettrica vale un terzo, un quinto o un settimo di quella dell'elettrone libero…"
(L'articolo, di Laurent Saminadayar e al quale rimandiamo, riporta le previsioni e gli esperimenti sulle misure delle cariche frazionarie).
Concludendo, anche tali cariche frazionarie, così come quella intera dell'elettrone, e con a denominatore numeri dispari ma possibilmente anche primi e soprattutto primi naturali, potrebbero essere benissimo causate dalle vibrazioni delle stringhe con frequenze collegabili ai numeri primi naturali.
I quali, oltre che alle vibrazioni delle stringhe stesse, alla stabilità nucleare, all'emissione di biofotoni da parte del corpo umano, ai cicli biologici delle cicale, potrebbero ora aggiungere anche le cariche frazionarie ai fenomeni naturali ad essi collegabili.

1.1 Cariche frazionarie e Teoria di Stringa

Il 1897, il fisico britannico Joseph John Thomson scopriva che i raggi emessi da un catodo sono costituiti da particelle elementari dotate di massa e di carica elettrica negativa: gli elettroni. Nel 1911, Robert Millikan forniva la prova definitiva dell'esistenza di una carica elettrica elementare e ne determinava il valore: la carica dell'elettrone valeva (e vale) $1{,}602 \times 10^{-19}$ coulomb. Lo studio delle cariche frazionarie sta suscitando un interesse sempre più vasto. Le cariche frazionarie hanno fatto la loro comparsa una ventina d'anni fa. Per spiegare i valori misurati della conduttività in certi solidi, alcuni teorici hanno ipotizzato l'esistenza di particelle la cui carica sarebbe pari ad una frazione della carica elettronica. Ciò non significa che l'elettrone sia divisibile; queste cariche sono trasportate da quasi-particelle.
La scoperta dell'effetto Hall quantistico intero e frazionario è stata fondamentale per dimostrare l'esistenza di cariche frazionarie; in quest'ultimo effetto le quasi-particelle, corrispondenti ad eccitazioni elementari del sistema, trasportano un terzo di carica elementare.
L'effetto Hall quantistico compare a temperature molto basse (inferiori a 100 millikelvin) e per campi magnetici molto intensi. In questo caso, la resistenza di Hall presenta dei "plateau": uno rappresenta la resistenza elementare h/e^2, un altro compare per un valore di resistenza pari a $h/2e^2$, e così via. Nel caso dell'effetto Hall quantistico frazionario, i valori della resistenza di Hall sono frazioni che hanno denominatore dispari. L'effetto Hall quantistico frazionario si manifesta quando si applicano campi magnetici superiori a quelli per cui si ha effetto Hall quantistico intero. La resistenza longitudinale è nulla sui plateau di Hall.
Abbiamo quindi affermato che i plateau, nel caso dell'effetto Hall quantistico frazionario, compaiono in corrispondenza di multipli non interi della resistenza fondamentale, e si esprimono come frazioni con denominatore dispari: 1/3, 2/3, 1/5 e così via. Da dove vengono questi plateau? È stato il fisico statunitense Robert Laughlin a trovare un modello teorico per spiegare innanzitutto l'effetto Hall quantistico intero, e poi anche questo effetto Hall quantistico frazionario, e per costruire la sua teoria ha dovuto ricorrere proprio alle cariche frazionarie. Quando il rapporto tra il numero di elettroni e quello di quanti è uguale a frazioni di denominatore dispari, allora il campo magnetico corrisponde ad un plateau di Hall frazionario.
Nell'esperimento di "Effetto Tunnel", una corrente di quasi-particelle circola nei canali di bordo di un gas di elettroni bidimensionale sottoposto ad un forte campo magnetico perpendicolare. Questa corrente viene deviata grazie a due griglie a forma di punta. Queste griglie sotto tensione riducono la distanza che separa i canali di bordo: essa passa da un millimetro a 100 nanometri. Diviene, cioè, sufficientemente piccola perché le particelle passino da una punta all'altra per effetto tunnel: esse

creano una corrente tunnel. Misurando l'intensità e le fluttuazioni di questa corrente si ottiene la carica dei portatori, che vale un terzo della carica elementare dell'elettrone (e/3).
Nel 1999 un'equipe di fisici del Weizmann Institute di Rehovot, in Israele, ha osservato quasi-particelle di carica e/5, e si è provata l'esistenza di quasi particelle di carica e/7.
Riguardo alle cariche frazionarie, ci si chiede a quale delle due grandi famiglie di particelle esse appartengono: i bosoni o i fermioni? Sappiamo che gli elettroni sono fermioni. Le differenze tra fermioni e bosoni sono molte, ma una delle principali è che i bosoni sono "gregari", nel senso che in linea di principio un numero infinito di essi può stare nello stesso stato quantico. Al contrario i fermioni sono "solitari", poiché non se ne possono trovare due in un medesimo stato.
Secondo la teoria oggi più accettata, le cariche frazionarie non sono né bosoni né fermioni: si definiscono "anioni", una sorta di "intermediari" tra le due classi. Questi strani oggetti della fisica si comportano allo stesso tempo come fermioni e come bosoni. Di fatto, esisterebbe tutto uno spettro di anioni, di cui bosoni e fermioni rappresentano gli estremi: gli anioni passerebbero di continuo da uno stato fermionico ad uno bosonico e viceversa.
Le particelle elementari del modello standard hanno un assortimento molto limitato di cariche elettriche: i quark e gli anti-quark hanno cariche pari a $\pm 1/3$ e $\pm 2/3$; le altre particelle hanno cariche pari a ± 1 oppure carica nulla. Nella teoria delle stringhe, invece, sono possibili modi di vibrazione corrispondenti a particelle con cariche assai diverse ed "esotiche", come 1/5, 1/11, 1/13 o 1/53. Questi valori inconsueti (notiamo con interesse che 5, 11, 13 e 53 sono numeri primi) saltano fuori se le dimensioni compattificate hanno una precisa proprietà geometrica: i loro "buchi" sono tali che le stringhe che li circondano possono liberarsi soltanto se li "avvolgono" facendo un ben determinato numero di giri. La cosa importante da evidenziare è che il numero di avvolgimenti necessari per districarsi determinano il denominatore della carica frazionaria.
Ricordando che in Teoria di Stringa i bosoni sono rappresentati da stringhe bosoniche, quindi da azioni di stringhe bosoniche ed i fermioni da stringhe fermioniche, quindi da azioni di superstringhe, anche l'analisi fisico-matematica di tale fenomeno rafforza ulteriormente il modello Palumbo-Nardelli di corrispondenza biunivoca tra azione di stringa bosonica e azione di superstringa, espresso dalla seguente relazione:

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]=$$
$$=\int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_v\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]. \quad (1.2)$$

Prendiamo adesso i numeri puri 3, 5 e 7, cioè i denominatori delle tre cariche frazionarie e/3, e/5 ed e/7. Notiamo subito che tali numeri sono numeri primi, inoltre, essi soddisfano le seguenti relazioni in cui compaiono il rapporto aureo e la sezione aurea, cioè ϕ e Φ:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\left[\frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}\right]\cong 3;\ (1.3)\quad \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3+\left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3^2}\right)\right]\cong 5;\ (1.4)$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4+\frac{3\cdot 11}{2^2\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cong 7.\ (1.5)$$

Queste, a loro volta, sono correlate all'identità di Rogers-Ramanujan.
Difatti, per esempio per il 5, avremo:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3+\left[\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f\left(-t^{1/5}\right)}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3^2}\right)\right]\cong 5. \quad (1.6)$$

Anche quindi per la fisica delle cariche frazionarie è possibile evidenziare la correlazione che esiste sia con la Teoria dei Numeri sia con la Teoria delle Stringhe.

2. Materia oscura, Antimateria, Teoria dei Numeri e Teoria di Stringa: Proposta di ipotesi

Sulla materia oscura si conosce ancora molto poco: potrebbe essere costituita da particelle neutre (assioni) che interagiscono molto poco con le particelle di materia note e tra di loro, o da particelle elementari molto pesanti (del tipo wimps), che potrebbero avere effetti gravitazionali accettabili.
Si ritiene che la materia/energia ordinaria, quindi visibile, sia soltanto il 5% del totale nell'Universo e la differenza, il 95% (tra 25% di materia e 75% di energia) sia invece di materia/energia oscura.
Premettiamo che la natura della materia e dell'energia oscura non è ancora ben compresa. Sappiamo che la natura della materia/energia visibile è collegata alle vibrazioni delle stringhe. La frequenza delle vibrazioni è strettamente connessa ai numeri primi, soprattutto ai numeri primi naturali, quindi con il coinvolgimento dei numeri di Fibonacci, il numero di partizioni, ecc…, che potrebbero benissimo conferire stabilità, regolarità e capacità di interagire tra le particelle risultanti della seguente sequenza:

vibrazioni stringhe → quark → bosoni → fermioni → atomi → molecole

tramite il ruolo delle quattro forze fondamentali

gravità → elettromagnetismo → forza forte → forza debole.

Viene quindi spontaneo chiedersi, considerando che i numeri primi naturali sono una piccola percentuale dei numeri, se le particelle di materia oscura, specificamente gli assioni, non derivino da frequenze di vibrazioni di stringhe basate su altri numeri, che conferirebbero agli assioni le loro caratteristiche, teoriche o sperimentali:

- (i) carica neutra, non essendo soggette alla forza elettromagnetica;
- (ii) scarsissima interazione con gli altri assioni, elettricamente neutri;
- (iii) scarsissima interazione con le particelle della materia/energia visibile (il 5%) rimanente, che hanno invece carica elettrica;
- (iv) interazione soltanto gravitazionale a livello galattico, come da osservazioni astrofisiche.

A sostegno di tale nostra ipotesi sulla natura ultima della materia oscura (stringhe con vibrazioni diverse da quelle della materia normale), notiamo che i numeri primi naturali sono molto pochi rispetto a tutti gli altri.
Adesso, se prendiamo le prime cento unità, avremo la seguente tabella (f = numeri di Fibonacci):

n	f	$6f \pm 1$	Primi naturali
1	1	$6 \cdot 1 \pm 1$	5 , 7
2	2	$6 \cdot 2 \pm 1$	11 , 13
3	3	$6 \cdot 3 \pm 1$	17 , 19
4			
5	5	$6 \cdot 5 \pm 1$	29 , 31
6			
7			
8	8	$6 \cdot 8 \pm 1$	47
9			
10			
11			
12			
13	13	$6 \cdot 13 \pm 1$	79
…			
21	21	$6 \cdot 21 \pm 1$	127

Da questa notiamo che ci sono 11 numeri primi naturali su 127 unità, cioè l'8,6% contro il 91,4% (100 – 8,6 = 91,4) dei rimanenti numeri. Evidenziamo come 8,6 e 91,4 siano numeri molto vicini alle stime finora fatte sulla materia/energia visibile (5%) e materia/energia oscura (95%), stime che potrebbero migliorare in seguito a future osservazioni astronomiche e/o esperimenti.
Se i nuovi valori si avvicineranno molto ai valori da noi qui proposti (8,6% e 91,4%), questa nostra ipotesi, attualmente molto vaga e quindi abbastanza azzardata, diverrebbe più fondata a livello teorico, con il conforto dei nuovi dati delle osservazioni, più coerenti degli attuali numeri 5% e 95% come rispettive percentuali, con rapporto 95/5 = 19 e dei dati da noi proposti 8,6% e 91,4% con rapporto 91,4/8,6 = 10,62; 127/11 = 11,54 $(10,6 \approx 11,5)$ (rapporto tra unità considerate e numero dei numeri primi naturali in esse compresi); mentre il rapporto tra 100% e 5% è 100/5 = 20 $(20 \approx 19)$.
Se però consideriamo un solo numero primo per ogni coefficiente f, i numeri primi naturali, non considerando i quattro gemelli eventualmente coinvolti, si ridurrebbero a 7, quindi avremo 7/127 = 5,51% valore vicinissimo al 5% finora stimato per la materia/energia visibile e quindi anche al 95% ottenendo 94,49% (100 – 5,51 = 94,49) per quanto concerne la materia/energia oscura.
Questo potrebbe significare che le stringhe vibrano a tutte le frequenze possibili fino a 127, ma soltanto il 5,51% cioè quelle che vibrano con frequenze corrispondenti ai numeri primi naturali (esclusi i quattro numeri primi gemelli), darebbero luogo a quark idonei a formare poi particelle di materia ed energia visibile (elettroni, protoni, neutroni, quindi fermioni e gravitoni, fotoni, gluoni, $W^{\pm}$ e Z^0, quindi bosoni), mentre le altre frequenze (il 94,49%) darebbero luogo a quark in grado di formare soltanto assioni (non interagenti, o meglio, pochissimo interagenti con la materia visibile e tra di loro), quindi materia ed energia oscura osservata nella quasi identica proporzione (95% contro il 5%), i cui effetti gravitazionali, ricordiamo, sono osservabili a livello galattico, cioè soltanto su grande scala. Su piccola scala, invece, vi sono soltanto poche evidenze sperimentali e tutto ciò che si conosce è ad un livello puramente teorico. Alcuni ricercatori dell'Università di Trieste hanno affermato: "Gli assioni sembrano formarsi ad un ritmo 1000 volte superiore alle teorie. Se accadesse così anche nelle stelle, queste dovrebbero aver già da tempo consumato la loro energia nella produzione di assioni, ed essere tutte spente". Forse vi è qualche meccanismo

quantistico che impedisce la formazione di assioni nelle stelle ad un fattore 1000 di crescita, facendola rientrare nella normalità e questo, a sua volta, impedisce la formazione “simmetrica” di anti-materia a causa della “asimmetria” dovuta proprio agli assioni. Essi quindi, nelle loro proporzioni reali (o da noi stimate in precedenza), renderebbero conto sia della presenza di così tanta materia oscura, sia dell’assenza di anti-materia.
È quindi possibile dedurre che ci potrebbe essere una possibile connessione, tramite i numeri primi naturali, tra materia/energia visibile (circa il 5%), materia/energia oscura (circa il 95%), connessa con gli assioni stessi, ed anti-materia, quasi del tutto proibita in natura per la presenza degli assioni.
Riepilogando, avremo il seguente schema rappresentativo di quanto finora descritto:

Vibrazioni delle stringhe

Frequenze su primi naturali

Frequenze su altri numeri

Materia/Energia visibile (circa 5%)

Materia/Energia oscura - Assioni (circa il 95%)

Asimmetria
Antimateria (circa 0%)
(prodotta soltanto in laboratorio, con carica elettrica invertita, la cui produzione richiede moltissima energia, che per brevissimo tempo annulla l’effetto negativo degli assioni).

2.1 <u>Connessioni con la Teoria dei Numeri e la Teoria delle Stringhe</u>

Prendiamo adesso i numeri puri 5,51 e 94,49. Vediamo che tali numeri soddisfano le seguenti relazioni contenenti φ, Φ e c (costante di Legendre = 1,08366) :

$$\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 + (c)^3 \cong 5,50862 \cong 5,51; \quad (2.1)$$

$$\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^9 + \left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6 + \frac{1}{2}(c)\right] \cong 94,49877 \cong 94,49 . \quad (2.2)$$

Tali relazioni, inoltre, sono ottimamente correlate anche con l’identità di Rogers-Ramanujan. Abbiamo infatti, per esempio:

$$\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^9+\left(1+\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f\left(-t^{1/5}\right)}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)\right)^6+\frac{1}{2}(c)\right]\cong 94{,}49\,. \quad (2.3)$$

Per quanto riguarda, invece, la teoria di stringa, dal lavoro di P. Svrcek ed E. Witten "Axions in String Theory", abbiamo alcune interessanti connessioni.
Ricordiamo che la parte rilevante della lagrangiana 10-dimensionale a bassa energia della stringa eterotica, per l'equazione

$$S_{het}=\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_V\left(\left|F_2\right|^2\right)\right],\quad (2.4)$$

è

$$L=\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\sqrt{-g}R-\frac{1}{4\kappa_{10}^2}H\wedge *H-\frac{\alpha'}{8\kappa_{10}^2}trF\wedge *F=\frac{2\pi}{g_s^2l_s^8}\sqrt{-g}R-\frac{2\pi}{g_s^2l_s^4}\frac{1}{2}H\wedge *H-\frac{1}{4(2\pi)g_s^2l_s^6}trF\wedge *F$$
(2.5)

Ricordiamo che R è lo scalare di Ricci, H il campo di forza del campo B 2-forma, ed F la curvatura $E_8\times E_8$ o SO(32).
Tali equazioni conducono alla seguente azione che concerne il modello degli assioni nell'ambito della teoria di stringa:

$$S(a)=\frac{g_s^2l_s^4}{2\pi V_Z}\int d^4x\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu a\partial^\mu a\right)+\int a\frac{1}{16\pi^2}(trF\wedge F-trR\wedge R).\quad (2.6)$$

È evidente il nesso tra queste equazioni ed il modello Palumbo-Nardelli descritto precedentemente (vedi eq. (1.2)).
Quindi, anche per quanto concerne la materia/energia oscura e l'antimateria sembrano esistere delle connessioni sia con la Teoria dei Numeri, sia con la Teoria di Stringa.

3. **Interazione nucleare debole, Teoria dei Numeri e Teoria di Stringa**

La teoria unificata delle forze elettromagnetiche e deboli, la cosiddetta teoria elettrodebole, ha riscosso notevoli successi. Tra le sue predizioni c'era la stessa esistenza dei bosoni vettori intermedi Z^0 e $W^\pm$, ed alcuni valori piuttosto specifici per le masse di tali particelle (circa 80 e 90 GeV, rispettivamente). I bosoni $W^\pm$ e Z^0 furono osservati in esperimenti al CERN di Ginevra nel 1983 ed i valori previsti per le loro masse furono confermati con buona precisione, dato che i moderni valori sperimentali sono rispettivamente di 81,4 e 91,2 GeV (circa 81 e 91 GeV)
Prendiamo adesso i numeri puri 81 e 91. Abbiamo le seguenti significative espressioni:

$$81=(6\cdot 13+1)+2=79+2=81;\ \ 81=\frac{79+83}{2}=\frac{162}{2}=81;$$
$$89=(13\cdot 6+11)=78+11=89;\ 91=7\cdot 13;\ \ 91=89+2;$$
$$91=(8\cdot 11+3)=88+3=91; 79=(13\cdot 6+1)=78+1=79;$$
$$83=(6\cdot 14-1)=(6\cdot 7\cdot 2-1)=(21\cdot 4-1)=6(13+1)-1=83;$$
$$91=83+8=83+5+3=91;\ \ 91=37+54=34+3+55-1=3+21+13+55-1=91;$$
$$89=(6\cdot 15-1)=[6(13+2)-1]=89;$$
$$81=83-2=79+2=81;\ \ 7=(6\cdot 1+1);\ \ 13=(6\cdot 2+1);$$
$$91-81=10=2+8=2+5+3.$$

Evidenziamo, inoltre, che $11=1{,}375\cdot 8$, dove 1,375 è il fattore medio di crescita delle partizioni. Ricordando la serie di Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89….

notiamo che nelle espressioni precedenti troviamo tutti questi numeri. Per quanto concerne i numeri primi abbiamo la seguente serie:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 37, 79, 83, 89

in cui 7, 13 e 79 sono anche numeri primi naturali.
Ora, per i numeri 7, 13 e 79, abbiamo le seguenti espressioni:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4+\frac{3\cdot 11}{2^2\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cong 7;\ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4\cong 7$$
$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^5+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cong 13;\quad \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^9+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cong 79.$$

Queste possono essere ottimamente correlate con l'identità di Rogers-Ramanujan. Abbiamo infatti, per esempio (vedi la seconda espressione):

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^4+\left[R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right]^4\approx 7. \quad (3.1)$$

3.1 Connessioni con la Teoria di Stringa

A 10 elevato alla meno 33 secondi dopo il Big Bang, alla fine dell'era dell'inflazione, la gravità iniziò a rallentare l'espansione dell'universo. La temperatura era di 10 elevato alla 26 gradi Kelvin e la densità del cosmo, anche se stava calando, era ancora sufficiente a far sì che la massa del nostro pianeta non occupasse più del volume di un ditale. Prendiamo il numero puro 33. Esso si scompone in 33 = 11×3 ; ma 11 = 1,375 × 8 in cui 1,375 è il fattore medio di crescita delle partizioni. Anche il numero 33 è connesso a ϕ, Φ e "c" dalle seguenti relazioni:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}(c)\cong 3\,; \quad (3.2) \qquad\qquad \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4+(c)+\frac{1}{2\times 5}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cong 8\,. \quad (3.3)$$

Avremo, quindi:

$$\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}(c)\right]\cdot 1{,}375\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4+(c)+\frac{1}{2\times 5}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]\cong 33\,, \quad (3.4)$$

da cui, per l'identità di Rogers-Ramanujan, si ottiene:

$$\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}(c)\right]\cdot 1{,}375\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4+(c)+\frac{1}{2\times 5}\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)\right]\cong 33\,.$$

(3.5)

Nell'istante successivo, chiamato era elettrodebole, apparvero i bosoni H di Higgs, che completarono la separazione delle quattro forze fondamentali, dividendo la forza debole in elettromagnetismo ed interazione nucleare debole. Nel processo, leptoni ed anti-leptoni evolsero in varianti come elettroni e positroni, che sono sensibili all'elettromagnetismo, e neutrini ed anti-neutrini, sensibili all'interazione debole.
L'espressione

$$t\cdot\frac{8\pi^3 g^2}{h^4}\left|\int v_m^* u_n d\tau\right|^2\frac{p_\sigma^2}{v_\sigma}\left(\tilde{\psi}_s\psi_s-\frac{\mu c^2}{K_\sigma}\tilde{\psi}_s\beta\psi_s\right), \quad (3.6)$$

dove p_σ è il valore del momento del neutrino, (E. Fermi, 1934) esprime la probabilità che nel tempo t abbia luogo una disintegrazione β in cui un elettrone viene emesso nello stato s. Tale probabilità risulta proporzionale al tempo; il coefficiente di t fornisce la probabilità di transizione per il processo indicato (la transizione di cui si parla è quella da neutrone a protone, accompagnata dalla creazione di un elettrone e di un neutrino). Essa risulta:

$$P_s=\frac{8\pi^3 g^2}{h^4}\left|\int v_m^* u_n d\tau\right|^2\frac{p_\sigma^2}{v_\sigma}\left(\tilde{\psi}_s\psi_s-\frac{\mu c^2}{K_\sigma}\tilde{\psi}_s\beta\psi_s\right). \quad (3.7)$$

Secondo la (3.7) P_s dipende dalle autofunzioni u_n e v_m della particella pesante nel nucleo, attraverso all'elemento di matrice $Q_{mn}^*=\int v_m^* u_n d\tau$. Questo elemento di matrice ha, nella teoria dei raggi β (quindi nella forza elettrodebole), una funzione analoga a quella dell'elemento di matrice del momento elettrico nella teoria dell'irradiazione.

Con l'espansione ed il raffreddamento, le collisioni diventarono sempre meno energetiche di quanto non fossero state durante l'era dell'inflazione, producendo un numero inferiore di particelle

oltre che meno massicce. L'annullamento fra materia ed anti-materia produsse un gran numero di fotoni, parte dei quali decaddero in coppie di elettroni e positroni.
Un bosone H di Higgs completa, quindi, la separazione delle quattro forze fondamentali quando viene assorbito da un trasportatore della forza elettrodebole. Il risultato dell'interazione è un fotone della forza elettromagnetica ed un bosone vettore intermedio dell'interazione nucleare debole. Un incontro fra un quark ed un elettrone (quindi tra due stringhe fermioniche) durante l'era elettrodebole produce un bosone per ognuna delle quattro forze (produce quindi stringhe bosoniche). È interessante notare che questo è proprio quello che afferma il modello Palumbo-Nardelli, secondo il quale l'azione di stringa bosonica è uguale all'integrale da zero ad infinito dell'azione di superstringa (contenente anche fermioni). Durante l'era elettrodebole, dunque, è valida l'equazione del modello Palumbo-Nardelli, correlabile all'equazione (3.7) contenente il valore del momento del neutrino (che è un fermione)

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi\right]=$$
$$=\int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_{\mu}\Phi\partial^{\mu}\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_{v}\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{8\pi^3 g^2}{h^4}\left|\int v_m^* u_n d\tau\right|^2\frac{p_\sigma^2}{v_\sigma}\left(\tilde{\psi}_s\psi_s-\frac{\mu c^2}{K_\sigma}\tilde{\psi}_s\beta\psi_s\right). \quad (3.8)$$

La collisione produce anche un elettrone ed un positrone, un quark ed il suo anti-quark e la coppia originale elettrone-quark. Quando un elettrone ed un positrone si annullano l'un l'altro (quando cioè una coppia di stringhe ed anti-stringhe fermioniche si annullano), si hanno due fotoni di alta energia (quindi due stringhe bosoniche), ognuno dei quali decade prontamente in una coppia elettrone-positrone identica. Questo processo continua fino a quando il livello di energia rimane molto alto, trasformando l'energia del cosmo in materia ed anti-materia.

4. Sulle cancellazioni delle anomalie nella Teoria di Gauge supersimmetrica e nella Teoria di Superstringa con D = 10 e sulle teorie chirali con anomalia libera in 6 dimensioni: connessioni con la Teoria dei Numeri

La seguente azione, per le teorie interagenti, contiene termini bosonici

$$S_0=\int d^{10}xe\left[-\frac{1}{2\kappa^2}R-\frac{1}{\kappa^2}\varphi^{-2}\partial_{\mu}\varphi\partial^{\mu}\varphi-\frac{1}{4g^2}\varphi^{-1}F_{\mu\nu}^{\alpha}F^{\mu\nu\alpha}-\frac{3\kappa^2}{2g^4}\varphi^{-2}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}\right]. \quad (4.1)$$

Il campo di forza di Yang-Mills è definito da

$$F\equiv\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}=dA+A^2. \quad (4.2)$$

Il potenziale 1-forma A è una rappresentazione matriciale dell'algebra di gauge

$$A=A_{\mu}^{\alpha}\lambda^{\alpha}dx^{\mu}. \quad (4.3)$$

Il campo di forza H associato con il potenziale 2-forma $B = B_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ del multipletto (stato quantizzato multiplo) della supergravità, è definito per il caso di SO(N) o USp(N) attraverso

$$H = dB - \omega_{3Y}^{0} - \omega_{3L}^{0}. \quad (4.4)$$

Abbiamo, inoltre, la 12-forma gauge-invariante Ω_{12} dove

$$\Omega_{4n} = TrF^{2n}. \quad (4.5)$$

Inoltre, Ω_{4n} può essere riespressa nei termini delle rappresentazioni fondamentali di matrici

$$\Omega_4 = (N + 2l)trF^2; \quad (4.6a) \qquad \Omega_8 = (N + 8l)trF^4 + 3(trF^2)^2; \quad (4.6b)$$
$$\Omega_{12} = (N + 32l)trF^6 + 15trF^2 + trF^4. \quad (4.6c)$$

Il secondo termine nell'equazione (4.6c) può essere espresso come

$$trF^2 trF^4 = d\left(\omega_{3Y}^{0} trF^4\right) = d\left(\omega_{7Y}^{0} trF^2\right), \quad (4.7)$$

dove ω_{2n+1Y}^{0} è definito da

$$d\omega_{2n+1Y}^{0} = trF^{n+1}. \quad (4.8)$$

Similmente, applicando una trasformazione di gauge infinitesimale, è possibile definire ω_{2nY}^{1} attraverso

$$\delta\omega_{2n+1Y}^{0} = -d\omega_{2nY}^{1}. \quad (4.9)$$

L'anomalia consistente corrispondente al secondo termine nell'equazione (4.6c) è

$$G = c\int \left(\frac{1}{3}\omega_{2Y}^{1} trF^4 + \frac{2}{3}\omega_{6Y}^{1} trF^2 \right), \quad (4.10)$$

e tale anomalia può essere cancellata aggiungendo l'azione effettiva

$$S_1 = c\int \left(BtrF^4 + \frac{2}{3}\omega_{3Y}^{0}\omega_{7Y}^{0} \right). \quad (4.11)$$

Per il gruppo E_8, le equazioni (4.6) sono sostituite dalle

$$\Omega_4 = trF^2; \quad (4.12a) \qquad \Omega_8 = \frac{1}{100}(trF^2)^2; \quad (4.12b) \qquad \Omega_{12} = \frac{1}{7200}(trF^2)^3. \quad (4.12c)$$

Ciò è importante paragonando le analisi delle anomalie associate per SO(32) ed $E_8 \times E_8$ che per entrambi questi gruppi di gauge

$$\Omega_{12} = \frac{1}{48}\Omega_4\left(\Omega_8 - \frac{1}{300}(\Omega_4)^2\right). \quad (4.13)$$

Segue, dalle equazioni (4.12) per lo stesso ragionamento di prima che l'anomalia consistente per $E_8 \times E_8$ è data dalla seguente equazione

$$G' = \frac{c}{108.000}\int\left[\omega^1_{2Y_1}\left(tr_1F^2\right)^2 + \omega^1_{2Y_2}\left(tr_2F^2\right)^2\right], \quad (4.14)$$

ed essa può essere cancellata aggiungendo l'azione effettiva

$$S'_1 = \frac{c}{108.000}\int\left[30B\left(\left(tr_1F^2\right)^2 + \left(tr_2F^2\right)^2 - tr_1F^2tr_2F^2\right) - \omega^0_{3Y_1}\omega^0_{3Y_2}\left(tr_1F^2 - tr_2F^2\right)\right]. \quad (4.15)$$

Adesso, abbiamo la seguente equazione fondamentale

$$\left(\frac{1}{32} + \frac{n-496}{13824}\right)\left(trR^2\right)^3 + \left(\frac{1}{8} + \frac{n-496}{5760}\right)trR^2trR^4 + \frac{n-496}{7560}trR^6. \quad (4.16)$$

In tale espressione abbiamo incluso i contributi di un gravitino di spin sinistrorso uguale a 3/2, di un campo appartenente al settore della supergravità avente spin destrorso uguale a 1/2 ed n campi appartenenti al settore della materia aventi spin sinistrorsi uguali ad 1/2, che dipendono soltanto dalle dimensioni del gruppo di gauge.
Poiché la dimensione della rappresentazione aggiunta di SO(32) o di $E_8 \times E_8$ è 496, la cancellazione avviene per ciascuno di questi gruppi di gauge. Le anomalie associate con i primi due termini dell'equazione (4.16), possono essere cancellate (ponendo n = 496) aggiungendo all'effettiva azione per SO(32) o $E_8 \times E_8$

$$S_2 = c\int\left(\frac{1}{32}B\left(trR^2\right)^2 + \frac{1}{8}BtrR^4 + \frac{1}{12}\omega^0_{3L}\omega^0_{7L}\right). \quad (4.17)$$

L'espressione per la 12-forma che caratterizza le anomalie associate per SO(32) è

$$trR^2\left[trF^4 + \frac{1}{8}\left(trF^2\right)^2\right] + trF^2\left[\frac{1}{8}trR^4 + \frac{5}{32}\left(trR^2\right)^2\right]. \quad (4.18)$$

Le 12-forme nelle equazioni (4.7), (4.16) e (4.18) sono date con la relativa normalizzazione corretta. Le anomalie associate possono essere cancellate aggiungendo i termini locali

$$S_3 = c\int\left(\frac{1}{8}BtrR^2trF^2 + \frac{1}{48}\omega^0_{3L}\omega^0_{3Y}trR^2 + \frac{1}{24}\omega^0_{3Y}\omega^0_{3L}trF^2 + \frac{2}{3}\omega^0_{3L}\omega^0_{7Y} + \frac{1}{12}\omega^0_{3Y}\omega^0_{7L}\right). \quad (4.19)$$

Data la cancellazione delle anomalie associate al gruppo di gauge SO(32), la possibilità della loro cancellazione nel gruppo di gauge $E_8 \times E_8$ segue dall'equazione (4.13). Precisamente, per $E_8 \times E_8$ si ottiene

$$S'_3 = \frac{c}{7200}\int\left(30BtrR^2tr_1F^2 + 5\omega^0_{3L}\omega^0_{3Y_1}trR^2 + 20\omega^0_{3Y_1}\omega^0_{7L} - \omega^0_{3Y_1}\omega^0_{3L}tr_1F^2 - \omega^0_{3L}\omega^0_{3Y_1}tr_2F^2\right) + (1 \Leftrightarrow 2) \quad (4.20)$$

Quindi, come prima, l'aggiunta di $S_1'+S_2+S_3'$ all'azione, cancella tutte le "one-loop" anomalie per il gruppo di gauge $E_8 \times E_8$.

Consideriamo adesso la supergravità N = 1 accoppiata alla teoria super Yang-Mills in dieci dimensioni, con un gruppo di gauge G_{10}. I campi chirali che contribuiscono alle anomalie nei diagrammi esagonali a "one-loop" sono un gravitino Majorana-Weyl (M-W) sinistrorso ed uno spinore M-W destrorso proveniente dal multipletto della supergravità, come anche $n = \dim G_{10}$ spinori M-W derivanti dal dal super-multipletto della teoria super Yang-Mills.
Sappiamo che sia la teoria Yang-Mills, sia quella gravitazionale, e per le anomalie associate dovute a questi "loops" (cappi), sono caratterizzate da una 12-forma proporzionale a

$$I_{12} = -\frac{1}{15}TrF^6 + \frac{1}{24}TrF^4 trR^2 - \frac{1}{960}TrF^2\left[4trR^4 + 5\left(trR^2\right)^2\right] + \\ + \left(\frac{1}{32} + \frac{n-496}{13824}\right)\left(trR^2\right)^3 + \left(\frac{1}{8} + \frac{n-496}{5760}\right)trR^2 trR^4 + \left(\frac{n-496}{7560}\right)trR^6 . \quad (4.21)$$

Esiste un termine inverso locale che cancella le anomalie ogni volta che l'equazione (4.21) può essere fattorizzata in un espressione della forma

$$I_{12} = \left(trR^2 + kTrF^2\right)X_8 , \quad (4.22)$$

dove X_8 è una 8-forma gauge-invariante inerente i campi F ed R.
Adesso indaghiamo quando l'equazione (4.21) si riduce alla forma (4.22). Chiaramente, due condizioni necessarie sono che $n = \dim G_{10} = 496$ e che TrF^6 non sia un invariante indipendente di Casimir del sesto ordine di G_{10}. Entrambe queste proprietà sono soddisfatte dai gruppi di gauge $E_8 \times E_8$ ed SO(32) = D_{16}. Nel caso di un singolo E_8, abbiamo

$$TrF^4 = \frac{1}{100}\left(TrF^2\right)^2 ; \quad (4.23) \qquad TrF^6 = \frac{1}{7200}\left(TrF^2\right)^3 . \quad (4.24)$$

Naturalmente, nessuna di queste è valida per $E_8 \times E_8$. Comunque, in questo caso la condizione più debole

$$TrF^6 = \frac{1}{48}TrF^2 TrF^4 - \frac{1}{14.400}\left(TrF^2\right)^3 , \quad (4.25)$$

è soddisfatta. In particolare, l'equazione (4.25) è anche valida per D_{16}. Sostituendo questa relazione ed n = 496 nell'equazione (4.21), si ottiene un'espressione fattorizzata della forma dell'equazione (4.22) con

$$k = -\frac{1}{30} \quad (4.26)$$

e

$$X_8 = \frac{1}{24}TrF^4 - \frac{1}{7200}\left(TrF^2\right)^2 - \frac{1}{240}TrF^2 trR^2 + \frac{1}{8}trR^4 + \frac{1}{32}\left(trR^2\right)^2 . \quad (4.27)$$

Questo prova la cancellazione di tutte le anomalie, sia per D_{16}, sia per $E_8 \times E_8$. Infine, è facile mostrare che n = 496 e l'equazione (4.25), precisamente con i coefficienti dati, sono condizioni entrambe necessarie e sufficienti per la fattorizzazione dell'equazione (4.21).
Sia dato il seguente campo di forza 3-forma:

$$H = dB - \frac{1}{30}\omega_{3Y} + \omega_{3L}. \quad (4.28)$$

La richiesta che H sia globalmente "ben definito" fornisce una condizione topologica sulle possibili "compattificazioni" spaziali. In modo specifico, poiché

$$dH = -\frac{1}{30}TrF^2 + trR^2, \quad (4.29)$$

è necessario che i campi di background R_0, F_0 soddisfino la seguente equazione

$$\int_{M_4}\left(trR_0^2 - \frac{1}{30}TrF_0^2\right) = 0 \quad (4.30)$$

per qualche sotto-varietà quadridimensionale M_4 chiusa dello spazio-tempo 10-dimensionale.
Se i campi non nulli F_0 si estendono attraverso un sottogruppo $H \subset G_{10}$, allora c'è un'unica sottoalgebra massima G di G_{10}, in cui tutti i generatori commutano con quelli di H, così che

$$G_{10} \supset G \times H. \quad (4.31)$$

La rappresentazione aggiunta di G_{10} può essere decomposta in una somma di rappresentazioni

$$\text{aggiunta di } G_{10} = \sum_i (L_i, C_i) \quad (4.32)$$

dove L_i e C_i sono rappresentazioni irriducibili di G ed H, rispettivamente. In particolare, si ha che

$$\sum_i \dim L_i \dim C_i = \dim G_{10} = 496. \quad (4.33)$$

Se X è una matrice della rappresentazione aggiunta di G_{10} che corrisponde ad un generatore del sottogruppo G, essa può essere decomposta come segue

$$X = \bigoplus_i (X_i \otimes 1_i). \quad (4.34a)$$

Similmente, se Y corrisponde ad un generatore di H, abbiamo

$$Y = \bigoplus_i (1_i \otimes Y_i). \quad (4.34b)$$

Da queste formule risulta evidente che

$$XY = YX = \bigoplus_i \left(X_i \otimes Y_i\right) \quad (4.35) \qquad \text{e} \qquad Tr\left(XY\right) = \sum_i trX_i trY_i = 0\,. \quad (4.36)$$

L'anomalia totale in sei dimensioni è caratterizzata da una 8-forma formale

$$I = n_{3/2} I^0_{3/2} + n_{1/2} I^0_{1/2} + \sum_i n^i_{1/2} I^i_{1/2}\,. \quad (4.37)$$

In essa, $I^0_{3/2}$ caratterizza l'anomalia dovuta ad un singolo campo di spin 3/2 sinistrorso, che nel presente caso è un singoletto del gruppo di gauge G. Essa è data dalla seguente equazione

$$I^0_{3/2} = \frac{1}{(4\pi)^4}\left[-\frac{43}{288}\left(trR^2\right)^2 + \frac{49}{72} trR^4\right]. \quad (4.38)$$

La 2-forma R è una matrice 6×6 nella rappresentazione fondamentale dell'algebra SO(5,1).

$$n_{3/2} = n^L_{3/2} - n^R_{3/2} \quad (4.39)$$

è il numero preciso dei gravitini sinistrorsi in sei dimensioni. Questo numero è dato dal seguente teorema esponenziale:

$$n_{3/2} = \frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{48}\int_{M_4} trR_0^2\,. \quad (4.40)$$

Similmente, $I^0_{1/2}$ è l'anomalia dovuta ad un campo di singoletto di spin 1/2 sinistrorso in sei dimensioni

$$I^0_{1/2} = \frac{1}{(4\pi)^4}\left[\frac{1}{288}\left(trR^2\right)^2 + \frac{1}{360} trR^4\right]. \quad (4.41)$$

Il numero preciso di questi campi in sei dimensioni, derivante da un gravitino sinistrorso e da un multipletto di spinore destrorso nella supergravità D = 10, è dato da una combinazione dei teoremi esponenziali dello spin 1/2 e dello spin 3/2 nello spazio interno. Il risultato è

$$n_{1/2} = n^L_{1/2} - n^R_{1/2} = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{7}{16}\int_{M_4} trR_0^2\,. \quad (4.42)$$

Il contributo di anomalia di un multipletto degli spinori sinistrorsi nella rappresentazione L_i di G è

$$I^i_{1/2} = \frac{1}{(4\pi)^4}\left[\frac{2}{3} trL_i F^4 - \frac{1}{6} trL_i F^2 trR^2 + \frac{\dim L_i}{288}\left(trR^2\right)^2 + \frac{\dim L_i}{360} trR^4\right] \quad (4.43)$$

e il numero di tali multipletti è dato da un teorema esponenziale dello spin 1/2

$$n_i = n^L_i - n^R_i = \frac{1}{8\pi^2}\int_{M^4}\left[-\frac{1}{2} tr_{C_i} F_0^2 + \frac{\dim C_i}{48} trR_0^2\right]. \quad (4.44)$$

Adesso questi risultati possono essere messi insieme per fornire l'espressione completa I dell'equazione (4.37). Combinando le equazioni (4.37 – 4.44), si ottiene

$$I = \frac{1}{2(4\pi)^6} \int_{M_4} \left[-\frac{4}{3} TrF^4 F_0^2 + \frac{1}{3} TrF^2 F_0^2 trR^2 - \frac{1}{144} \left(trR^2\right)^2 TrF_0^2 - \frac{11}{72} \left(trR^2\right)^2 trR_0^2 + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{180} trR^4 TrF_0^2 + \frac{1}{6} trR^4 trR_0^2 + \frac{1}{18} TrF^4 trR_0^2 - \frac{1}{72} TrF^2 trR^2 trR_0^2 \right]. \quad (4.45)$$

Per semplificare questa espressione notiamo anzitutto che l'equazione (4.25) applicata ad un'arbitraria combinazione lineare di F ed F_0, e l'equazione (4.36) implicano la seguente equazione

$$TrF^4 F_0^2 = \frac{1}{120} TrF^2 TrF^2 F_0^2 + \frac{1}{720} TrF_0^2 TrF^4 - \frac{1}{72.000} TrF_0^2 \left(TrF^2\right)^2. \quad (4.46)$$

Usando questa e l'equazione (4.30), si ottiene

$$I = \frac{1}{2(4\pi)^6} \int_{M_4} \left[-\frac{1}{90} TrF^2 TrF^2 F_0^2 + \frac{1}{1800} \left(TrF^2\right)^2 trR_0^2 + \frac{1}{3} trR^2 TrF^2 F_0^2 - \frac{1}{72} TrF^2 trR^2 trR_0^2 - \frac{1}{12} \left(trR^2\right)^2 trR_0^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2(4\pi)^6} \left(trR^2 - \frac{1}{30} TrF^2 \right) \int_{M_4} \left[\frac{1}{3} TrF^2 F_0^2 - \frac{1}{60} trR_0^2 TrF^2 - \frac{1}{12} trR_0^2 trR^2 \right], \quad (4.47)$$

che è un'espressione fattorizzata simile all'equazione (4.22) la quale, a sua volta, deriva dalla (4.21).

4.1 Connessioni con la Teoria dei Numeri e con il modello Palumbo-Nardelli.

Andiamo adesso ad analizzare le connessioni matematiche che possono essere ottenute sia con alcuni settori della Teoria dei Numeri, sia con la relazione che è alla base del modello Palumbo-Nardelli.

Prendiamo il numero puro 496. Esso oltre a comparire nelle equazioni (4.16), (4.21) e (4.33) è insito nella teoria di stringa $E_8 \times E_8$ che predice l'esistenza di 496 bosoni di campo.

Anzitutto, vogliamo evidenziare come tale numero possa essere ricavato dalle formule di Ramanujan che consentono di calcolare π, direttamente collegate ad equazioni modulari. Abbiamo infatti:

$$\pi = \frac{12}{\sqrt{130}} \log\left[\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{13}\right)}{\sqrt{2}} \right], \quad (4.48) \quad \text{e} \quad \pi = \frac{24}{\sqrt{142}} \log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]. \quad (4.49)$$

Da cui, otteniamo, dopo alcuni semplici calcoli:

$$496 = \left\{ 576 \left[\log \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{13}\right)}{\sqrt{2}} \right]^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} \right\} - 24, \quad (4.50)$$ per quanto concerne la (4.48) e

$$496 = \left\{ 2304 \left[\log \sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} \right\} - 72, \quad (4.51)$$ per quanto concerne la (4.49).

Notiamo, a parte il numero 496, come in tali equazioni compaiano anche i numeri 24 e 72 = 24×3. È importantissimo sottolineare come il numero 24 corrisponda alle vibrazioni "fisiche" di una stringa bosonica.
Il numero 496 è anche dato dalla seguente somma che comprende le partizioni:

$$p(19) = 490 = 11 \cdot 44{,}5455 = 1{,}375 \cdot 8 \cdot 44{,}5455; \quad p(4) = 5; \quad p(1) = 1.$$

Ora, $p(5m+4) \equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$, per m = 0, abbiamo $p(4) = 5 \equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$, perché il numero 5 è divisibile per 5. Inoltre, $p(5m+4) \equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$, per m = 3, abbiamo $p(19) = 490 \equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$, infatti 490 è divisibile per 5. Infine, $p(7m+5) \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$, per m = 2, abbiamo $p(19) = 490 \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$, infatti 490 è divisibile anche per 7.
Ora, 5 e 7 sono numeri primi, inoltre essi possono essere espressi anche attraverso le seguenti due relazioni comprendenti sia la sezione aurea, sia il numero (o costante) di Legendre:

$$(c)^{24} + \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \cong 7, \quad (4.52) \quad \text{e} \quad (c)^{20} + \frac{1}{47}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \cong 5. \quad (4.53)$$

Infine, tali espressioni per l'identità di Rogers-Ramanujan, già in precedenza citata, possono essere scritte:

$$(c)^{20} + \frac{1}{47}\left[R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})} \frac{dt}{t^{4/5}} \right)} \right] \cong 5, \quad (4.54)$$

$$(c)^{24} + \frac{1}{5}\left[R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t)^{1/5}} \frac{dt}{t^{4/5}} \right)} \right] \cong 7. \quad (4.55)$$

Andiamo adesso ad analizzare gli esponenti di "c", quindi i numeri puri, 20 e 24.
Abbiamo che 20 – 1 = 19 = $6\times3+1$ = primo naturale; 24 – 1 = 23 = primo normale; 20 + 1 = 21 = numero di Fibonacci; $8\times3 = 24$, con 8 e 3 numeri di Fibonacci.
Poi, 13 + 8 – 1 = 20 e 13 + 13 – 2 = 24, con 1, 2, 8 e 13 numeri di Fibonacci; (20 + 24) / 2 = 22 e p(8) = 22 (cioè 22 è il numero delle partizioni di 8); 20 + 2 = 22 con p(2) = 2; 20 = 15 + 5 con p(7) = 15 e p(4) = 5; 24 = 22 + 2 con p(8) = 22 e p(2) = 2 ed infine, 24 = 15 + 7 + 2 con p(7) = 15, p(5) = 7 e p(2) = 2.
Quindi, ulteriori connessioni sia con i numeri primi normali e naturali, sia con i numeri di Fibonacci ed anche con le partizioni. Le formule (4.54) e (4.55) possono allora essere connesse anche alla fondamentale formula sulle partizioni concepita dal genio S. Ramanujan:

$$p(n)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{1\le k\le N}\sqrt{k}\left(\sum_{h \bmod k}\omega_{h,k}e^{-2\pi i\frac{hn}{k}}\right)\frac{d}{dn}\left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{k}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-1}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right)+O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right), \quad (4.55a)$$

o alla sua variante: $$p(n)\approx\frac{e^{\left(\pi\sqrt{2n/3}\right)}}{4n\sqrt{3}} \text{ per } n\to\infty. \quad (4.55b)$$

Quindi, il numero 496, corrispondente ai bosoni di campo della teoria di stringa $E_8\times E_8$, è dato anche dalla somma delle tre partizioni p(19) + p(4) + p(1) = 490 + 5 + 1 = 496. Per la proprietà di congruenza delle partizioni, 490 è divisibile per 5 e per 7, e 5 è divisibile per 5. I numeri 5 e 7, inoltre, sono correlati alla costante di Legendre "c" ed alla sezione aurea, tramite l'identità di Rogers-Ramanujan concernente le frazioni continue di Rogers-Ramanujan.
Riguardo alle equazioni (4.17) e (4.19), inoltre, evidenziamo i seguenti numeri posti a denominatore delle frazioni: 3, 8, 12, 24, 32 e 48. Essi sono tutti, in qualche modo, correlati al numero 24. Difatti 48 è il doppio di 24 e 24 è divisibile per 3, 8 e 12. Riguardo a 32, abbiamo che $32=4\times8$, e 24 è divisibile sia per 4, sia per 8. Anche i numeri concernenti le equazioni (4.45) e (4.47) sono correlati al numero 24. Abbiamo infatti: 3, 6, 12, 18, 30, 60, 72, 90, 144, 180 e 1800. Notiamo immediatamente che 24 è divisibile per 3, 6 e 12. Riguardo agli altri numeri, abbiamo:
$18=3\times6$; $30=6\times5$; $60=12\times5$; $72=3\times24$; $90=5\times3\times6$; $144=12\times12$; $180=2\times3\times6\times5$.
Notiamo subito che in ognuno di tali prodotti vi sono uno o più numeri divisibili per 24.
Quindi, anche le equazioni (4.17), (4.19), (4.45) e (4.47) sono matematicamente correlabili al numero 24, corrispondente, come abbiamo detto precedentemente, alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica. Le stesse equazioni, infine, risultano correlate anche alla relazione del modello Palumbo-Nardelli che fa derivare le stringhe fermioniche (le particelle) da quelle bosoniche (le interazioni, l'energia), che prevede quindi, insieme alla nota equazione di Einstein $E=mc^2$, che l'energia possa trasformarsi in materia. Quindi, la relazione fra stringhe bosoniche e stringhe fermioniche, alla base del modello Palumbo-Nardelli, è un perfezionamento ed una generalizzazione della relazione di Einstein che lega l'energia alla massa.
Concludendo, avremo le seguenti interessanti correlazioni:

$$\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma})f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_\nu\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2(4\pi)^6}\int_{M_4}\left[-\frac{1}{90}TrF^2TrF^2F_0^2+\frac{1}{1800}\left(TrF^2\right)^2trR_0^2+\frac{1}{3}trR^2TrF^2F_0^2-\frac{1}{72}TrF^2trR^2trR_0^2-\frac{1}{12}\left(trR^2\right)^2trR_0^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2(4\pi)^6}\left(trR^2-\frac{1}{30}TrF^2\right)\int_{M_4}\left[\frac{1}{3}TrF^2F_0^2-\frac{1}{60}trR_0^2TrF^2-\frac{1}{12}trR_0^2trR^2\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{576\left[\log\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{13}\right)}{\sqrt{2}}\right]^2\cdot\frac{1}{\pi^2}\right\}-24\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(c)^{20}+\frac{1}{47}\left[R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f\left(-t^{1/5}\right)}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right]\cong 5,$$

$$(c)^{24}+\frac{1}{5}\left[R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f(-t)^{1/5}}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right]\cong 7. \quad (4.56)$$

5. **I Quattro Problemi Additivi classici: Soluzioni e Considerazioni**

Qualche studioso dei numeri primi si fa delle domande su possibili relazioni tra i problemi additivi (per es. Goldbach) e i problemi moltiplicativi (per es. fattorizzazione). Ne citeremo soltanto due, per poi rispondere con nostre considerazioni e proposte di soluzione.

1) Prof. Peter Atkins, nel suo ottimo e recente libro "Il dito di Galileo - Le dieci grandi idee della scienza" (Raffaello Cortina Editore, 2004) pag. 409:

" La congettura di Goldbach non è stata ancora dimostrata, a dispetto di molti sforzi. La difficoltà sembrerebbe nascere dal fatto che i primi emergono dal concetto di moltiplicazione, ma vengono invocati qui nel contesto dell'addizione. Ad ogni modo, questa congettura potrebbe esemplificare una caratteristica che tra non molto vedremo salire al centro della ribalta: è pure possibile che non esista alcuna dimostrazione, e nemmeno si dia dimostrazione della sua negazione. Goldbach congetturò pure che ogni numero dispari (nota come ipotesi debole di Goldbach, N.d.A.A.) sia la somma di tre primi.

Questa congettura è stata parzialmente dimostrata nel 1937 (la dimostrazione funziona solo con numeri molto grandi) dal matematico russo Ivan Matveyedich Vinogradov (1891 – 1983)."

Commento: anche noi abbiamo dimostrato (2006) questa cosiddetta Ipotesi debole di Goldbach, e tale dimostrazione si può reperire sul sito della rivista web “METODO”n° 22-2006, al sito:

http://geocities.com/ga 57/metodo22.html

sul numero metodo21 del 2005 c’è una rettifica delle formule (valide anche per il numero delle coppie di primi gemelli) riportate sulla nostra dimostrazione dell’ipotesi forte di Goldbach (N pari maggiore di 2 come somma di due numeri primi), pubblicata sul numero di metodo20 del 2004, a tutt’oggi molto “visitata”. La nostra dimostrazione dell’ipotesi debole non richiede i grandi numeri di Vinogradov, ma funziona anche con numeri piccoli, a partire dal numero minimo 7 = 2+2+3, cosi come per Goldbach forte il numero minimo è 4 = 2+2; richiede però la dimostrazione di Goldbach forte, che si trova (la nostra) su “metodo20” (sostituendo a metodo22 nel suddetto sito, o cercando con Google “Francesco Di Noto”). Infatti, se si aggiunge un numero primo ad un numero pari, gia somma di due numeri primi, abbiamo un numero dispari N somma di tre numeri primi; noi dimostriamo, e con ciò anche la congettura debole di Goldbach, che tutti i numeri dispari maggiori di 7 sono scrivibili come somma di tre primi, e anche diverse volte al crescere di N dispari, e con meno ripetizioni o nessuna ripetizione di ciascuno dei tre numeri primi coinvolti: in sintesi, un numero pari $P \geq 4$, (gia somma di due numeri primi) più un numero primo qualsiasi $p>2$, dà un numero dispari N somma di tre numeri primi, infatti $P = p' + p''$ e quindi

$$P + p''' = N = p' + p'' + p''' = \text{somma di tre primi.}$$

Per esempio N = 19 = 16 + 3 = 11 + 5 + 3 nessuna ripetizione

N = 19 = 16 + 3 = 13 + 3 + 3 una ripetizione di 3

N = 19 = 14 + 5 = 7 + 7 + 5 una ripetizione di 7

N = 19 = 12 + 7 = 5 + 7 +7 una ripetizione di 7
(ma equivalente a 19 = 14 +5)

N = 19 = 8 + 11 = 3 + 5 + 11 nessuna ripetizione
(ma equivalente a 19 = 16 + 3)
N = 19 = 6 + 13 = 3 + 3 + 13 una ripetizione di 3
(ma equivalente a 19 =16 + 3)

Quindi, il numero N = 19 è già ben tre volte la somma di tre numeri primi, senza ripetizioni o con qualche ripetizione, e più cresce N, maggiori sono le possibilità che sia somma di tre numeri primi. Per maggiori dettagli ed esempi, si rimanda al numero 22-2006 (vedi sito già sopraindicato), dove tale dimostrazione è estesa anche ad N pari come somma di k primi con k pari, con numero minimo n = 2k, e ad N dispari come somma di k+1 primi, con k+1 dispari, e con numero minimo n = 2k + 1. (Nella congettura forte, k = 2 e numero minimo n = 2 * k = 2 * 2 = 4, mentre nella congettura debole k = 3 e numero minimo n = 2 * k + 1 = 2 * 3 +1 = 6 + 1 = 7).

Anche la congettura debole, quindi, può ritenersi dimostrata ed estesa a k primi, il che ha richiesto, come abbiamo visto, la dimostrazione della congettura forte di Goldbach, che è proprio uno dei quattro problemi classici additivi che vedremo meglio tra poco, insieme alle nostre soluzioni positive per tutti e quattro.

2) Anche il Prof. Alessandro Languasco e il Prof. A. Perelli fanno osservazioni simili nel loro articolo web "Numeri primi e crittografia"(sul sito di Pristem - Matematica):

"…Concludiamo il paragrafo osservando che in tali problemi insorgono difficoltà di varia natura; ad esempio, la difficoltà fondamentale dei problemi 3) e 4) risiede nel fatto che i numeri primi sono definiti mediante proprietà moltiplicative, mentre i problemi in questione coinvolgono proprietà additive."

Insomma, le stesse cose che diceva Atkins. Detto per inciso, ricordiamo che l'Università di Genova ha in corso un progetto di ricerca matematica (PRIN) che comprende anche tali problemi additivi. E che sono (dal suddetto articolo dei professori Languasco e Perelli, pubblicato anche su "Matematica e cultura 2000", Venice 1999, Ed. by M Emmer, Sringer Verlag Italia,2000, 227-233), i seguenti:

1) (primi rappresentati da polinomi) esistono infiniti interi n per cui n^2 +1 è un numero primo? (o più in generale, P(n) è un numero primo per infiniti n, con P(x) polinomio irriducibile senza divisori fissi?

2) (distanza tra due numeri primi consecutivi) esiste sempre un numero primo tra due quadrati perfetti consecutivi?

3) (primi gemelli) esistono infiniti numeri primi p tali che p + 2 è ancora primo?

4) (congettura di Goldbach) ogni intero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi?"

Premesso che consideriamo possibile una connessione tra qualcuno dei suddetti problemi additivi e qualche problema moltiplicativo (per es. congettura di Riemann o la fattorizzazione), e che approfondiremo probabilmente nei prossimi anni (date le difficoltà dell'argomento), la nostra risposta a tutti e quattro i problemi additivi elencati dai Proff. Languasco e Perelli, è affermativa. Il prossimo paragrafo concerne le nostre proposte di soluzioni positive.

5.1 Proposte di soluzioni positive

1) n^2 +1 può essere numero primo se e solo se è anche di forma 6m $\pm$ 1, in base al nostro Teorema n. 1 (vedi metodo19 del 2003, o l'articolo "Primi per tutti" sul sito del Prof. Giovanni Di Maria: www.gio22.com).

Ecco i numeri primi di forma n^2 +1 e anche di forma 6n $\pm$ 1 (tranne il numero 2) fino a 1000:

n	n^2 +1 =	6m ± 1	= Numero primo
1	2	6 * 1 – 4	2
2	5	6 * 1 – 1	5
4	17	6 * 3 – 1	17
6	37	6 * 6 + 1	37
10	101	6 * 17 – 1	101
14	197	6 * 33 – 1	197
16	257	6 * 43 – 1	257
20	401	6 * 67 – 1	401
24	577	6 * 96 + 1	577
26	677	6 * 113 – 1	677
…	….	…….	…

Poiché fino a 100 ci sono 5 primi di forma n^2 +1, e 25 numeri primi = π(100), e fino a 1000 ce ne sono 10, e 168 numeri primi = π(1000) , il numero r di forma n^2+1 è all'incirca la radice quadrata del numero di numeri primi fino a N, e cioè π(N):

$$r = \sqrt{\pi(N)}$$

$$5 = \sqrt{\pi(100)} = \sqrt{25}$$

$$10 \approx \sqrt{\pi(1000)} = \sqrt{168} = 12{,}96$$

… … … …

e poiché infine r cresce con π(N) e quindi con N che è infinito, ci sono infiniti n tali che n^2+1 sia primo. Ma anche fino a N = 10 ci sono due n che soddisfano la forma n^2+1 = primo e quattro numeri primi, e 2 = √4.

Se tale formula matematica fosse valida anche per N = 10.000, ed essendo π(10.000) = 1.229, r sarebbe circa

$$r \approx \sqrt{1.229} = 35{,}05$$

Essendo N insieme infinito, r è un sottoinsieme altrettanto infinito, poiché cresce in modo direttamente a n e quindi ad N, pertanto anche i numeri n (necessariamente pari) che soddisfano la condizione n^2+1 = numero primo, sono infiniti.
Una breve e più semplice soluzione di questo problema si trova sull'articolo "Problemi sui numeri primi in via di soluzione", sempre sul sito del Prof. Di Maria, insieme ai tre lavori sulle progressioni aritmetiche di numeri primi (PAP) nei quali si parla anche dei numeri primi gemelli e degli ultimi risultati di Goldston, Yldirim e Pintz. Lavori che rendono almeno in parte conto del perché ci siano ciclicamente degli intervalli numerici di uguale lunghezza (per es. 100 unità) ma più o meno densi di numeri primi rispetto agli intervalli precedente o successivo a quello considerato. C'entrano i numeri gemelli (con differenza minima d=2*1 =2 tra due numeri primi consecutivi), ma anche la congettura di Polignac d = 2*n > 2 tra due numeri consecutivi, che abbiamo in corso di dimostrazione, potrebbe avere la sua importanza per questo problema (vedi anche problema n.

2) (distanza tra due numeri primi consecutivi) esiste sempre un numero primo tra due quadrati perfetti consecutivi?

Anche per questo problema la nostra soluzione è positiva, ed è riportata alla "congettura n. 9 del lavoro sul sito del Prof. Di Maria "Problemi sui numeri primi in via di soluzione", al quali si rimanda, e anche a "Proposte di soluzione per alcuni problemi additivi di tipo Goldbach").

3) (primi gemelli) esistono infiniti numeri primi p tali che p+2 è ancora primo?

Anche per questo problema rimando al suddetto lavoro, a quello su metodo21 del 2005, e alle considerazioni sulle PAP sul sito del Prof. Di Maria e in questo stesso articolo, vedi problema n.1.

4) (congettura di Goldbach) ogni intero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi? Anche per questo problema, si rimanda a metodo20 (dimostrazione iniziale), metodo 21 (rettifica delle formule ed estensione a k primi tutti diversi tra loro, e quindi senza ripetizioni), oltre che alle relative considerazioni iniziali in questo stesso articolo.

Rimangono insoluti i due grossi problemi della fattorizzazione polinomiale (risolvibile forse quando si connetteranno in qualche modo i problemi additivi di cui sopra con quelli moltiplicativi) e l'ipotesi di Riemann (che qualche matematico pensa sia connesso alla fattorizzazione veloce, e qualcun'altro nega invece tale connessione), che sarà risolta con ulteriori ricerche sulla funzione zeta e i suoi zeri sulla retta reale ½, e sue possibili estensioni e generalizzazioni.

Concludendo, i quattro principali problemi additivi sono stati da noi risolti o per lo meno avviati a soluzione, mentre per i problemi moltiplicativi (Fattorizzazione e Riemann) occorre attendere eventuali e possibili connessioni sia con i suddetti problemi additivi e sopratutto con le loro soluzioni, sia tra di loro stessi. Avendo ora o in seguito ben chiare queste relazioni e soluzioni, si potrebbero approfondire le ricerche future in tale direzione, per poter risolvere anche i due problemi moltiplicativi, uno per volta ma anche contemporaneamente, in questo secondo caso solo però se ci fosse una profonda connessione (ancora poco chiara) tra i due.

Una volta trovata (con o senza Riemann) una fattorizzazione polinomiale (cioè risolvibile in tempi polinomiali, il che riguarderebbe l'altro problema del millennio, P versus NP, almeno in questo caso), e quindi veloce (o almeno più veloce degli migliori algoritmi attuali (Lenstra, Pollard, ecc.), si potrà riparlare meglio di crittografia, ormai "violabile", per sostituire gli attuali metodi crittografici (per esempio il sistema RSA) con metodi più efficaci: si pensa già ad una crittografia quantistica, ritenuta inattaccabile, o con una nuova crittografia basata sulle curve ellittiche, ecc.

Il problema della fattorizzazione veloce potrà essere risolto in pratica con i futuri computer quantistici già in fase di sperimentazione (e sul mercato già tra qualche anno), velocissimi e potentissimi, ma i matematici dovrebbero poter risolvere tale problema anche e soprattutto con la loro intelligenza, trovando un sistema veramente veloce di fattorizzazione basato su poche e semplici formule polinomiali, e non soltanto sulla forza bruta dei computer, quantistici o no che siano…

Connessioni tra Teoria di Stringa e Congettura di Goldbach

5.2 Soluzioni cosmologiche da un sistema D3/D7.

L'azione completa nella M-teoria consiste di tre parti: un termine di volume, , un termine di correzione quantico, $S_{quantum}$, ed un termine che origina una membrana, S_{M2}. L'azione è allora data dalla somma di queste tre parti:

$$S = S_{bulk} + S_{quantum} + S_{M2} . \quad (5.2.1)$$

Le parti individuali sono:

$$S_{bulk} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{11}x\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{48}G^2\right] - \frac{1}{12\kappa^2}\int C \wedge G \wedge G , \quad (5.2.2)$$

dove abbiamo definito G = dC, con C che è l'usuale tre-forma della M-teoria, e $\kappa^2 \equiv 8\pi G_N^{(11)}$. Questa è la parte bosonica dell'azione classica della supergravità 11-dimensionale. La principale correzione quantistica all'azione può essere scritta come:

$$S_{quantum} = b_1 T_2 \int d^{11}x\sqrt{-g}\left[J_0 - \frac{1}{2}E_8\right] - T_2 \int C \wedge X_8 . \quad (5.2.3)$$

Il coefficiente T_2 è la tensione della membrana. Per il nostro caso, $T_2 = \left(\frac{2\pi^2}{\kappa^2}\right)^{1/3}$, e b_1 è una costante numerica data esplicitamente da $b_1 = (2\pi)^{-4} 3^{-2} 2^{-13}$. L'azione della M2 brana è data da:

$$S_{M2} = -\frac{T_2}{2}\int d^3\sigma\sqrt{-\gamma}\left[\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu X^M \partial_\nu X^N g_{MN} - 1 + \frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu X^M \partial_\nu X^N \partial_\rho X^P C_{MNP}\right], \quad (5.2.4)$$

dove X^M sono le coordinate di "immersione" della membrana. La metrica del "volume d'universo" $\gamma_{\mu\nu}, \mu,\nu = 0,1,2$ è semplicemente il "pull-back" di g_{MN}, la metrica dello spazio-tempo. Il moto di questa M2 brana è ovviamente influenzato dal "background" dei G-flussi.

<u>Classificazione e stabilità delle soluzioni cosmologiche.</u>

La metrica che otteniamo per il tipo IIB è della seguente forma generale :

$$ds^2 = \frac{f_1}{t^\alpha}\left(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2\right) + \frac{f_2}{t^\beta}dx_3^2 + \frac{f_3}{t^\gamma}g_{mn}dy^m dy^n \quad (5.2.5)$$

dove $f_i = f_i(y)$ sono alcune funzioni delle coordinate della quadri-varietà e α, β e γ possono essere numeri positivi o negativi. Per arbitrarie $f_i(y)$ e arbitrarie potenze di t, la metrica di tipo IIB può derivare in generale da una metrica di M-teoria della forma

$$ds^2 = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + e^{2B}g_{mn}dy^m dy^n + e^{2C}|dz|^2 , \quad (5.2.6)$$

con tre differenti fattori di curvatura A, B e C , dati da:

$$A = \frac{1}{2}\log\frac{f_1 f_2^{\frac{1}{3}}}{t^{\alpha+\frac{\beta}{3}}} + \frac{1}{3}\log\frac{\tau_2}{|\tau|^2}, \quad B = \frac{1}{2}\log\frac{f_3 f_2^{\frac{1}{3}}}{t^{\gamma+\frac{\beta}{3}}} + \frac{1}{3}\log\frac{\tau_2}{|\tau|^2}, \quad C = -\frac{1}{3}\left[\log\frac{f_2}{t^\beta} + \log\frac{\tau_2^2}{|\tau|}\right]. \quad (5.2.7)$$

Per vedere quali sono le possibili scelte per un tale background, occorre trovare la differenza B – C . Questa è data da:

$$B - C = \frac{1}{2}\log\frac{f_2 f_3}{t^{\gamma+\beta}} + \log\frac{\tau_2}{|\tau|} \,. \ (5.2.8)$$

Poichè le parti dipendenti inerenti lo spazio ed il tempo della (5.2.8) possono essere isolate, la (5.2.8) può annullarsi soltanto se

$$f_2 = f_3^{-1} \cdot \frac{|\tau|}{\tau_2}, \quad \gamma + \beta = 0 \,, \ (5.2.9)$$

con α e $f_1(y)$ che rimangono completamente arbitrarie.
Adesso studiamo il seguente caso interessante, dove $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = 0$ $f_1 = f_2$. La 6-varietà interna è indipendente dal tempo. Questo esempio corrisponderebbe ad un esatto background di tipo de-Sitter, e quindi questo produrrebbe un universo in accelerazione con i tre fattori di curvatura dati da:

$$A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2}, \quad B = \frac{1}{2}\left[\log f_3 + \frac{1}{3}\log\frac{f_1}{t^2}\right], \quad C = -\frac{1}{3}\log\frac{f_1}{t^2}. \ (5.2.10)$$

Vediamo che la quadri-varietà interna ha fattori di curvature dipendenti dal tempo sebbene lo spazio 6-dimensionale di tipo IIB è completamente indipendente dal tempo. Un tale background ha il vantaggio che la dinamica quadri-dimensionale che dipenderebbe sullo spazio interno adesso diviene indipendente dal tempo. Questo caso presuppone che la dipendenza dal tempo ha una forma peculiare, cioè la varietà interna 6D della teoria di tipo IIB è assunta costante, e le direzioni non-compatte corrispondono ad uno spazio di de-Sitter 4D. Usando la (5.2.10), la corrispondente metrica 11D nello scenario della M-teoria, può allora, in linea di principio, essere inserita nelle equazioni del moto che seguono dalla (5.2.1).

5.3 Soluzione applicata alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB.

Consideriamo la seguente azione in (q+n+2) dimensioni, contenente la metrica, $g_{\mu\nu}$, un campo diatonico, ϕ, con un potenziale scalare generale, $V(\phi)$, ed un campo di forza (q+2)-forma, $F_{q+2} = dA_{q+1}$, conformemente accoppiato al dilatone:

$$S = \int_{M_{q+n+2}} d^{q+n+2}x\sqrt{|g|}\left[\alpha R - \beta(\partial\phi)^2 - \frac{\eta}{(q+2)!}e^{-\sigma\phi}F_{q+2}^2 - V(\phi)\right]. \ (5.3.1)$$

Qui R è lo scalare di Ricci costruito dalla metrica ed M è una costante. La stabilità richiede che le costanti α, β e η siano positive, infine, $V = \Lambda e^{-\lambda\phi}$ è il potenziale di Liouville, per il quale Wiltshire ed i suoi collaboratori hanno mostrato che le equazioni del moto non ammettono soluzioni di tipo buco nero eccetto per il caso di una costante cosmologica pura negativa, $\lambda = 0$ e $\Lambda < 0$.

La soluzione che cerchiamo può essere realizzata su una tre-sfera S^3 per fornire una soluzione alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB. Questa teoria a 10D contiene un gravitone, un campo scalare e la 3-forma NSNS tra altri campi ed ha un'azione 10 dimensionale, molto simile alla (5.3.1), fornita da

$$S_{10} = \int d^{10}x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{4}R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12}e^{-2\phi}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right]. \quad (5.3.2)$$

Abbiamo una configurazione 10 dimensionale data da

$$ds_{10}^2 = \left(\frac{2}{r}\right)^{3/4}\left[-h(r)dt^2 + r^2 dx_{0,5}^2 + \frac{r^2}{h(r)}dr^2\right] + \left(\frac{r}{2}\right)^{5/4}\left[d\theta^2 + d\psi^2 + d\varphi^2 + \left(d\psi + \cos\theta d\varphi - \frac{Q}{5r^5}dt\right)^2\right]$$

$$\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2},$$

$$H_3 = -\frac{Q}{r^6}dr \wedge dt \wedge \left(d\psi + \cos\theta d\varphi\right) - \frac{g}{\sqrt{2}}\sin\theta d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi. \quad (5.3.3)$$

Questa soluzione 10-dimensionale descrive NS-5 brane che si intersecano con le stringhe fondamentali nella direzione del tempo.
Adesso effettuiamo la "manipolazione" delle variabili angolari della tre-sfera introducendo le seguenti 1-forme di SU(2) invarianti a sinistra:

$$\sigma_1 = \cos\psi d\theta + \sin\psi \sin\theta d\varphi, \quad \sigma_2 = \sin\psi d\theta - \cos\psi \sin\theta d\varphi, \quad \sigma_3 = d\psi + \cos\theta d\varphi, \quad (5.3.4)$$

e

$$h_3 = \sigma_3 - \frac{Q}{5}\frac{1}{r^5}dt. \quad (5.3.5)$$

Poi, eseguiamo il seguente cambio di variabili

$$\frac{r}{2} = \rho^{\frac{4}{5}}, \quad t = \frac{5}{32}\tilde{t}, \quad dx_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}d\tilde{x}_4, \quad dx_5 = \frac{1}{2}dZ, \quad g = \sqrt{2}\tilde{g}, \quad Q = \sqrt{2}2^7\tilde{Q}, \quad \sigma_i = \frac{1}{\tilde{g}}\tilde{\sigma}_i.$$
(5.3.6).

É semplice verificare che la soluzione 10-dimensionale (5.3.3) diviene, dopo questi cambi

$$d\tilde{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\rho^{-1}\left[d\tilde{s}_6^2\right] + \frac{\rho}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + \rho dZ^2,$$

$$\phi = -\ln\rho,$$

$$H_3 = -\frac{1}{\tilde{g}^2}\tilde{\sigma}_1 \wedge \tilde{\sigma}_2 \wedge \tilde{h}_3 + \frac{\tilde{Q}}{\sqrt{2}\tilde{g}\rho^5}d\tilde{t} \wedge d\rho \wedge \tilde{h}_3, \quad (5.3.7)$$

dove definiamo

$$d\tilde{s}_6^2 = -\tilde{h}(\rho)d\tilde{t}^2 + \frac{\rho^2}{\tilde{h}(\rho)}d\rho^2 + \rho^2 d\tilde{x}_{0,4}^2 \quad (5.3.8)$$

e, dopo aver rimisurato M,

$$\tilde{h} = -\frac{2\tilde{M}}{\rho^2} + \frac{\tilde{g}^2}{32}\rho^2 + \frac{\tilde{Q}^2}{8}\frac{1}{\rho^6}. \quad (5.3.9)$$

Adesso trasformiamo la soluzione dal riferimento di Einstein a quello di stringa. Questo conduce a

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\rho^{-2}\left[d\tilde{s}_6^2\right] + \frac{1}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = -2\ln\rho,$$

$$\bar{H}_3 = H_3. \qquad (5.3.10)$$

Abbiamo una soluzione per la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB con un campo NSNS non banale. Se eseguiamo una trasformazione di S-dualità a questa soluzione, otteniamo ancora una soluzione per la teoria di tipo IIB, ma con una RR 3-forma, F_3 non banale. La trasformazione di S-dualità agisce soltanto sulla metrica e sul dilatone, lasciando invariante la tre-forma. In questo modo siamo condotti alla seguente configurazione, che è S-duale a quella derivata sopra

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\left[d\tilde{s}_6^2\right] + \frac{\rho^2}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + \rho^2 dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = 2\ln\rho,$$

$$F_3 = H_3. \qquad (5.3.11)$$

Riguardo alla T-dualità, nel riferimento di stringa abbiamo

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\left[ds_6^2\right] + \frac{r^2}{g^2}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left(\sigma_3 - \frac{gQ}{4\sqrt{2}}\frac{1}{r^4}dt\right)^2\right] + r^{-2}dZ^2. \quad (5.3.12)$$

Questa espressione fornisce una soluzione alla supergravità di tipo IIA con RR 4-forma, C_4 eccitata. Procediamo effettuando una trasformazione di T-dualità, che conduce ad una soluzione della teoria di tipo IIB con RR 3-forma, C_3 non banale. La soluzione completa allora diviene

$$d\overline{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\left[ds_6^2\right] + \frac{r^2}{g^2}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left(\sigma_3 - \frac{gQ}{4\sqrt{2}}\frac{1}{r^4}dt\right)^2\right] + r^2 dZ^2 \ ,$$

$$\overline{\phi} = 2\ln r$$

$$C_3 = -\frac{1}{g^2}\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge h_3 - \frac{Q}{\sqrt{2}g}\frac{1}{r^5}dt \wedge dr \wedge h_3 . \quad (5.3.13)$$

Siamo condotti in questo modo, precisamente alla stessa soluzione 10D come è stata trovata in precedenza [vedi formula (5.3.11)].

5.4 Connessioni con alcune equazioni riguardanti la funzione zeta di Riemann.

Sono state ottenute delle interessanti connessioni tra alcune soluzioni cosmologiche di un sistema D3/D7, alcune soluzioni riguardanti la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB ed alcune equazioni riguardanti la funzione zeta di Riemann, in modo specifico il teorema di Goldston-Montgomery.
Nel 1742, in due lettere indirizzate ad Eulero, Goldbach congetturò che "**ogni intero** n **pari**, n > 2, **è somma di due numeri primi**". Tale affermazione è oggi nota come congettura di Goldbach. Talvolta per congettura di Goldbach si intende anche l'affermazione più debole "**ogni intero** n **pari**, n **sufficientemente grande, è somma di due numeri primi**". Si definisce, inoltre, "G-numero" un intero esprimibile come somma di due primi.
Negli anni '90 Goldston ha osservato che, supponendo oltre all'Ipotesi di Riemann anche la Congettura di Montgomery, è possibile ottenere l'esistenza di G-numeri in intervalli di lunghezza log N.
Nel capitolo "Numeri di Goldbach in intervalli corti" dell'articolo di Languasco "La congettura di Goldbach", è descritto il teorema di Goldston-Montgomery.

TEOREMA 1

Assumiamo l'ipotesi di Riemann. Abbiamo le seguenti implicazioni: (1) Se $0 < B_1 \le B_2 \le 1$ e $F(X,T) \approx \frac{1}{2\pi} T \log T$ uniformemente per $\frac{X^{B_1}}{\log^3 X} \le T \le X^{B_2} \log^3 X$, allora

$$\int_1^X (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 dx \approx \frac{1}{2}\delta X^2 \log\frac{1}{\delta}, \quad (5.4.1)$$

uniformemente per $\frac{1}{X^{B_2}} \le \delta \le \frac{1}{X^{B_1}}$.

(2) Se $1 < A_1 \le A_2 < \infty$ e $\int_1^X (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 dx \approx \frac{1}{2}\delta X^2 \log\frac{1}{\delta}$ uniformemente per $\frac{1}{X^{1/A_1}\log^3 X} \le T \le \frac{1}{X^{1/A_2}}\log^3 X$, allora $F(X,T) \approx \frac{1}{2\pi} T \log T$ uniformemente per

$$T^{A_1} \le X \le T^{A_2} .$$

La dimostrazione di tale teorema richiede alcuni risultati preliminari.

Lemmi preliminari. (Tali lemmi sono stati dimostrati da Goldston-Montgomery)

Lemma 1.

Sia $f(y) \geq 0 \quad \forall y \in R$ e valga $I(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|} f(Y+y)dy = 1 + \varepsilon(Y)$. Allora detta R(y) una funzione Riemann-integrabile si ha

$$\int_a^b R(y) f(Y+y)dy = \left(\int_a^b R(y)dy \right)(1 + \varepsilon'(y)).$$

Inoltre, fissata R, $|\varepsilon'(Y)|$ è piccolo se $|\varepsilon(y)|$ è piccolo uniformemente per $Y + a - 1 \leq y \leq Y + b + 1$.

Lemma 2.

Sia $f(t) \geq 0$ una funzione continua definita su $[0,+\infty)$ tale che $f(t) << \log^2(t+2)$.
Se

$$J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1 + \varepsilon(T))T \log T ,$$

allora

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin ku}{u} \right)^2 f(u)du = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'(k) \right) k \log \frac{1}{k} ,$$

con $|\varepsilon'(k)|$ piccolo per $k \to 0^+$ se $|\varepsilon(T)|$ è piccolo uniformemente per

$$\frac{1}{k \log^2 k} \leq T \leq \frac{1}{k} \log^2 k .$$

Lemma 3.

Sia $f(t) \geq 0$ una funzione continua definita su $[0,+\infty)$ tale che $f(t) << \log^2(t+2)$. Se

$$I(k) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin ku}{u} \right)^2 f(u)du = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'(k) \right) k \log \frac{1}{k} , \quad (5.4.2) \qquad \text{allora}$$

$$J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1 + \varepsilon')T \log T \ , \quad (5.4.3)$$

con $|\varepsilon'|$ piccolo se $|\varepsilon(k)| \leq \varepsilon$ uniformemente per $\frac{1}{T \log T} \leq k \leq \frac{1}{T} \log^2 T$.

Lemma 4.

Sia $F(X,T):=\sum_{0<\gamma,\gamma'<T}\frac{4X^{i(\gamma-\gamma')}}{4+(\gamma-\gamma')^2}$. Allora (i) $F(X,T)\geq 0$; (ii) $F(X,T)=F(1/X,T)$; (iii) Se vale l'Ipotesi di Riemann allora

$$F(X,T)=T\left(\frac{1}{X^2}\log^2 T+\log X\right)\left(\frac{1}{2\pi}+O\left(\sqrt{\frac{\log\log T}{\log T}}\right)\right)$$

uniformemente per $1\leq X\leq T$.

Lemma 5.

Sia $\delta\in(0,1]$ e $a(s)=\frac{(1+\delta)^s-1}{s}$. Se $c(\gamma)\leq 1\quad\forall y$ si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|a(it)|^2\left|\sum_\gamma\frac{c(\gamma)}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{|\gamma|\leq Z}a(1/2+i\gamma)\frac{c(\gamma)}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt+O\left(\delta^2\log^3\frac{2}{\delta}\right)+O\left(\frac{1}{Z}\log^3 Z\right)$$

per $Z>\frac{1}{\delta}$.

La dimostrazione del Teorema 1, si divide in due parti. Proviamo (1).
Definiamo

$$J(X,T)=4\int_0^T\left|\sum_\gamma\frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt.$$

Montgomery ha provato che $J(X,T)=2\pi F(X,T)+O(\log^3 T)$ e quindi l'ipotesi $F(X,T)\approx\frac{1}{2\pi}T\log T$ equivale a $J(X,T)=(1+o(1))T\log T$. Ponendo $k=\frac{1}{2}\log(1+\delta)$, abbiamo

$$|a(it)|^2=4\left(\frac{\sin kt}{t}\right)^2.$$

Il Lemma 2 fornisce

$$\int_0^\infty|a(it)|^2\left|\sum_\gamma\frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt=\left(\frac{\pi}{2}+o(1)\right)k\log\frac{1}{k}=\left(\frac{\pi}{4}+o(1)\right)\delta\log\frac{1}{\delta}$$

per

$$\frac{1}{\delta\log^2\frac{1}{\delta}}\leq T\leq\frac{3}{\delta}\log^2\frac{1}{\delta}.$$

Per il Lemma 5 e la parità dell'integranda si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)\frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt = \left(\frac{\pi}{2}+o(1)\right)\delta\log\frac{1}{\delta} \qquad \text{(a)}$$

se $Z \ge \frac{1}{\delta}\log^3\frac{1}{\delta}$.

Detta $S(t)=\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)\frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}$ notiamo che la sua trasformata di Fourier verifica

$$\hat{S}(u)=\pi\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)X^{i\gamma}e(-\gamma u)e^{-2\pi|u|}.$$

Dall'identità di Plancherel, segue che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)X^{i\gamma}e(-\gamma u)\right|^2 e^{-4\pi|u|}du = \left(\frac{2}{\pi}+o(1)\right)\delta\log\frac{1}{\delta}.$$

Operando la sostituzione $Y=\log X$, $-2\pi u = y$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)e^{i\gamma(Y+y)}\right|^2 e^{-2|y|}dy = (1+o(1))\delta\log\frac{1}{\delta}. \qquad \text{(b)}$$

Usando il Lemma 1 con $R(y)=e^{2y}$ se $0\le y\le \log 2$ e $R(y)=0$ altrimenti, e ponendo $x=e^{Y+y}$ si ha

$$\int_{X}^{2X}\left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)x^{\rho}\right|^2 dx = \left(\frac{3}{2}+o(1)\right)\delta X^2\log\frac{1}{\delta}.$$

Sostituendo X con $X2^{-j}$, sommando su j, $1\le j\le K$, e usando la formula esplicita per $\psi(x)$ con $Z = X\log^3 X$ deduciamo

$$\int_{X2^{-K}}^{X}(\psi((1+\delta)x)-\psi(x)-\delta x)^2 dx = \frac{1}{2}\left(1-2^{-2K}+o(1)\right)\delta X^2\log\frac{1}{\delta}.$$

Poniamo infine $K=[\log\log X]$ e ricorriamo, per l'intervallo $1\le x\le X2^{-K}$, alla stima di Lemma 4 (con $X2^{-K}$ al posto di X). In tal modo otteniamo (1).
Proviamo (2).
Fissiamo un numero reale X_1. Integrando per parti tra X_1 e $X_2 = X_1\log^{2/3}X_1$ otteniamo, ricordando che in ipotesi abbiamo

$$\int_{1}^{X}(\psi((1+\delta)x)-\psi(x)-\delta x)^2 dx \approx \frac{1}{2}\delta X^2\log\frac{1}{\delta},$$

che $$\int_{X_1}^{X_2} (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 x^{-4} dx = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)\delta X_1^{-2} \log\frac{1}{\delta}. \quad \text{(c)}$$

Utilizzando la stima, valida sotto ipotesi di Riemann

$$\int_1^X (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 dx << \delta X^2 \log^2 \frac{2}{\delta},$$

deduciamo analogamente a quanto fatto in precedenza che

$$\int_{X_2}^{\infty} (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 x^{-4} dx << \delta X_2^{-2} \log^2 \frac{1}{\delta} = o\left(\delta X_1^{-2} \log\frac{1}{\delta}\right). \quad \text{(d)}$$

Sommando adesso (c) e (d) e moltiplicando la somma per X_1^2 otteniamo

$$\int_1^{\infty} \min\left(\frac{x^2}{X_1^2}, \frac{X_1^2}{x^2}\right)(\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 x^{-2} dx = (1+o(1))\delta \log\frac{1}{\delta}.$$

Ponendo $X_1 = X$, $Y = \log X$, $x = e^{Y+y}$ ed usando la formula esplicita per $\psi(x)$ con $Z = X \log^3 X$, otteniamo l'equazione (b). A partire dalla summenzionata (b) si può seguire la dimostrazione del punto (1) a ritroso. L'unica differenza consiste nell'applicare il Lemma 3 anziché il Lemma 2.

Adesso, prendiamo l'equazione (5.2.10) e precisamente $A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2}$. Notiamo che dall'equazione (5.4.3) per $\varepsilon' = -\frac{2}{3}$ e T = 2, abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T = \frac{2}{3}\log 2$. Questo risultato è correlato a $A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2}$ ponendo $\frac{f_1}{t^2} = 2$, quindi con il Lemma 3 del teorema di Goldston-Montgomery. Allora, abbiamo la seguente relazione interessante

$$A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2} \Rightarrow \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T, \quad (5.4.4)$$

quindi la connessione tra la soluzione cosmologica e l'equazione correlata alla funzione zeta di Riemann.

Adesso, prendiamo le equazioni (5.3.3) e (5.3.11) e precisamente $\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2}$ e $\bar{\phi} = 2\ln\rho$. Notiamo che dall'equazione (5.4.3) per $\varepsilon' = \frac{3}{2}$ e T = 1/2 , abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T = \frac{5}{4}\log\frac{1}{2}$.

Inoltre, per $\varepsilon' = 3$ e T = 1/2 , abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T = 2\log\frac{1}{2}$.

Questi risultati sono correlati a $\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2}$ ponendo r = 1 ed a $\bar{\phi} = 2\ln\rho$ ponendo $\rho = 1/2$, quindi con il Lemma 3 del teorema di Goldston-Montgomery. Allora, abbiamo le seguenti relazioni interessanti:

$$\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2} \Rightarrow -\int_0^T f(t)dt = -[(1+\varepsilon')T\log T], \qquad \bar{\phi} = 2\ln\rho \Rightarrow \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int d^{10}x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{4}R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12}e^{-2\phi}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right] \quad (5.4.5)$$

quindi la connessione tra le soluzioni 10-dimensionali ed alcune equazioni correlate alla funzione zeta di Riemann.
Da questo il possibile legame tra soluzioni cosmologiche inerenti la teoria di stringa ed alcuni settori matematici inerenti la funzione zeta, quali il Teorema di Goldston-Montgomery e la collegata Congettura di Goldbach.

6. **Serie numerica di Fibonacci e stabilità dei fenomeni naturali**

Sulla rivista "NEXUS" di Dicembre 2006 – Gennaio 2007, abbiamo letto un recente articolo di Christian Lange, "Progetto Vorteggs" (prima parte), molto interessante perché conferma la nostra idea (accennata in un nostro precedente articolo sul sito del Nardelli :

http://xoomer.alice.it/stringtheory,

contrassegnato con "Teoria di stringa 3") che i numeri di Fibonacci, da soli o tramite i numeri primi naturali (vedi anche apposito articolo sul sito del Prof. Di Maria www.gio22.com) e in ogni caso la sezione aurea e il numero aureo, potrebbero essere benissimo alla base della stabilità e della regolarità di molti fenomeni naturali, specie se vi sono coinvolti i frattali.

Riportiamo qui alcuni brani del suddetto articolo, e una tabella con le durate delle rivoluzioni di alcuni pianeti attorno al Sole, durate identificabili con le potenze iniziali del numero aureo Φ = 1,618033. Scrive infatti Lange a pag. 14:

" Quindi, gli stessi principi universali valgono per il movimento dei pianeti, per quello delle particelle subatomiche come l'elettrone e ovviamente anche per i neutrini. Come vedremo, tale movimento (ma anche le frequenze delle vibrazioni delle stringhe, vedi "Teoria di stringa 3, N.d.A.A.) è dettato da un rapporto matematico, la cosiddetta sezione aurea chiamata anche Phi, Proporzione Divina o numero d'oro.

L'onnipresenza di Phi in natura va chiaramente al di là delle coincidenze, e perciò gli antichi pensavano che fosse stabilita dal Creatore dell'Universo. I primi iniziati la chiamarono "proporzione divina".

Alcuni esempi tratti dal Codice da Vinci di Dan Brown: "Qual'è il rapporto tra femmine e maschi in un alveare? Certo, le femmine sono sempre in numero superiore ai maschi. In qualsiasi alveare, però, se si prende il numero delle femmine e lo si divide per quello dei maschi si ottiene sempre lo stesso numero, Phi (simbolo Φ, N.d.A.A.).

Il nautilus è un mollusco che pompa gas nelle camere della sua conchiglia per regolare la spinta di galleggiamento. Qual'è il rapporto tra il diametro di una spira e quello della successiva? Phi, la proporzione divina. I semi di girasole crescono secondo spirali opposte. Chi sa dire il rapporto tra una rotazione e la successiva? Phi. Oppure una pigna e la sua suddivisione secondo due serie di spirali, la disposizione delle foglie sui rami, i segmenti di alcuni insetti. Tutto rispetta in modo stupefacente la proporzione divina. Tutto quello che corrisponde a questo rapporto ci piace perché è bello, come il famoso nudo maschile di Leonardo da Vinci, l'uomo vitruviano, così chiamato dal nome di Marco Vitruvio, il grande architetto romano che aveva tessuto le lodi della proporzione divina nel suo libro "De Architectura". Nessuno capiva meglio di Leonardo daVinci la divina struttura del corpo umano. Leonardo disseppelliva i morti per misurare le esatte proporzioni della struttura ossea umana. Fu il primo a mostrare che il corpo umano è letteralmente costituito di elementi che stanno tra di loro in rapporto di Phi. La prossima volta che fate la doccia, portatevi un metro, tutti: maschi e femmine.

Fate la prova: misurate la vostra altezza, e poi dividete per la distanza da terra del vostro ombelico. Indovinate che numero si ottiene? Phi. Misurate la distanza dalla spalla alla punta delle dita e dividetela per la distanza dal gomito alla punta delle dita. Di nuovo Phi. Altro esempio? Dal fianco al pavimento diviso la distanza dal ginocchio al pavimento. Di nuovo Phi. Le articolazioni delle dita, le sezioni della colonna vertebrale, ancora Phi. Ciascuno di voi è un tributo ambulante alla proporzione divina. Leonardo Pisano, detto Fibonacci (1175 – 1240) fece parte della cerchia dei dotti che gravitava attorno alla corte di Federico II di Svevia. Egli introdusse in Europa i numeri e la matematica araba.

Nella successione da lui inventata e che porta il suo nome, ogni termine si ottiene dalla somma dei due precedenti. I primi elementi sono pertanto:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144…

A partire da tale successione,se ne forma una di tipo frazionario, dalla quale emergono i seguenti rapporti:

1/1; 2/1; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; 21/13; 34/21; 55/34; 89/55; 144/89,

etc. i cui valori decimali approssimati sono:

1; 2; 1,666; 1,6; 1,625; 1,615; 1,619; 1,617; 1,6181; 1,6180; etc.

avvicinandosi progressivamente al rapporto matematico espresso con la lettera greca Phi, che è 1,6180339…

Il numero aureo Φ (Phi) della sezione aurea è l'unico numero esistente, per cui valgono le seguenti condizioni:

1,618 = 1/1,618 = 1,618 – 1

1,618^2 = 2,618 = 1,618 + 1

Quindi, sottraendo il numero 1 da 1,618 si ottiene il suo valore per inverso, aggiungendo il numero 1 ad 1,618, si ottiene il suo quadrato.

Inoltre il numero d'oro Φ è rappresentabile – come tutti i numeri irrazionali – da una frazione a catena. La frazione a catena del numero d'oro si basa esclusivamente fino all'infinito sul numero 1…

Come menzionato inizialmente, il nostro scopo è quello di creare un convertitore che corrisponde al nostro sistema solare in quanto espressione massima dell'armonia universale, e in grado di trasformare l'energia dei Neutrini per una legge di similitudine. A tale scopo osserviamo i periodi di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole, espressi in anni terrestri nella tabella 1… (Vedi fine articolo, N.d.A.A.).

La rivoluzione siderale è il tempo che impiega l'oggetto per compiere un'intera orbita attorno al Sole, ovvero il tempo impiegato per ritornare allo stesso punto rispetto alle stelle fisse; per la Terra, ad esempio, è di 365 giorni. Questo è considerato il vero periodo di rivoluzione di un oggetto. La rivoluzione sinodica è il tempo che impiega un oggetto per ritornare nella stessa posizione del cielo, rispetto al Sole e osservato dalla Terra. La rivoluzione sinodica differisce dalla rivoluzione siderale perché la Terra stessa gira intorno al Sole). I tempi di rivoluzione in anni dei vari pianeti sono le varie elevate di Phi, e cioè

Phi^2 = 1,618… * 1,618…= 2,618…;

Phi^3 = 2.618…*1,618… = 4,236….;

etc. o al contrario,

1,618…/1,618… = 1,0; 1,0 / 1,618… = 0.618…; 0,618…/1,618… = 0,3819… etc."

E, a pag. 13, sulla stabilità:

"…L'onda G (= Gravitazione, N.d.A.A.) è formata dalle più piccole particelle esistenti ed ha la forma di un'onda stazionaria,vale a dire che in punti precisi si formano dei nodi nei quali non vi è movimento. In questi nodi c'è stabilità assoluta. Ogni cosa esistente in maniera stabile (protone, elettrone, pianta, mammifero, pianeta, galassia…) si trova con i suoi vari parametri (lunghezza, volume, massa, frequenza…) in un nodo di un determinato intervallo. Con metodi di calcolo basati sul logaritmo naturale (ln), applicando delle frazioni a catena (che hanno carattere frattalico!), H. Műller riesce a determinare tutti gli intervalli stabili calibrando il sistema con la grandezza più stabile conosciuta. Ad esempio, per calcolare tutte le masse stabili si calibra il sistema logaritmico con la massa del protone, ricavando in tal modo tutte le altre. Analogamente, tutte le masse dei pianeti occupano determinati intervalli sulla retta logaritmica mentre altri rimangono vuoti. La stessa cosa vale per i diametri e i tempi di rivoluzione dei pianeti, e il risultato del calcolo porta in maniera estremamente precisa alle misure che troviamo effettivamente nell'universo. Lo stesso tipo di calcolo è applicabile alle particelle subatomiche…"

(Vedi il nostro articolo citato sulle stringhe, con i numeri di Fibonacci, i numeri primi naturali, le partizioni, ma anche sulla stabilità nucleare). In un recente articolo della rivista Focus n.° 171 di Gennaio- 2007, "La tavola va in orbita" con una nuova rappresentazione grafica circolare della Tavola di Mendeliev, gli elementi più stabili si trovano sullo stesso raggio: Idrogeno, Carbonio, Silicio, Germanio, Stronzio, Piombo, con i rispettivi numeri atomici (o "numeri magici") 1, 6, 14, 32, 50, 82, legati ai nostri numeri primi naturali più vicini 1 (primo improprio), 7, 13, 31, 47, 83, con rispettivi coefficienti f (tali che P = 6f ±1) 0, 1, 2, 5, 8, 13 (numeri di Fibonacci, vedi anche l'articolo "Numeri primi naturali e cariche frazionarie" sul sito del Prof. Di Maria). Tali coefficienti dei numeri primi naturali più vicini ai numeri atomici degli elementi chimici suddetti (e più stabili degli altri) sono tutti numeri di Fibonacci, ma non si ritrovano tutti insieme (ma solo alcuni di essi) su tutti gli altri raggi, per esempio quello che comincia con l'elemento Berillio (numeri atomici 4, 12, 20, 38, 56, 88 con rispettivi coefficienti 1, 2, 3, 6, 9, 14, dei quali solo i primi tre sono numeri di Fibonacci); gli elementi più stabili del primo raggio sono quindi legati in qualche modo alla stabilità di cui parla H. Muller. Numeri di Fibonacci, quindi legati ai logaritmi naturali, ai numeri primi naturali, ai frattali, alle spirali, e infine, molto verosimilmente, e ciò che è molto importante, alla stabilità notata (e spiegata con le suddette considerazioni di Lange, Muller e anche nostre) in fenomeni quantistici (stringhe, cariche elettriche, etc.), chimici (stabilità nucleare maggiore in alcuni elementi), astronomici (orbite planetarie), biologici (cicli biologici delle cicale, emissione di biofotoni da parti del corpo umano), anatomici (proporzioni auree tra varie parti del corpo), e perfino psicologici (concetti di bellezza ed eleganza in alcune opere architettoniche e artistiche), etc.

Teoria dei numeri, quindi in conclusione, (serie di Fibonacci, numeri primi normali e naturali, partizioni) legata alla stabilità di molti fenomeni naturali (quelli sopra accennati e forse anche tantissimi altri), secondo le ipotesi di Christian Lange e H. Muller da noi perfettamente condivise, e quindi potrebbero benissimo, alla fin fine, anche avere ragione.

La Teoria dei numeri sarà connessa, con il Progetto Langlands ancora in corso, alla Teoria quantistica dei Campi, e, più in generale, a tutte le branche della matematica. La serie di Fibonacci sarà molto importante in questo contesto, che spazia dalle stringhe alle galassie (le cui spirali, come quelle della conchiglia del nautilus, dipendono anch'esse dai numeri di Fibonacci) passando per i pianeti e le durate delle loro rivoluzioni attorno al Sole (o alle altre stelle attorno alle quali orbitano) vedi Tabella 1 seguente (accennata da Lange all'inizio del suo articolo)

TABELLA 1

Pianeta	Esponente di Phi	Periodo in anni	Periodo inverso In anni -1
Mercurio siderale	-3	0,236068	4,236068
Mercurio sinodico	-2	0,381966	2,618034
Venere siderale	-1	0,618034	1,618034
Terra	0	1,000000	1,000000
Marte siderale	1	1,618034	0,618034
Marte sinodico	2	2,618034	0,381966
Asteroidi siderale	3	4,236068	0,236068
Asteroidi sinodico	4	6,854108	0,145896
Giove siderale	5	11,09017	0,090170
Giove sinodico	6	17,94427	0,055728
Saturno siderale	7	29,03444	0,034442
Saturno sinodico	8	46,97871	0,021286

Come si vede, i valori di questa Tabella 1 sono il contributo della serie numerica di Fibonacci all'astronomia del nostro sistema solare garantendo regolarità e stabilità alle orbite planetarie.

Notiamo che la parte intera inferiore o superiore dei periodi in anni (valori nella terza colonna) corrispondono ai numeri primi: 1, 1, (primo improprio), 2, 3, 5, 7, 11, 17, 29 e 47; ed in particolare, a partire da 5, sono anche numeri primi naturali, poiché i loro coefficienti f della forma $Pn = 6f \pm 1$ sono numeri di Fibonacci: infatti

Pn		f
5	=	6*1 – 1
7	=	6*1 + 1
11	=	6*2 – 1
17	=	6*3 – 1
29	=	6*5 – 1
47	=	6*8 – 1

i numeri coefficienti f 1, 1, 2, 3, 5, 8 dei suddetti primi naturali, con predilezione del segno meno (mentre per i numeri magici la preferenza era per il segno più); inoltre, notiamo anche che (TAB. 2):

Pn	+	fn	=	fn+4
7	+	1	=	8
11	+	2	=	13
17	+	3	=	20 ≈ 21
29	+	5	=	34
47	+	8	=	55 ,

con tali somme anch'esse tutte numeri di Fibonacci, ad eccezione del 20, comunque vicinissimo a 21 numero di Fibonacci.

Tutto ciò non può essere solo frutto di semplici coincidenze, ma conseguenza di profonde leggi naturali, ancora in parte da scoprire. E con le quali poi capire come e perché i numeri di Fibonacci, da soli o come coefficienti f dei numeri primi naturali, possano conferire regolarità e stabilità alle orbite planetarie (nel macrocosmo) o maggiore stabilità in alcuni atomi, o una certa regolarità nelle frequenze delle stringhe (microcosmo quantistico), e così pure nei fenomeni biologici nei quali sono coinvolti. L'Autore dell'articolo di Nexus citato all'inizio pensa che in tal modo la Natura in questo modo, cioè tramite frattali, spirali, logaritmi naturali e numero aureo Phi, tragga energia dal campo del punto zero, e potrebbe anche, alla fin fine, avere ragione. Noi, con le nostre osservazioni e i nostri contributi (concetto di numeri primi naturali, che coinvolgono i numeri di Fibonacci come coefficienti f, e le suddette relazioni delle durate delle rivoluzioni planetarie siderali e sinodiche con i numeri primi naturali e con altri numeri di Fibonacci (vedi TAB.2), oltre che con il nostro lavoro precedente (Teoria di stringa3) sosteniamo la tesi di fondo dell'articolo; e ciòè, in sintesi, la profonda relazione fisico-matematica tra il concetto di stabilità (oltre che di regolarità, armonia, eleganza, ecc.) e il numero aureo Phi, simbolo Φ, avente valore numerico 1,6180339.

6.1 Connessioni con la gravità e con la Teoria di Stringa.

Ogni corpo esercita un'attrazione gravitazionale sugli altri. Per la teoria della relatività generale di Einstein, la presenza di un oggetto massiccio come il Sole *deforma* la struttura dello spazio

circostante: secondo un'analogia utile, lo spazio è come una membrana di gomma su cui venga posata una palla pesante. Questo incurvamento produce un effetto sugli oggetti che si trovano nelle vicinanze del corpo massiccio, in quanto devono percorrere uno spazio modificato. Tornando all'esempio della membrana di gomma, se prendiamo una palla più piccola e la lasciamo andare con una certa velocità iniziale, il percorso che questa seguirà dipende dalla presenza o meno della palla grossa al centro. Se non c'è e lo spazio è piatto, la pallina seguirà una linea retta; se c'è e lo spazio è incurvato, seguirà una traiettoria curvilinea. Ignorando l'attrito, se diamo alla pallina la velocità iniziale e la direzione opportuna, questa continuerà a muoversi lungo una curva chiusa attorno alla palla, cioè "entrerà in orbita".
Una stella come il Sole, come la palla grande, curva la struttura spaziale della regione che lo circonda, ed il moto della Terra (e di tutti i pianeti del sistema solare), come quello della pallina, è determinato dal tipo di curvatura. Se la velocità e la posizione sono opportune, il pianeta orbiterà attorno alla stella.
Con la relatività generale, Einstein è riuscito a mostrare il *meccanismo* grazie al quale la gravità si trasmette: la curvatura dello spazio-tempo. Il "guinzaglio" gravitazionale che lega la stella ed il pianeta è dovuto alle modifiche nella trama dello spazio-tempo dovute alla presenza della stella.
Tali concetti forniscono una interpretazione più precisa sulle due proprietà caratteristiche della gravità. In primo luogo, più il corpo è pesante, maggiore sarà la distorsione spazio-temporale da lui causata; e questo è in accordo con la legge di gravità, secondo cui la forza è direttamente proporzionale alla massa. Secondariamente, la distorsione diminuisce se ci allontaniamo dal corpo che l'ha causata; anche in questo caso c'è accordo con la legge secondo cui la forza è inversamente proporzionale alla distanza. Quindi, con la relatività generale di Einstein i concetti di gravità espressi dalla teoria gravitazionale newtoniana sono sempre validi, ma subiscono una più precisa,o, per meglio dire, una nuova interpretazione fisico-matematica.
È importante notare che anche il corpo più piccolo in sistemi come quello Sole-Terra, deforma lo spazio-tempo, anche se molto meno di quello più massiccio. Ecco il motivo per cui la Terra mantiene il suo satellite, la Luna, in orbita, e come ci mantiene ben saldi sulla sua superficie.
In altre parole, l'agente della gravità per Einstein è la trama stessa del cosmo, la trama dello spazio-tempo.
L'astronomo tedesco Karl Schwarzschild fu in grado di utilizzare la teoria della relatività generale per determinare esattamente la curvatura dello spazio-tempo in prossimità di una stella perfettamente sferica. Se la massa di una stella è concentrata in una regione abbastanza piccola, in modo che il rapporto tra massa e raggio sia superiore ad un certo valore critico, la distorsione spazio-temporale che ne consegue è così pronunciata che *tutto* ciò che capita nei dintorni della stella – luce inclusa – non riesce a sfuggire alla sua morsa gravitazionale. Proprio perché nemmeno la luce può uscire da queste stelle "compresse", queste furono chiamate *buchi neri*: "buchi" perché tutto ciò che vi si avvicina vi cade dentro, "neri" in quanto non emettono luce.
È quindi la forza gravitazionale la diretta responsabile del moto orbitale dei pianeti attorno al Sole e della nascita dei buchi neri.
Andiamo adesso ad analizzare la forza gravitazionale nell'ambito della teoria delle stringhe.
È possibile chiedersi se il modello geometrico dello spazio-tempo, che riveste un ruolo fondamentale sia nella relatività generale sia nella teoria delle stringhe, non sia anche un utile "artificio" per descrivere le relazioni spaziali e temporali tra vari punti dell'universo, o se sia piuttosto qualcosa di *reale*, qualcosa in cui siamo davvero immersi. La teoria delle stringhe, ha una risposta da suggerire. Il gravitone, il più piccolo pacchetto di forza gravitazionale (praticamente il bosone mediatore dell'interazione gravitazionale), è un particolare modo di vibrazione delle stringhe: così come la luce visibile è composta da un numero enorme di fotoni (i bosoni mediatori dell'interazione elettromagnetica, anch'essi particolari modi di vibrazione di stringhe), il campo gravitazionale è formato da un numero altrettanto enorme di gravitoni, cioè da stringhe che vibrano nel modo corrispondente. I campi gravitazionali, a loro volta, sono codificati all'interno della curvatura dello spazio-tempo: in tal modo si è portati ad identificare la trama dello spazio-tempo

con un insieme enorme di stringhe che vibrano tutte nello stesso modo, quello tipico del gravitone. Nel linguaggio della teoria dei campi, questa impressionante sequenza di stringhe ordinate è detta uno *stato coerente*.
Il nostro modo usuale di ragionare presuppone sia la nozione di spazio sia quella di tempo: lo spazio in cui una stringa vibra e la successione di istanti che ci porta a riconoscere i cambiamenti nella sua configurazione. Ma nello stato primigenio, cioè prima che le stringhe si mettano a vibrare in modo coerente, *lo spazio ed il tempo non possono realizzarsi*. È come se le singole stringhe fossero "scampoli" di spazio-tempo, che danno luogo alle idee convenzionali di spazio e tempo solo quando si mettono a vibrare in un certo modo coordinato.
Da quanto detto è logico dedurre che anche per la forza gravitazionale, che permette ai pianeti di orbitare attorno alla loro stella, esiste una descrizione matematica che usa il linguaggio della teoria delle stringhe. Quindi, anche per le orbite planetarie, in cui rispuntano ancora una volta i numeri primi naturali e quindi la serie di Fibonacci, precisamente i valori corrispondenti rispettivamente al rapporto aureo Φ ed alla sezione aurea ϕ, è possibile la connessione sia con la teoria delle stringhe, precisamente con il modello Palumbo-Nardelli in cui è descritta nel membro di sinistra l'azione di una stringa bosonica avente la vibrazione tipica del gravitone, sia con la Teoria dei Numeri, precisamente con l'identità di Rogers-Ramanujan in cui compare il valore della sezione aurea.
Avremo, in definitiva, le seguenti equazioni:

$$\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi\right]=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_{\mu}\Phi\partial^{\mu}\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_v\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f(-t)^{1/5}}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right]. \quad (6.1)$$

Ringraziamenti

È espresso desiderio di M. Nardelli, coautore e curatore del presente lavoro, rivolgere i doverosi ringraziamenti al geniale F. Di Noto, per l'invio del preziosissimo materiale sulla Teoria dei Numeri, che ha permesso la stesura e l'elaborazione del presente lavoro.

Bibliografia

M. Nardelli "Further mathematical connections between Palumbo's model and string theory" – Database CNRSOLAR – 122JA2006 – 22.11.2006.

M. Nardelli, F. Di Noto, A. Tulumello "Fibonacci, Primi e Teoria di Stringa" – Database CNRSOLAR – 113BC2006 – 07.11.2006.

M. Nardelli "New mathematical connections between Riemann-Ricci-Einstein models and String Theory, Cosmological Constant, Dark Matter and Dark Energy" – Database CNRSOLAR – 116BC2006 – 07.11.2006.

M. Nardelli "La Musicalità dell'Universo tra Scienza e Fede" – Database CNRSOLAR – 121JA2006 – 22.11.2006.

M. B. Green and J. H. Schwarz "Anomaly Cancellations in Supersymetric D = 10 Gauge Theory and Superstring Theory" – CALT-68-1182; 1984.

M. B. Green, J. H. Schwarz and P. C. West "Anomaly-Free Chiral Theories in Six Dimensions" – CALT-68-1210; 1985.

Finito di stampare nel mese di Gennaio 2007
presso DI. VI. Service – Via Miranda, 50 – 80131 Napoli