Teoria dei Numeri e Teoria di Stringa,ulteriori connessioni: Congettura (Teorema) di Polignac, Teorema di Goldston-Yldirim e relazioni con Goldbach e Numeri Primi Gemelli

Michele Nardelli[1,2] e Francesco Di Noto

[1] Dipartimento di Scienze della Terra
Università degli Studi di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10
80138 Napoli, Italy

[2] Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Polo delle Scienze e delle Tecnologie
Monte S. Angelo, via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

Riassunto

Scopo del presente lavoro è quello di evidenziare le ulteriori connessioni ottenute tra alcuni settori della Teoria dei Numeri ed alcuni settori della Teoria delle Stringhe, sempre nell'ambito del **Programma Langlands**. Vengono innanzitutto evidenziate le parti algebriche inerenti la Congettura di Polignac (Teorema di Polignac) ed il Teorema di Goldston-Yldirim. Successivamente vengono descritte alcune congetture inerenti i numeri primi Gemelli dal punto di vista propriamente analitico. Per concludere, si mettono in rilievo le connessioni matematiche ottenute tra questi importanti settori della Teoria dei Numeri e la Teoria delle Stringhe.

1. Dalla Congettura al Teorema di Polignac: dimostrazione

La congettura di Polignac (qui dimostrata, e quindi da potersi considerare teorema a tutti gli effetti) dice che :

Per ogni numero pari d esistono infiniti numeri primi consecutivi tali che:

$$d = q - p \qquad (d = 2 \text{ per i numeri gemelli})$$

(d invece di n per non confonderlo con n dei numeri $N = 10^n$ coinvolti nella dimostrazione, come vedremo).

La congettura di Polignac era una generalizzazione della congettura dei numeri primi gemelli , nei quali, com'è noto, $d=2$ come differenza minima tra due numeri primi consecutivi p e q, tali che $q - p = 2$ infinite volte. Per la congettura di Polignac abbiamo invece $d > 2$, tale che $q - p = d$ infinite volte.

Per dimostrare tale congettura, e quindi trasformarla finalmente in "Teorema di Polignac", ci baseremo, tra l'altro, sulla frequenza logaritmica dei numeri primi fino a numeri di forma $N = 10^n$.

Poiché il logaritmo decimale di 10^n è n, e la frequenza dei numeri primi fino a 10^n è di circa uno ogni 2n unità (e cioè 1/2n), in realtà un po' maggiore, per esempio fino ad $N = 10^7$ la frequenza dei numeri primi non è perfettamente $1 / 2 * 7 = 1/14$, ma $1 / 15$.

Ma per brevità consideriamo semplicemente 1 / 2n, che serve molto bene al nostro scopo, e quindi possiamo dire che fino a 10^n ci saranno circa $\pi(10^n) \sim 10^n / 2n \sim N/2 \log(N)$.
Per esempio per N = 100 ci saranno π (100) = 100 /4 = 25 primi, uno ogni quattro unità, e quindi con differenza media d = 4 mentre per N = 1.000 ci saranno circa

$$\pi(1.000) = 1.000 /6 = 166,6 \sim 168$$

numeri primi, uno ogni circa sei unità, e quindi con differenza media d = 6.
La differenza media d = 2 comincia subito per $N = 10 = 10^1$, quindi π (10) = 10 /2n =10/ 2 = 5 ~ 4 (valore reale di quattro numeri primi 2, 3, 5, 7, con le due coppie di gemelli 3 ;5 e 5; 7 con differenza media 2 = 2n =2*1= 2 tra un primo e l'altro, e tutto ciò sarà molto importante per il teorema di Goldston e gli intervalli numerici più densi, come vedremo, proprio a causa delle coppie di numeri primi gemelli presenti in questi intervalli densi e le coppie di gemelli sono l'ultima coppia di Goldbach per molti numeri di tipo N = 12n, mentre coppie di numeri primi consecutivi non gemelli (e quindi con d > 2) sono l'ultima coppia di Goldbach per N sia di forma 12n, per esempio 48, per il quale l'ultima coppia di Goldbach è composta dai numeri primi 19 e 29 e quindi con d = 29 – 19 = 10, sia di forma diversa; qui però n non è un esponente di 10, ma il coefficiente della forma generale dei numeri primi $P = 6n \pm 1$, e quindi da non confondere con n di 10^n.
E l'ultima coppia di Goldbach, quale che sia N, è utile per la nostra dimostrazione basata su n di $N= 10^n$.
Osservando infatti bene tutte le coppie di numeri primi consecutivi con differenza d = 2 (e quindi gemelli), ma anche quelle con d = 4, d = 6, d = 8, si scoprono cose interessanti ai fini della nostra dimostrazione. Vediamo anzitutto, per $N = 100 = 10^2$, tutte le coppie di gemelli: esse sono otto, e precisamente:

p + 2 =	q	;	p +	q =	N = 12n
3	5		3	5	8 eccezione
5	7		5	7	12 = 12 * 1
11	13		11	13	24 = 12 * 2
17	19		17	19	36 = 12 * 3
29	31		29	31	60 = 12 * 5
41	43		41	43	84 = 12 * 7
59	61		59	61	120 =12 * 10
71	73		71	73	144 = 12 *12
…	…		…	…	… …

Notiamo subito che le somme di due numeri gemelli p + q sono, tranne la coppia 3 + 5 = 8, tutte multiple di 12, e quindi di forma 12n, numeri che chiameremo "numeri padri" dei numeri gemelli; da tali numeri padri si risale ai numeri gemelli con la relazione

$$p = \frac{12n}{2} - 1 = 6n - 1, \qquad q = \frac{12n}{2} + 1 = 6n + 1$$

per esempio per p = 29 e q = 31, p + q = 60 = 12*5

con 60 = loro numero padre, infatti $\frac{60}{2} - 1 = 29$ e $\frac{60}{2} + 1 = 31$

Per il nostro Teorema N°1, una coppia di gemelli è sempre l'ultima coppia di Goldbach per N pari = 12n = numero padre di due numeri gemelli ma non, viceversa, tutti i multipli di 12 sono numeri padri di gemelli, per es. 48 non lo è, poichè $\frac{48}{2} - 1 = 23$ primo

e $\frac{48}{2} + 1 = 25$ non primo, essendo $25 = 5^2$

(48 è il più piccolo multiplo di 12 a non generare una coppia di gemelli). Viceversa, tutti i numeri primi gemelli, tranne 3 e 5 (poiché 3 non è di forma generale $P = 6n \pm 1$) hanno come somma un multiplo di 12, e quindi, un numero padre.

Ma per molti altri numeri pari diversi da 12n, l'ultima coppia di Goldbach è formata da due numeri primi con differenza d > 2, e quindi con numeri padri diversi da N =12n, come vedremo, e con d > 2 ciclicamente crescente e importante ai fini della dimostrazione della congettura di Polignac, che così risulta legata sia ai numeri primi gemelli (con d minima =2), e della quale è una generalizzazione a d > 2, sia alla ex-congettura di Goldbach, poiché una qualsiasi coppia di numeri primi consecutivi con d>2 è anch'essa l'ultima coppia di Goldbach per N = p + q e quindi loro somma e insieme "numero padre", e ogni d > 2 dà forma particolare ai numeri padri dei due numeri primi q – d = p, per esempio tutti i numeri primi con differenza d = 4 hanno numeri padri di forma N = 12n – 6, tranne la sola prima coppia 3 e 7, come vedremo con la successiva tabella di numeri primi consecutivi con differenza d = 4 (fino a 100 ce ne sono sette coppie come per i numeri gemelli):

p + 4	= q	p +	q =	N =	6n - 6
7	11	7	11	18	24 - 6
13	17	13	17	30	36 - 6
19	23	19	23	42	48 - 6
37	41	37	41	78	84 - 6
43	47	43	47	90	96 - 6
67	71	67	71	138	144 - 6
79	83	79	83	162	168 - 6
,,,	…	…	…	…	…

Anche queste otto coppie hanno il loro numero padre N
di forma N = 6n – 6 tale che $p = \frac{N-6}{2} - 2$ e $q = \frac{N-6}{2} + 2$

dove il denominatore 2 = d/2 = 4/2, per cui la forma generale per trovare p e q è

$$p = \frac{N-6}{2} - \frac{d}{2} \quad \text{e} \quad q = \frac{N-6}{2} + \frac{d}{2}$$

Per esempio per N = 90 = 96 - 6,

$$p = \frac{90}{2} - 2 = 45 - 2 = 43 \quad \text{e} \quad q = \frac{90}{2} + 2 = 45 + 2 = 47$$

Quindi, dato un qualsiasi numero N di forma 12n – 6, esso può generare una coppia di primi tali che p + 6 = q, per esempio

N =138 = 144 - 6, e quindi p = 138/2 -2= 69 – 2 = 67, e q = 138/2 +2 = 69 + 2 = 71.

Ma vediamo ora cosa succede con d = 6

p + 6 = q		p + q		= N =	12n $\pm$ 4
23	29	23	29	52	48 + 4
31	37	31	37	68	72 - 4
47	53	47	53	100	96 + 4
53	59	53	59	112	108 + 4
61	67	61	67	128	132 - 4
73	79	73	79	152	148 + 4
83	89	83	89	172	168 + 4
…	…	…	…	…	…

Qui però le coppie di numeri primi con differenza d = 6 sono sette. Anche qui, p e q possono essere ricavati dal numero padre N con la solita relazione, $p = \frac{N}{2} - 3$ e $q = \frac{N}{2} + 3$

Per es. p = 152/2 - 3 = 76 – 3 = 73, q = 152/2 + 3 = 79 .
Con differenza d = 8, invece si hanno l'unica coppia

p + 8 = q		p + q		= N =	12n + 6
89	97	89	97	186	180 + 6

Ora il "numero padre" è N = 12n + 6, con la solita eccezione quando p = 3.
Per d = 10 , invece, non c'è nessuna coppia.
Conclusione: dato $N = 10^n$, ci sono più coppie per d =n, 2n, 3n, per diminuire rapidamente per d = 4n, e sparire del tutto per d = 5n ~ $\sqrt{N} = \sqrt{10^n}$, come possiamo constatare già per N = 100 = 10^2, con una sola coppia di primi con d = 8 = 4n = 4*2, e nessuna coppia per d = 10 = 5n = 5*2. Se si riprova con $10^{(n+1)}$, le coppie con d = 5n ricompaiono per poi sparire in prossimità di 5(n+1).
Qui ricordiamo che n di 10^n è collegato sia pure in modo approssimativo al logaritmo decimale di 10^n, che equivale a circa 2n per difetto (per es. log 10^{12} = 27, 631…^{2n} = 2*12= 24,

e alla formula $\pi(10^n) \sim \frac{10^n}{2n} \sim \frac{N}{\log N}$

Pertanto, qualsiasi numero pari 2n comincia ad essere differenza d tra due numeri primi consecutivi a partire da N = 10^n, per poi ripetersi infinite volte, cosi come d = 2 comincia a manifestarsi da numeri prossimi a 10^n = 10^1 = 10, con le coppie di gemelli 3 e 5, 5 e 7, per poi manifestarsi infinite volte anche dopo 10^1, e cioè per le infinite coppie di primi gemelli . Per fare un esempio, 2n = 20 non può essere differenza d tra due numeri primi minori di 100, poiché per essi la frequenza è ~ 4 = 100/25, e in 20 unità ci sono in media 20/4 = 5 numeri primi. Quindi 20 =2*10 = 2n comincia ad essere differenza d tra due numeri primi, quando questi saranno dell'ordine di N ~ 10^{10} cioè prossimi a 10 miliardi, per poi ripetersi infinite volte per gli infiniti numeri primi maggiori di 10 miliardi, così come 2 è la differenza tra tutti i primi gemelli esistenti maggiori di 10, ma anche prima per le due coppie di gemelli 3 e 5, e 5 e 7 poiché d = 2n si può presentarsi raramente anche per numeri consecutivi minori di 10^n, vedi per esempio la coppia

89 e 97 con numeri primi minori di $100 = 10^2$, mentre la loro differenza reale $d = 8$ comincia ad essere sempre più frequente in prossimità di $N = 10^4 = 10.000$, poiché $8 = 2*4 = 2n$.

Questa connessione tra n di $d = 2n$ e n di $N = 10^n$ è quindi alla base della ex- congettura di Polignac, estensione a 2n della ex congettura dei numeri gemelli dove $2n = 2*1 = 2$, e recentemente dimostrata da Goldston, Yldirim e Pintz con la relazione $\Delta = 0$ = infinità dei numeri gemelli, ma ora anche per $d = 2n$ ma a partire da numeri primi consecutivi con differenza 2n e quindi dell'ordine di grandezza di $N = 10^n$.

Per fare un esempio di numeri primi consecutivi "titanici",cioè di almeno 1.000 cifre, consideriamo $N = 10^{1000}$, e quindi $d = 2n = 2*1.000 = 2.000$ = differenza tra due numeri primi consecutivi di almeno 1.000 cifre ciascuno.

Per $N = 10^{100}$, per fare un altro esempio, la differenza $d = 2n = 2*100 = 200$ comincia ad apparire raramente prima di 10^{100}, per poi da 10^{100} in su, ripetersi infinite volte; per esempio per 10^{110}, più grande di 10^{100}, tutti gli intervalli $d=2*110=220$, con $210/200 > 1$ hanno almeno una probabilità di avere due numeri primi consecutivi con $d = 200$, che è minore della frequenza media 220 per numeri di tipo 10^{110}, più grandi dei numeri di tipo 10^{100}.

Infatti, troviamo un raro esempio di $d = 60 = 4 * n = 4*15$, in prossimità di $10^n = 10^7$, <u>nel prossimo capitolo sul teorema di Goldston.</u>

Tale $d = 60$, preceduta e seguita da altre due d , una di $28 = 4*7$ unità e l'altra di 23 unità, rende infatti molto rarefatto di numeri primi (soltanto due) l'intervallo di 100 unità tra 10^7 e $10^7 + 100$, mentre, viceversa, come vedremo nelle pagine successive, l'intervallo pure di 100 unità, tra 10^7 e $10^7 - 100$, è molto più denso (ben nove numeri primi), a causa di ben due coppie ravvicinate di gemelli, con $d = 2$, e altre coppie di primi consecutivi con d = 6, 22, (2), 6, 6, 28, (2), 18, mentre la media statistica locale è di circa $100/14 = 7$ numeri primi ogni 100 unità. Si hanno invece nove numeri primi nel primo intervallo e solo due nel secondo intervallo; ma insieme fanno $9 + 2 = 11$ numeri primi in entrambi gli intervalli di $100 + 100 = 200$ unità, che statisticamente ne dovrebbe contenere 14, e così la frequenza media si normalizza rapidamente se si considera un intervallo più lungo.

Questa connessione tra ultima coppia di Goldbach , cioè due numeri primi consecutivi con differenza $d \sim 2n$ per numeri pari di grandezza $N \sim 10^n$ (ex congettura di Polignac), numeri primi gemelli (ultima coppia di Goldbach con $d = 2$ per $N = 12m$ di ogni ordine di grandezza, e quindi anche da $10^1 = 10$), spiega ora perché ci sono infinite coppie di numeri primi consecutivi con differenza $d = 2$, $d = 4$, $d = 6$, $d = 8$,… e, più in generale, $d = 2n$ ma a partire da N dell'ordine di grandezza di 10^n in poi, ma più raramente anche prima, infatti per $d = 2$ ci sono già due coppie di gemelli 3 e 5 (unica eccezione alla regola della loro somma $p + q = 12m$) e 5 e 7 (prima coppia tale che $p + q = 5 + 7 = 12*1=12$) e anche perché ci sono grappoli "improvvisi" di numeri primi in intervalli densi, e "rarefazioni" di numeri primi in intervalli vicini, come nell'esempio riportato (e sul quale torneremo) di $(10^7) \pm 100$, cosa spiegabile, come vedremo, con la presenza ravvicinata di due coppie di numeri primi gemelli i quali, oltre a far aumentare il numero dei numeri primi nell'intervallo denso, comportano anche altre differenze molto piccole per altre coppie vicine di numeri primi, e quindi anche altri numeri primi vicini, che rendono ancora più denso l'intervallo considerato. Viceversa, nell'intervallo più rarefatto, ci sono d molto grandi rispetto alla media locale, fino a circa $d \sim 8n$, come per es. $60/7 = 8,57$ nell'esempio riportato; caso molto raro di d elevata, poiché $d = 60$ comincia ad essere "normale" a partire da $N = 10^n = 10^{30}$, in poi, in modo che $d = 2n = 2*30 = 60$, con rare apparizioni prima di 10^{30} (nel nostro esempio, essa appare già a $\sim 10^7$).

In altre parole, per $d = 2n$ = frequenza locale $f \sim 2n$, il loro rapporto $f/d \sim 1$, mentre per f maggiori abbiamo $f/d < 1$, mentre per f minori abbiamo il rapporto $f/d > 1$, per cui $d > f$ si ripete infinite volte a partire da $d \sim f \sim 2n$ per 10^n in poi.

Se poniamo $d = 2$, caso dei numeri gemelli, qualsiasi frequenza $f = 2n$ è sempre maggiore di 2, e quindi il rapporto f/d è sempre maggiore di 1, e le coppie di gemelli si ripetono infinitamente già

a partire da $N = 10^n = 10^1 = 10$ in poi, mentre per $d = 8 = 2*4 = f$ il rapporto $f/d = 8/8 = 1$ solo da $10^4 = 10.000$ in poi, mentre se d è maggiore di f, per es. d =12, il rapporto sarà 8/12 = 0,6 e quindi una differenza d = 12 è sempre possibile ma molto rara prima di 10^{12}, cioè da quando $f/d \geq 12/12 \geq 1$ e quindi si ripete sempre più spesso e quindi infinite volte, proprio come d = 2 per gli infiniti numeri gemelli. Ex congetture dei numeri gemelli e della sua estensione, ex- congettura di Polignac, sono ora unificate e dimostrate insieme, tramite la loro connessione con la ex-congettura di Goldbach, per la quale ogni coppia di numeri primi consecutivi costituiscono l'ultima coppia di Goldbach per tutti i numeri pari $N \geq 4$, quale che sia d (d = 2, la minima possibile, per i numeri gemelli).
Il numero di coppie di primi consecutivi con differenza d > 2 si calcola approssimativamente con la stessa formula valida per le g coppie di numeri gemelli, e cioè:

$$g \sim \frac{N}{(\log N)^2}, \sim \frac{N}{f^2} \qquad (1)$$

e per i numeri N di forma $N = 10^n$,

$$g \sim \frac{10^n}{4 * n^2} c \qquad (2)$$

con la nostra formula corretta tramite il numero correttore di Legendre c = 1,08366, che dà risultati più precisi della (1).
Infatti, fino a 100 ci sono 8 coppie di gemelli, con d = 2, 7 coppie di primi consecutivi con d = 4, e 7 coppie di primi consecutivi con d = 6, con rispettivamente 8 e 7 numeri molto vicini tra loro.
A maggior ragione è vera anche la congettura di Jngrun Chen, secondo la quale un numero pari 2n è infinite volte la differenza tra due numeri primi *non consecutivi* (come invece sono i numeri primi gemelli e i numeri delle coppie di Polignac), e qui entrano in gioco tutte le coppie di Goldbach per qualsiasi numero N pari,e non solo l'ultima coppia. Connessione con Goldbach, quindi, anche della congettura di Chen oltre che con la congettura dei gemelli e quella di Polignac. Ogni numero pari N dà origine a diverse (G), coppie di Goldbach (numeri primi non consecutivi tranne l'ultima coppia) tali che p + q = N, e con differenza d' pari, sempre maggiore di d = differenza tra due numeri primi consecutivi = ultima coppia di Goldbach, come vedremo negli esempi successivi. Avremo, quindi, d = 2 per i numeri gemelli, e d'= 4 = differenza tra infinite coppie di numeri primi anche non consecutivi, come per esempio 3 e 7 (tra di loro c'è il 5), d' = 6 = differenza tra 7 e 13 (tra di loro c'è 11) oppure tra 13 e 19 (tra di loro c'è 17) così via .
Per esempio per N = 100, abbiamo le sei coppie di Goldbach

p + q = $100 = 10^2$; q – p = d' = pari

3	97		94
11	89		78
17	83		66
29	71		42
41	59		18
47	53	ultima coppia di Goldbach	6 = d = 3n > f = 2n = 4

per ogni N pari ci sono G coppie di Goldbach di numeri primi non consecutivi con differenza pari d' = 2n (congettura di Chen) e con la sola ultima coppia di numeri primi consecutivi, con differenza d = 2n, e d =2 solo per i numeri gemelli. L'ultima

coppia di Goldbach è $\frac{100}{2} \pm \frac{d}{2} = 100/2 \pm 3 = 47$ e 53.

Lo stesso succede, ovviamente, per tutti gli infiniti numeri pari come differenza d' = 2n e per tutti gli infiniti numeri pari N, ognuno con le sue G coppie di Goldbach , per esempio N = 36 (usando la nostra procedura per trovare le coppie di Goldbach, con le colonne p e q primi e non primi, da cui selezionare le coppie di numeri primi, sottolineati , tali che p + q = N),

p +	q = 36		q – p = d'
1	35		34
3	33		31
5	31	= coppia di Goldbach	26
7	29	= coppia di Goldbach	22
9	27		18
11	25		14
13	23	= coppia di Goldbach	10
15	21		6
17	19	= ultima coppia di Goldbach e gemelli, poiché 36 =12*3	2 = d

Le coppie di primi sottolineati sono coppie di Goldbach per quanto riguarda la loro somma p + q = N, mentre sono coppie di Chen per quanto riguarda la loro differenza d', e l'ultima coppia come coppia di Polignac in questo caso anche di gemelli, per loro differenza q – p = d = 2.
Queste sono in sintesi, le connessioni tra le ex-congetture di Goldbach, gemelli, Chen e Polignac quando si tratta di una qualsiasi coppia di numeri primi, perché essa può essere:
1) una qualsiasi coppia di Goldbach per un numero pari qualsiasi $N \geq 4$, se i due numeri primi non sono consecutivi e la loro differenza è d = 2n, e quindi è anche una coppia di Chen;
2) una coppia di gemelli p e q se la loro differenza è d = q – p = 2 e quindi essi sono consecutivi e quindi formano l'ultima coppia di Goldbach per N = p + q = 12m;
3) una coppia di Polignac se i due numeri primi p e q sono consecutivi ma con differenza q – p = 2n = d > 2 e quindi anche ultima coppia di Goldbach per N = p + q.
Ritornando a coppie di numeri primi molto grandi e consecutivi e quindi coppie di Polignac, dell'ordine di grandezza di $N = 10^7$, faremo l'esempio prima ricordato dei due intervalli $10^7 – 100$ e $10^7 + 100$ e che rivedremo anche nel prossimo capitolo sul teorema di Goldston.

Numeri primi nei due intervalli	Differenze d tra un numero primo e il precedente
9 999 901	
9 999 907	6 ~ 7 = n di 10^7
9 999 929*	22 ~ 21 = 3*7 = 3n
9 999 931*	2 (coppia di gemelli *)
9 999 937	6
9 999 943	6
9 999 971 *	28 = 4*7 = 4n
9 999 973 *	2 (coppia di gemelli*)
9 999 991	18 ~ 21 = 3n
10 000 019	28 = 4n
10 000 079	60 ~ 8,5 n (60/7)

Totale d =	178
Differenza media	178/10 = 17,8 ~ 2n =14,

con differenza media un po' maggiore della differenza statistica d = 2n =14 (in realtà la differenza media è 15). Si hanno nove numeri primi nel primo intervallo e due nel secondo, in totale 9 + 2 = 11 nei due intervalli presi insieme (quindi 100 + 100 = 200 unità), mentre statisticamente, nelle 200 unità, ci dovrebbero essere in media 200/15 = 13,3 ~ 13 non molto lontano dal valore reale 11, quindi unendo i due intervalli in uno solo più esteso, la frequenza media si normalizza subito. Ma perché il primo intervallo è più denso di numeri primi, ben nove anziché la media 6,5, e il secondo invece è più rarefatto, con soli due numeri anziché la media 6,5?

La risposta è certamente nella presenza di ben due coppie di numeri primi gemelli nel primo intervallo, che non solo fanno aumentare il numero dei numeri primi tra loro vicini, e quindi in un breve intervallo, ma comportano anche piccole differenze, per esempio le due d = 6 nel primo intervallo, a causa della distribuzione ciclica delle coppie di Goldbach (che vedremo su altri nostri lavori su su Goldbach e i primi gemelli) , poiché esse sono più numerose, circa il doppio, per N di forma N = 12n, e specialmente per 12n molto grandi, per esempio 1200, 3600, 12000, ecc.

Questa ciclicità della maggiore presenza di coppie di Goldbach vicino a N/2 (con eventuale e probabile coppia di gemelli) comporta coppie di primi non consecutivi con piccole differenze, e di conseguenza una maggiore densità di numeri primi, come nel nostro esempio (maggiore densità cui fanno riferimento i noti teoremi di Goldston, Yldirim e Pintz, ma non ancora connessi a Goldbach, ai numeri primi gemelli e alla congettura di Polignac, come invece noi ora facciamo in questo lavoro).

Viceversa, per N non grossi multipli di 12, le ultime coppie di Goldbach – Polignac hanno grandi differenze (per es. d = 28 e d=60 nel secondo intervallo, e di conseguenza meno densità e quindi più rarefazione.

Infatti nel primo intervallo la differenza media è 17,8, mentre nel secondo intervallo, tra i due soli numeri primi presenti, la differenza media è invece 60/1 = 60, il che spiega bene la sua rarefazione di numeri primi (solo due, contro i nove del primo intervallo, tra i quali due coppie di gemelli, come prima osservato).

Osserviamo ora le due coppie di gemelli presenti nel primo intervallo, per capire meglio come possano determinare la sua maggiore densità di numeri primi. Poiché la frequenza locale delle coppie di gemelli è uguale a $1 / (\log N)^2$, cioè a $1/f^2$ (mentre com'è noto, per i numeri primi singoli è di $1/ \log N = 1 /f$), cioè una coppia di gemelli ogni circa $15*15 = 15^2 =225$ unità (fino a 10^7 ci sono circa $10^7 / 225 = 44.444$ coppie di gemelli, con buona approssimazione), nell'intervallo considerato avremmo in teoria 100/225 = 0,4 coppie i gemelli, mentre in realtà ce ne sono ben due, con distanza reale tra loro di 40 unità anziché 225, cioè circa 225/40 = 5,628 inferiore alla media statistica.
Si tratta, quindi, di due coppie di gemelli molto ravvicinate, e ricadenti nell'intervallo di 100 unità tra 9 999 900 e 10 000 000, cioè tra 10^7 e $10^7 – 100$, mentre nel successivo intervallo di 100 unità non c'è nessuna coppia di gemelli, ma solo due soli numeri primi con distanza d = 60 = 15 *4, come abbiamo già visto, molto superiore alla media locale (d = 15) e quindi ne consegue una locale rarefazione di numeri primi. Ci ritorneremo nel prossimo lavoro su Goldston.
Polignac aveva quindi ragione, non potendo però a suo tempo dimostrare la sua congettura, non avendo a disposizione la dimostrazione positiva della congettura di Goldbach, ne quella dei numeri primi gemelli, che ora ci consentono la dimostrazione della sua congettura, con la connessione Goldbach – gemelli – Polignac, e con N di tipo 10^n, per cui 2n è infinite volte la differenza tra due numeri primi consecutivi (e quindi ultima coppia di Goldbach) a partire da $N = 10^n$ (ma raramente anche prima) poiché il rapporto f/d , da tale numero, sarà sempre maggiore di 1, cosa che dà la certezza che 2n = d sia infinite volte la differenza tra due numeri primi consecutivi p e q più grandi di $N = 10^n$, e per alcune e poche rare volte anche minori di $N = 10^n$, come già visto con qualche esempio. Tutte e tre le congetture (Goldbach, gemelli e Polignac sono pertanto vere e interconnesse come descritto in questo lavoro, e anche con i teoremi di Goldston, Yldirim e Pintz , basati sui limiti e sul risultato finale $\Delta = 0$ per quanto riguarda l'infinità dei numeri gemelli.
Esse, con le nostre dimostrazioni, ci serviranno per comprendere meglio, aritmeticamente, questi ultimi teoremi, orientati più verso gli intervalli più densi che non quelli meno densi, che pure esistono, e che si ripetono ciclicamente all'infinito sulla retta numerica.
Una conferma della nostra dimostrazione della congettura di Polignac si ha dalla tavola di sottrazione dei numeri dispari, e quindi dei numeri primi: la differenza d =2 per i numeri gemelli si trova infinite volte accanto alla diagonale che contiene la differenza banale d = 0 tra un numero primo e se stesso, p – p = 0, q – q = 0; mentre d > 2 si allontana sempre più da tale diagonale nulla, ma vi figura infinite volte se si estende la tavola di sottrazione all'infinito, al crescere di p e di q e quindi di d = q - p. (vedere la nostra dimostrazione della congettura dei numeri gemelli nel sito della rivista Metodo n 21-2005

http://geocities/ga57/metodo21.html

che riporta tale tavola di sottrazione dei numeri dispari, comunque facilmente costruibile da chiunque).

Nota con accenni ad uno studio della tabella dei numeri primi fino a 5000, divisi in gruppi di cento e con segnalazione delle coppie di gemelli (d = 2) e delle altre differenze tra gli altri numeri primi consecutivi, a sostegno della dimostrazione della ex-congettura di Polignac, ora considerabile come teorema a tutti gli effetti.

I risultati ottenuti e mostrati nella dimostrazione, sono qui confermati analizzando in una tabella le successive distanze tra i numeri primi consecutivi per alcuni intervalli di 100 unità, in modo da mostrare, anche con successive tabelle riepilogative, il numero dei numeri primi in ogni intervallo di 100 unità, e anche il numero delle coppie di gemelli presenti in ogni intervallo, ricavando la relazione tra i due numeri $\pi(100)$ e il numero g delle coppie di primi gemelli che esso contiene, in ognuno degli intervalli:

$$g \sim \sqrt{\pi(100)} \qquad (3)$$

Gli intervalli sono ovviamente 5000/100 = 50, e si noterà facilmente che gli intervalli più densi sono quelli più ricchi di coppie di gemelli, per i motivi prima addotti (il maggiore numero di coppie di Goldbach per i numeri N pari multipli di 12 e quindi di forma 12m come somma di p e q di ogni coppia di Goldbach, e d = q - p per ogni coppia di Goldbach inerente a N) per esempio nel 30° intervallo tra 2900 e 2999 ci sono undici primi e una sola coppia di gemelli, 2969 e 2971 (c'è almeno una coppia in ogni intervallo, con qualche eccezione con nessuna coppia di gemelli), mentre nel 41° intervallo tra 4000 e 4099 ci sono ben quindici primi e ben quattro coppie
($4 \sim \sqrt{15}$, come dalla (1)), e cioè

4 001 e 4 003; 4 019 e 4 021; 4 049 e 4 051; 4 091 e 4 093.

Ovviamente questo intervallo è più denso del precedente, e in genere gli intervalli più densi si alternano ciclicamente a quelli meno densi con una certa apparente irregolarità, rispettando però la regola generale che al susseguirsi degli intervalli , essi hanno mediamente sempre meno numeri primi e quindi anche sempre meno coppie di gemelli, a causa del rarefarsi di entrambi sulla retta numerica. Poiché i numeri primi sono infiniti, e anche le coppie di gemelli, oltre N = 5 000 (limite massimo della nostra tabella), i successivi intervalli di 100 unità (ma si possono ovviamente considerare intervalli di qualsiasi lunghezza, per es. 200, 1000, 10000, ecc.) finiranno con avere nessun numero primo, un solo numero primo, o due soli numeri primi, gemelli o anche con una differenza di d = 4, d = 6, ecc. comunque di d < 100, con entrambi i primi compresi nell'intervallo considerato. Ogni k-mo intervallo di 100 unità, nel nostro esempio fino a 5 000, è quindi associabile al numero $\pi(100)$, il numero dei numeri primi che esso contiene, e g, il numero delle coppie che esso contiene, e che si aggira sulla radice quadrata del primo numero, a causa della (1), come vedremo nelle successive tabelle riepilogative.

Tabella di alcuni intervalli di cento unità nei numeri primi fino a 5000, disposti a coppie e con indicazione della differenza per ogni coppia, in particolare per le coppie di gemelli, contrassegnate con la lettera "g" accanto a d = 2.

Numeri primi p e q a coppie		differenza pari d = q - p
1° intervallo da 2 a 100		
2	3	1 (sola eccezione, 2 è pari)
3	5	2 g
5	7	2 g
7	11	4
11	13	2 g
13	17	4
17	19	2 g
19	23	4
23	29	6
29	31	2 g
31	37	6
37	41	4
41	43	2 g

43	47	4	
47	53	6	
53	59	6	
59	61	2	g
61	67	6	
67	71	4	
71	73	2	g
73	79	6	
79	83	4	
83	89	6	
89	97	8	

1° intervallo (25 primi, 8 coppie di gemelli)

……..

10° intervallo, da 907 a 997:

907	911	4
911	919	8
919	929	10
929	937	12
937	941	4
941	947	6
947	953	6
953	967	14
967	971	4
971	977	6
977	983	6
983	991	8
991	997	6

10° intervallo, 14 primi, nessuna coppia di gemelli, quindi intervallo meno denso, o più rarefatto, di numeri primi.

….

50° intervallo tra 4 903 e 4 999:

4 903	4 909	6	
4 909	4 919	10	
4 931	4 933	2	g
4 933	4 937	4	
4 937	4 943	6	
4 943	4 951	8	
4 951	4 957	6	
4 957	4 967	10	
4 967	4 969	2	g
4 969	4 973	4	
4 973	4 987	14	
4 987	4 893	6	
4 983	4 999	6	

50° e ultimo intervallo, 15 numeri primi e due coppie di gemelli, quindi di media densità rispetto ai precedenti 49 intervalli.

TABELLA RIEPILOGATIVA DI TUTTI I 50 INTERVALLI

n° intervallo	π (100) n° interv.	g coppie di gemelli presenti
1	25	8
2	21	7
3	16	4
4	16	2
5	17	3
6	14	2
7	16	3
8	14	0
9	15	4
10	14	0
11	16	4
12	12	1
13	15	2
14	11	2
15	17	4
16	12	0
17	15	4
18	12	2
19	12	2
20	13	3
21	14	3
22	10	3
23	15	2
24	15	3
25	10	0
26	11	1
27	15	2
28	14	3
29	12	1
30	11	1
31	12	0
32	10	3
33	11	2
34	15	4
35	11	2
36	14	4
37	13	1

38	12	1
39	11	2
40	11	2
41	15	4
42	9	2
43	16	5
44	9	1
45	11	2
46	12	2
47	12	2
48	12	2
49	8	0
50	15	2

Come si nota facilmente, gli intervalli più densi, con circa 15 primi e 4 oppure 5 coppie di gemelli (a parte il primo intervallo, con 25 numeri primi e 8 coppie di gemelli), si alternano irregolarmente con gli intervalli meno densi, con circa in media 11 numeri primi e nessuna coppia primi gemelli (e quindi $g = 0$), mentre la differenza d aumenta irregolarmente, al massimo anche fino a $d = 14$ nel 10° e nel 50° intervallo (esaminati in dettaglio), e poiché la potenza di 10 più vicina è $1\ 000 = 10^3$, $d = 14 \sim 5*3 = 15$, cioè tre volte n, mentre la differenza minima è 2 per le varie coppie di gemelli presenti nei vari intervalli, tranne alcuni con $g = 0$ (e cioè quelli meno densi di numeri primi). Intervalli più densi di numeri primi, comportano anche maggiore densità di coppie di gemelli, e viceversa, con una relazione approssimativa $g \sim \sqrt{\pi(100)}$ per ogni intervallo più denso. Con questa dimostrazione di Polignac (differenza media $d = 2n$ tra due numeri primi consecutivi crescente mediamente ma irregolarmente al crescere di $N = 10^n$), e ripetuta poi infinite volte per numeri primi più grandi di $N = 10^n$ e solo raramente prima, ci sarà ora più facile capire il teorema di Goldston e simili (Yldirim, Pintz, Tao) basati sugli intervalli brevi più densi di numeri primi, trascurando quelli meno densi, che pure esistono e solitamente vengono identificati con gli intervalli numerici compresi tra n! e n! + n privi di numeri primi, e che sono casi particolari della congettura di Polignac, quando d è molto grande rispetto alla media locale (per es. 14 per numeri primi di tre o quattro cifre, n' = 3, n' = 4, n' per non confonderlo con n di n! come negli intervalli di cento unità fino a 5000 considerati nelle pagine precedenti).

2. Il Teorema di Goldston-Yldirim dal punto di vista aritmetico: relazioni con Goldbach e Numeri primi gemelli.

Il Teorema di Goldston-Yldirim, com'è noto, riguarda anche il ripetersi all'infinito di più o meno piccoli "addensamenti" o "diradamenti" di numeri primi nel susseguirsi dei numeri naturali.
Mentre però Goldston e Yldirim si basano su formule inerenti il concetto di limite, noi considereremo il loro teorema soltanto dal punto di vista aritmetico, con qualche risultato interessante che può aiutare a comprendere meglio tali addensamenti e diradamenti dei numeri primi. Tutto questo verrà attuato usando il nostro Teorema n. 1, la nostra soluzione per la congettura di Goldbach e qualche accenno alla congettura di Polignac, estensione della congettura dei numeri primi gemelli.
Un commentatore web del teorema di Goldston-Yldirim, scrive che non c'è un modello che spieghi la ciclicità nell'addensamento e nel diradamento dei numeri primi. Dice solo di notare due cose: la loro irregolarità, e la tendenza dei numeri primi a "diluirsi" al crescere di N.
L'Autore sembra chiedersi perché, per esempio, i quattro numeri primi 821, 823, 827 e 829 sono concentrati in sole 8 unità (829 – 821 = 8) mentre i precedenti e vicini quattro numeri primi 773,

787, 797 e 809 sono invece "diluiti" in 36 unità (infatti 809 – 773 = 36). Nel primo caso, la distanza media (data dalla differenza diviso le spaziature) tra i quattro numeri e di 8 / 3 = 2,67 mentre nel secondo caso è 36 / 3 = 12.
Per quanto concerne il valore 2,67 è interessante notare che esso è quasi uguale alla somma del numero di Legendre c = 1,08366 e del rapporto aureo $\Phi = 1{,}618033$. Avremo infatti:

1,08366 + 1,618033 $\cong$ 2,70. Ma sappiamo che $1{,}618033 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e che

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \left[R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t)^{1/5}} \frac{dt}{t^{4/5}} \right)} \right].$$ (Nardelli, 2007)

Scrive inoltre: "Questi modelli di raggruppamento e di diffusione continuano per quanto l'occhio può vedere, a tutte le scale. I dieci successivi primi tra 90.279.457 e 90.279.493 (differenza = 36) hanno una spaziatura media di 4, poiché 36 / 9 = 4. I dieci successivi primi tra 98.674.973 e 98.675.461 (differenza = 488) hanno una spaziatura media di 54, in quanto 488 / 9 = 54,22)".
Il Di Noto sembra aver trovato un modello matematico che spiega molto bene tali cicli di addensamento e diluizione di k numeri primi in n unità di differenza m tra il più grande ed il più piccolo numero primo dei k numeri primi presi in considerazione, quale che sia k.
Nei primi due esempi riportati, k = 4 ed m = 8, k = 4 ed m = 36. La spiegazione risiede principalmente nel nostro Teorema n. 1 (tutti i numeri primi tranne il 2 ed il 3, tutti i loro prodotti e potenze sono di forma P = 6n $\pm$ 1) ed in una nostra soluzione positiva della famosa congettura di Goldbach, già pubblicate rispettivamente sulla rivista web "Metodo" n. 18/2003 e 19/2004, con rettifiche ed estensioni su Metodo 20/2005 e 21/2006.
Riepilogando qui brevemente il Teorema n. 1 (numeri primi di forma 6n $\pm$ 1 e loro prodotti e potenze, anch'essi tutti della stessa forma), si vede che essi sono tutti adiacenti ai numeri di forma 6n per ogni n numero naturale.
Ricordiamo che per n = 0 abbiamo $6 \cdot 0 \pm 1 = +1$ e – 1, quindi 1, che, tecnicamente è anch'esso un numero primo ma, notoriamente poco utile in quanto è un fattore banale, mentre 2 e 3 sono di forma $2 = 6 \cdot 0 + 2$ e $3 = 6 \cdot 0 + 3$, diversa dalla forma generale 6n $\pm$ 1 che riguarda tutti gli altri infiniti numeri primi.

n	6n-1	6n	6n+1
0	-1	0	+1
1	5	6	7
2	11	12	13
3	17	18	19
4	23	24	25=$5 \cdot 5 = 5^2$
5	29	30	31
6	35=$5 \cdot 7$	36	37
7	41	42	43
8	47	48	49=$7 \cdot 7$
9	53	54	55=$5 \cdot 11$
10	59	60	61
…	…	…	…

Questo teorema spiega bene l'origine dei numeri primi gemelli, che hanno in comune lo stesso numero n ma non lo stesso segno algebrico. Per esempio:

$6 \cdot 1 \pm 1 = 5$ e 7 ; $6 \cdot 2 \pm 1 = 11$ e 13 ; $6 \cdot 3 \pm 1 = 17$ e 19 ; $6 \cdot 5 \pm 1 = 29$ e 31 ;

$6 \cdot 7 \pm 1 = 41$ e 43 ; ……………..

Per il Teorema di Goldbach, invece, riportiamo l'esempio di N pari = 24 come somma di due numeri primi, per poi spiegare, di conseguenza, il ripetersi dei cicli di Goldston tra intervalli più e meno densi di numeri primi, e più o meno lunghi (con m e k variabili a piacere).

N = 24

p	+	q = 24	
1		<u>23</u>	
<u>3</u>		21	
<u>5</u>		<u>19</u>	coppia di Goldbach
<u>7</u>		<u>17</u>	coppia di Goldbach
9		15	
<u>11</u>		<u>13</u>	coppia di Goldbach e gemelli

Notiamo che $S = 12 = \frac{24}{2}$ (dove S è la semisomma).

I numeri primi sono sottolineati e formano, se sono nella stessa riga, le tre copie di Goldbach (p + q = N) per N = 24: 5 e 19, 7 e 17, 11 e 13 (gemelli).

Come si vede, la coppia di gemelli 11 e 13 è l'ultima coppia di gemelli e la loro somma è sempre un multiplo di 12 (infatti $24 = 2 \cdot 12$), e ciò vale per tutti i gemelli (tranne 3 + 5 = 8 in quanto 3 non è di forma 6n± 1). Questo perché ogni coppia di gemelli è data da $\frac{N}{2} \pm 1$, quindi con differenza 2, la minima per due numeri diversi. Infatti, salendo verso l'alto la differenza d tra le coppie di numeri va crescendo, fino a $d = (N-1)-1 = N-2 = (24-1)-1 = 24-2 = 22$, nel nostro esempio per N = 24.

Riguardo le coppie di Goldbach, a parte la coppia 11 e 13 entrambi numeri primi e gemelli, la cui differenza è 2, le altre due coppie hanno differenza maggiore: 19 – 5 = 14 e 17 – 7 = 10. Ogni numero pari 2 è sempre differenza tra due numeri dispari, ed eventualmente anche primi, ed anche infinite volte (Congettura di Chen, vedi Metodo n. 21-2006), come 2 è infinite volte la differenza tra due numeri gemelli (vedi Metodo 20-2005) e quindi consecutivi. Inoltre, la congettura dei numeri gemelli è estesa dalla Congettura di Polignac (ogni numero pari è infinite volte la differenza tra due numeri primi consecutivi), dimostrata nel capitolo precedente, la quale sarà di aiuto nei successivi esempi di intervalli numerici più densi e meno densi di numeri primi.

Ora, tra 7 e 17 (e quindi entro d = 17 – 7 = 10 unità) ci sono quattro numeri primi (7, 11, 13 e 17), mentre per N = 26 anche ci sono tre coppie di Goldbach di cui una con ripetizione (13 + 13), comunque valida ai fini della congettura di Goldbach, ed anche quattro numeri primi, pur essendo 26 maggiore di 24. Per N = 28 abbiamo soltanto due coppie di Goldbach (5 e 23, 11 e 17) con relative differenze 23 – 5 = 18 e 17 – 11 = 6, e 17 – 13 = 4 come differenza minima tra i due numeri primi consecutivi vicini a $\frac{N}{2} = \frac{28}{2} = 14$, con 13 = 14 – 1 e 17 = 14 + 3.

Per N = 30, invece, il numero di coppie di Goldbach risale a 3, mentre rimane la differenza tra i due primi consecutivi vicini a $\frac{30}{2} = 15$, che sono sempre 13 e 17 (13 = 15 – 2 e 17 = 15 + 2).

Per N = 32 abbiamo di nuovo due coppie di Goldbach (3 + 29 e 13 + 19), di cui una con differenza 6 tra i due primi che formano l'ultima coppia di Goldbach (6 = 19 – 13).

Continuando ancora, si nota che il numero delle coppie di Goldbach cresce quando N è multiplo di 12 (infatti per N = 60, $\frac{N}{2} = 30 \quad 60 = 12 \cdot 5$, e per N = 30 ci sono 3 coppie di Goldbach, ma con differenza minima 4 anziché 2, poiché $\frac{30}{2} = 15 = 3 \cdot 5$ e $15 \pm 0 = 15$, $15 \pm 2 = 13$ e 17 con 17 – 13 = 4) e decresce di poche unità al crescere di N. Ma poi N si riavvicina al successivo multiplo di 12, e le coppie di Goldbach riprendono a crescere, mentre la differenza diminuisce di nuovo fino a 4 oppure 2 (in tal caso si hanno due primi gemelli). E così via all'infinito, poiché i multipli di 12 sono infiniti (infatti N = 12n con n = infinito), e quindi potenzialmente somma di due numeri primi gemelli. La loro frequenza è un po' superiore al quadrato del logaritmo di N, infatti fino a 1000 ci sono 33 coppie di gemelli, e $\frac{1000}{6^2} = \frac{1000}{36} = 27{,}7... \cong 27$. Una formula più precisa è $\frac{N}{(\log N)^2} \cdot 1{,}08366$, infatti $\frac{1000}{(2n)^2} \cdot 1{,}08366 = \frac{1000}{4 \cdot 3^2} \cdot c = \frac{1000}{36} \cdot 1{,}08366 = 30{,}10$ valore più prossimo a quello reale 33, dove c = 1,08366 è il numero di Legendre. Per N = 10000 il risultato è ancora più preciso: il valore reale è uguale a 170; il valore calcolato è $\frac{10^4}{(2 \cdot 4)^2} \cdot c = \frac{10000}{64} \cdot c = 156{,}25 \cdot c = 169{,}32... \cong 170$.

La stessa formula è valida anche per le coppie dei numeri primi con differenza 4, 6,…

Quindi non solo le coppie di gemelli sono infinite, esse crescono con N con frequenza $\frac{1}{(\log N)^2} \cdot c$ e con regolarità, mentre le coppie di Goldbach crescono irregolarmente, crescendo con N e con frequenza media $\frac{1}{(\log N)^2 \cdot c^3}$, seguendo il ciclo dei multipli di 12. Per N = 12n ci sono più G coppie di Goldbach, circa il doppio rispetto ai numeri N vicini, e plausibilmente una coppia di Goldbach finale con due numeri gemelli e con G sempre crescente e mai G = 0, il che rende vera l'ipotesi: nessun numero pari ha G = 0 coppie di Goldbach, ma almeno G = 1 per i numeri pari più piccoli (4, 6, 8, 10,…) e G > 1 man mano che N cresce, e quindi con $G = \frac{N}{(\log N)^2 \cdot c^3}$, che cresce quindi con N e con $\pi(N)$, sia pure "irregolarmente" seguendo il ciclo dei multipli di 12, cioè N = 12n per i quali ci sono più coppie di Goldbach, una possibile coppia finale di gemelli (d = 2) e possibili coppie finali con altre piccole differenze (4, 6, 8,…ecc).

Ecco perché nei dintorni di $\frac{N}{2}$, e quindi $\frac{N}{2} \pm d$, ci sono più numeri primi, e tali intervalli numerici sono pertanto più densi di numeri primi rispetto ad altri intervalli $\frac{N}{2} \pm d$ con $N \neq 12n$. Lo vedremo più chiaramente nei prossimi esempi, spiegando così il Teorema di Goldston e Yldirim sui piccoli

intervalli più densi di numeri primi rispetto ad altri intervalli, grazie al Teorema di Goldbach e dei primi gemelli con la relazione: gemelli = ultima coppia di Goldbach per N = 12n, ma non sempre.
Se l'ultima coppia di Goldbach di numeri primi non è costituita da gemelli, essa ha comunque una piccola differenza d = 4, 6, 8,… ecc, e quindi l'intervallo $\frac{N}{2} \pm d$ è ugualmente più denso di altri intervalli, a volte con molti meno numeri primi, per es. nelle sequenze $10^7 \pm 100$, con ben 9 numeri primi in $10^7 - 100$ e soltanto 2 numeri primi in $10^7 + 100$, pur essendo di 100 unità entrambi gli intervalli tra loro consecutivi.

Se N non è multiplo di 12, i numeri di forma $s = \frac{N}{2} \pm d$ con s = semisomma, non rientrano nella forma $6n \pm 1$ e quindi non possono essere primi (per il Teorema n. 1), mentre lo sono (poiché s è sempre multiplo di 6, e quindi 6n) quando N = 12n, poiché $s = \frac{12n}{2} = 6n$; e ciò favorisce un maggior numero di numeri primi su entrambe le colonne p + q = N, e quindi maggior numero di coppie di Goldbach e maggior numero di differenze grandi e piccole, fino a d = 2 per i numeri gemelli della possibile ultima coppia di Goldbach. Per es. $48 = 12 \cdot 4$ è il primo multiplo di 12 che non genera una coppia di gemelli, poiché $\frac{48}{2} \pm 1 = 24 \pm 1 = 23$ e 25 e $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$ non è primo, e questo vale anche per altri multipli di 12, per es. 72, per il quale $\frac{N}{2} \pm 1 = 36 \pm 1 = 35$ e 37, con $35 = 5 \cdot 7$ non primo.
Prima di fare esempi con i numeri più grandi, chiariamo il concetto con $N = 60 = 12 \cdot 5$, che ha ben 6 coppie di Goldbach (7 + 53, 13 + 47, 17 + 43, 19 + 41, 23 + 37 e 29 + 31 gemelli) e quattro numeri primi (23, 29, 31 e 37) nelle ultime 4 righe, con d = 37 – 23 = 14; mentre per $N = 62 \neq 12n$, abbiamo già soltanto tre coppie di Goldbach (3 + 59, 19 + 43 e 31 + 31), e con tre soli numeri primi (29, 31 e 37) nelle ultime 4 righe, con d = 37 – 29 = 8.
È già possibile notare il meccanismo aritmetico legato a 12n: nel caso di N = 62, si hanno minori coppie di Goldbach e meno numeri primi. Questo andamento si ripete all'infinito per ogni N = 12n ed N $\neq$ 12n, variando soltanto il numero di coppie di Goldbach oscillante tra G per N $\neq$ 12n e $\cong 2G$ per N = 12n; ed il numero dei numeri primi nell'intervallo $\frac{N}{2} \pm d = s \pm d$, con d a piacere.
Possiamo ora riprendere, con tali nuove cognizioni, gli esempi del commentatore web del Teorema di Goldston e comprenderli perfettamente. Il primo esempio è dato dai seguenti quattro numeri primi 821, 823, 827 e 829 i quali sono già due coppie di gemelli, quindi un caso molto fortunato, che spiega da se stesso la densità di quattro numeri primi in d = 829 – 821 = 8 unità di intervallo.
Prendendo la semisomma $s = \frac{829 + 821}{2} = 825$, notiamo che i quattro numeri sono equidistanti da s = 825, infatti: $825 \pm 2 = 823;827$ e $825 \pm 4 = 821;829$, con 823 e 821 e 827 e 829 gemelli ($s = \frac{823 + 821}{2} = \frac{1644}{2} = 822$ e $822 \pm 1 = 821$ e 823, primi gemelli; $s = \frac{827 + 829}{2} = \frac{1656}{2} = 828$ e $828 \pm 1 = 827$ e 829, primi gemelli). Due coppie di gemelli consecutive, una vera rarità quando la frequenza media di tali coppie, per numeri N prossimi a 1000, come 829, è di $\frac{1000}{(\log 1000)^2} \cdot c = \frac{1000}{(2 \cdot 3)^2} \cdot c = \frac{1000}{36} \cdot 1{,}08366 \cong 30{,}10$ e $\frac{1000}{30{,}10} \cong 33{,}2$, quindi $\frac{1}{33}$: una coppia di gemelli ogni 33 unità, così come i numeri primi fino a 1000 sono $\pi(1000) = \frac{1000}{(\log 1000)} = \frac{1000}{2 \cdot 3} = \frac{1000}{6} \cong 166{,}6$ con valore reale = 168, quindi un numero primo ogni circa 6 unità.

Ovviamente, i due numeri N sono: $828 \cdot 2 = 1656 = 12 \cdot 138$ e $822 \cdot 2 = 1644 = 12 \cdot 137$, e cioè multipli di 12, con le rispettive ultime coppie di Goldbach entrambe coppie di gemelli 827 e 829; 821 e 823.
Viceversa, per l'altro gruppo vicino dei quattro numeri primi 773, 787, 797 e 809 "diluiti" in d = 809 – 773 = 36 unità, la loro semisomma $s = \frac{809 + 773}{2} = \frac{1582}{2} = 791$, non è multipla di 6, e quindi nemmeno N = 1582, poiché $\frac{1582}{6} = 263{,}66$, e nemmeno la somma totale 3166 è divisibile per 12, infatti $\frac{3166}{12} = 263{,}83$. Quindi 1582 avrà sicuramente un numero di coppie di Goldbach "minore" di quello relativo alla somma totale del primo esempio: $N = 821 + 823 + 827 + 829 = 4 \cdot 825 = 3300$, con $3300 = 12 \cdot 275$, così come $1656 = 12 \cdot 138$ e $1644 = 12 \cdot 137$, come prima evidenziato.
Ecco perché il secondo gruppo di quattro numeri primi, pur essendo prossimo al primo gruppo è più diluito, in 36 unità, mentre il primo gruppo, sempre composto da quattro numeri primi, è concentrato in solo 9 unità: il motivo risiede nell'evidente legame con il ciclo di 12, con ben due coppie di gemelli ravvicinate. Il secondo gruppo invece non ha tale caratteristica, in quanto le loro somme e semisomme totali non sono legate al ciclo di 12, non essendo N = 12n. (Notiamo che le rispettive frequenze medie sono 9 / 4 = 2,25 e 36 / 4 = 9).
Compreso così meglio il senso del Teorema di Goldston-Yldirim-Pintz sul ciclico addensarsi e diradarsi di numeri primi in intervalli più o meno lunghi (e con un multiplo 6n = s al centro del ciclo più denso), ricordiamo che la spaziatura media d = numero pari = 2n tra due primi consecutivi comincia ad apparire, in realtà, in prossimità di numeri di tipo N = 10^n, poiché il logaritmo di 10^n è circa 2n (in realtà leggermente superiore, più prossimo a 2nc con c = 1,08366) ed il logaritmo di N è la frequenza/spaziatura media fino ad N; da 10^n in poi, infatti, d = 2n si ripete infinite volte, mentre è molto rara la sua comparsa prima di 10^n.
Per esempio, per n = 9, N = 10^9, e la spaziatura media d = $9 \cdot 2 = 18$, che comincia ad apparire in prossimità di 10^9 = un miliardo. Abbiamo che d = 18, non può essere spaziatura media tra due numeri primi consecutivi prossimi a 10^3 = 1000, poiché qui la spaziatura media è circa $3 \cdot 2 = 6$, e quindi in 18 unità ci sono circa tre numeri primi $\left(\frac{18}{6} = 3\right)$ e quindi è molto difficile che ci sia una spaziatura di 18 unità tra due primi consecutivi. Quindi, d = 18 = $2 \cdot 9$, comincia ad essere "normale", da circa 10^9 in poi ed infinite volte (Congettura di Polignac).
Per i numeri di tipo 10^{9-k}, quindi, d è sempre minore di 18, salvo qualche rara eccezione in prossimità di 10^n, ma non molto prima. Per i numeri gemelli, invece, d = 2 comincia subito, poiché d = 2 = $1 \cdot 2$, e per 10^1 d vale infatti $2 \cdot 1 = 2$, è già, immediatamente, cominciano le coppie di gemelli: 3 + 5, 5 + 7, 11 + 13, 17 + 19, ecc…, e quindi d = 2 si ripete infinite volte a partire da 1, mentre d = 4, pur essendo presente fin da 10^1, per es. 7 – 3 = 4, 11 – 7 = 4, 17 – 13 = 4, ecc…, si presenta più regolarmente ed infinite volte dopo 10^2 = 100. Così pure d = 6, per es. 29 – 23 = 6, ma più raramente, diventando più frequentemente regolare dopo 10^3 = 1000, poiché $2 \cdot 3 = 6$.
Adesso vogliamo proseguire questo capitolo dedicato al Teorema di Goldston-Yldirim sugli intervalli corti più o meno densi di numeri primi (già si sapeva che i numeri primi si presentano spesso "a grappoli", ora sappiamo finalmente il perché, con il ciclo del 12 e delle più numerose coppie di Goldbach per N = 12n), riportando un altro esempio molto istruttivo alla luce di quanto sopra detto, e citato da Marcus du Sautoy nel suo libro "L'Enigma dei Numeri Primi (Rizzoli)" alla pag. 17: "…Si può sempre sperare che, dopo un inizio nervoso, il battito dei numeri primi si regolarizzi. Non è così: più si prosegue a contare, più le cose peggiorano (ma solo apparentemente, ed ora conosciamo bene il motivo di tale "peggioramento", n.d.A.A.).
Consideriamo, per esempio, i numeri primi compresi nell'intervallo dei cento numeri che precedono 10.000.000 e nell'intervallo dei cento numeri che seguono 10.000.000. Cominciamo dai numeri

primi inferiori a 10.000.000: 9.999.901, 9.999.907, 9.999.929, 9.999.931, 9.999.937, 9.999.943, 9.999.971, 9.999.973, 9.999.991.
Ma osserviamo, adesso, quanti pochi siano i numeri compresi tra 10.000.000 e 10.000.100: 10.000.019, 10.000.079 (con differenza/spaziatura = 60 tra i due numeri, n.d.A.A.)".
Come però si vede chiaramente nella prima sequenza (così come nella sequenza dell'altro esempio: 821, 823 (gemelli), 827, 829 (gemelli)), anche qui ci sono due coppie di gemelli, il che significa, come abbiamo dimostrato, una maggiore densità di numeri primi intorno ad essi: infatti, 9.999.929 e 9.999.931 sono gemelli, come anche 9.999.971 e 9.999.973, in quanto la loro differenza/spaziatura è d = 2, il che fa diminuire la spaziatura media con i numeri primi vicini. Infatti, la differenza tra il primo e l'ultimo numero dell'intera sequenza dei nove numeri è di 9.999.991 – 9.999.901 = 90, che diviso il numero delle spaziature (8), fornisce 90 / 8 = 11,25 mentre nella seconda sequenza d = 60, la spaziatura è una, quindi 60 / 1 = 60 = spaziatura media.
Per i due primi grandi numeri gemelli, la loro somma 9.999.929 + 9.999.931 = 19.999.860 è divisibile per 12, come da regola generale per i gemelli, dando come risultato esatto 1.666.655, e così anche per gli altri due gemelli $\frac{9.999.971+9.999.973}{12}=1.666.662$.
(Per il Teorema n. 1, la somma di due gemelli si può scrivere come $(6n-1)+(6n+1)=6n-1+6n+1=2\cdot 6n=12n$).

Sia nel primo caso, sia nel secondo, i gemelli sono dati da $\frac{p+q}{2}\pm 1=\frac{N}{2}\pm 1$, cosa semplicissima da verificare: $\frac{19.999.860}{2}\pm 1=9.999.930\pm 1=9.999.929$ e 9.999.931 (gemelli)

e $\frac{19.999.944}{2}\pm 1=9.999.972\pm 1=9.999.971$ e 9.999.973 (gemelli).

Per questa sequenza di nove numeri nelle cento unità prima di 10.000.000, si è trattato di un caso eccezionale e fortunato, con la presenza di ben due coppie di gemelli molto vicine (distanza = 42 tra le loro semisomme), poiché per numeri di tipo 10^7, la distanza media tra due coppie di gemelli dovrebbe essere il quadrato del logaritmo di 10^7, e quindi $\cong(2\cdot 7)^2=14^2=196$ (il numero reale è 15, da cui $15^2=225$). Fino a 10^7 ci sono circa $g=\frac{10^7}{15^2}\cdot c=\frac{10^7}{225}\cdot 1{,}08366\cong 48162$ coppie di gemelli e per N = 10^7 ci sono mediamente $G=\frac{10^7}{(15)^2\cdot c^3}=\frac{10^7}{225\cdot(1{,}08366)^3}=34926$ G coppie di Goldbach, con rapporto reale $g/G=1{,}3789\cong c^4=1{,}3790$ come da regola generale, poiché $\left(\frac{10^n}{4n^2}\cdot c\right)/\left(\frac{10^n}{4n^2c^3}\right)=\left(\frac{10^n}{4n^2}\cdot c\right)\left(\frac{4n^2c^3}{10^n}\right)=c\cdot c^3=c^4$, per il rapporto g / G relativo allo stesso numero N = 10^n.
Il numero esatto di G è più difficile da calcolare con precisione perché esso varia da G (curva minima) a circa 2G (curva massima, che è all'origine degli intervalli densi di numeri primi, con al centro una o più coppie di gemelli): per ottenere il numero esatto di G occorrerebbe usare la procedura p + q = N, molto lunga per N = 10^7 e numeri vicini.
Ritornando alla prima sequenza, abbiamo osservato ben due coppie di gemelli in un intervallo di 100 unità (con differenza d = 42 tra di loro, invece che con differenza media d = 286 tra le coppie di gemelli fino a 10^7). Viceversa, per la seconda sequenza dei due soli numeri primi 10.000.019 e 10.000.079, la differenza è d = 60 = $2\cdot 30=4\cdot 15$ (con 15 = frequenza dei numeri primi fino a 10^7), abbiamo un caso molto eccezionale e sfortunato, poiché 60 è molto maggiore della frequenza media dei numeri primi in quella zona numerica (infatti $60\neq 15$ = 4 volte superiore alla media) e così pure la differenza tra i due numeri primi precedenti 9.999.991 e 10.000.019 è di 28, anch'essa molto

superiore alla media, poiché $\frac{28}{15} = 1{,}86$, ma anche con il numero primo successivo a 10.000.079, il quale, ammesso che fosse 10.000.101, comporterebbe una differenza di almeno 22, anch'essa superiore alla spaziatura media di 15 unità.
Ecco perché nell'intervallo di 100 unità dopo 10^7 ci sono soltanto due numeri primi, con d = 60 tra di loro e d = 28 e d uguale ad almeno 22 con il precedente ed il successivo presunto numero primo (in realtà d = 24 perché 10.000.103 è primo), un caso molto eccezionale e sfortunato, come dicevamo. Mentre nelle 100 unità precedenti a 10^7 ci sono ben nove numeri primi, anche questo un caso molto eccezionale, ma, al contrario, fortunato, per la presenza di ben due coppie di gemelli tra loro molto più vicini (differenza = 42) della media "locale" che sarebbe una ogni 225 unità (in realtà $\frac{225}{c} = 207$) per la presenza di coppie di gemelli.
Ora quindi sappiamo bene il perché di questa "densità" e "rarefazione" di numeri primi in due intervalli di 100 unità adiacenti ($10^7 \pm 100$), cosa che ha fatto meravigliare M. du Sautoy che li ha riportati nel suo libro.
In media però questi casi di intervalli $10^n \pm 10^k$ con n > k, più o meno eccezionali (fortunati o sfortunati), dovrebbero essere più rari, ma non impossibili, poiché n e k sono infiniti; k, inoltre, pur essendo minore di n, non deve essere molto piccolo rispetto ad n, altrimenti 2n supera di molto la frequenza media e non rientrerebbe in k. In altre parole, ci troveremmo nessuno o pochissimi numeri in 10^k se esso è piccolo e 10^n è molto più grande; quindi n e k dovrebbero essere proporzionati, con 10^k un po' superiore a 2n di 10^n, per potervi trovare almeno alcuni numeri primi e fare il confronto tra i due intervalli $10^n - 10^k$ e $10^n + 10^k$ e la loro semisomma 10^n.
Il caso esaminato $10^7 \pm 10^2$ è abbastanza esemplare, poiché d = 15 $\cong 2 \cdot 7 = 14$, è minore di $100 = 10^2$, e quindi in 100 unità dovremmo trovare mediamente $100/15 = 6{,}6 \cong 6$ numeri primi. Nel caso suddetto ne abbiamo trovati ben nove nel primo intervallo di 100 unità, e soltanto due nel secondo intervallo, a causa della "fortuna" (due coppie di numeri gemelli) nel primo caso, e della "sfortuna" nel secondo (a causa di tre distanze consecutive più alte della media 28, 60 e 24 maggiori di 15). Comunque abbiamo 9 + 2 = 11, numero molto vicino a $200/15 = 13{,}3 =$ numero di numeri primi in 200 unità per numeri N prossimi a 10^7; quindi la media generale, per intervalli più lunghi, 200 invece di 100, viene così riequilibrata e rispettata, con piccole discrepanze (11 invece di 13).
"Fortuna" e "sfortuna", cioè maggiore e minore densità, adesso ben spiegabili con il ciclo del 12n e relative conseguenze circa le coppie di Goldbach, le coppie di gemelli (ultime coppie per N = 12n, ma non per tutti), le spaziature medie d = 2n, in base alla Congettura di Polignac: qualsiasi numero pari come infinite volte la differenza tra due numeri primi consecutivi.
Per le coppie di Goldbach, invece, $G \geq 1$ per ogni numero pari N, come voleva Goldbach e infinite g coppie di gemelli d = 2, ed infinite coppie con d = 4, 6, 8,…,2n secondo Polignac; sia Goldbach, sia Polignac hanno avuto ragione e sono alla base di questa nostra spiegazione della maggiore o minore densità di numeri primi in due intervalli vicini, cosa che si ripete certamente all'infinito ("grappoli" di numeri primi e intervalli quasi vuoti di numeri primi, come nei due intervalli di 100 unità adiacenti a 10^7 appena esaminati).
E tale nostra spiegazione, se non vera e propria dimostrazione, si collega al Teorema di Goldston-Yldirim-Pintz sugli aspetti apparentemente strani inerenti i numeri primi, trattati però collettivamente con l'ausilio dell'analisi matematica. Noi invece li abbiamo trattati con semplici calcoli aritmetici, circa la procedura per trovare le coppie di Goldbach.
Tali casi potrebbero quindi ripetersi benissimo ciclicamente, per esempio con intervalli anche più ampi, tipo $10^n \pm 4 \cdot 10^k$, che danno luogo a numeri del tipo 96, 960, 9600 che sono multipli di 12 e di 6 e quindi anche il loro doppio è multiplo di 12; cosicché nelle loro vicinanze (96, 960, 9600) ci possono essere coppie di gemelli o almeno con differenze d molto piccole, e quindi maggiore densità di numeri primi; e così anche nell'altro intervallo, i numeri 104, 1040, 10400, che però non sono di forma 6n, ma sono vicini a $102 = 6 \cdot 17$ ed a $108 = 6 \cdot 18$, ed anche a $1020 = 6 \cdot 170$ ed a

$1080 = 6 \cdot 180$, che come tali (semisomme di multipli di 12) possono avere coppie di gemelli o coppie di numeri primi molto vicini, con d = 4, 6, 8,… etc, dando luogo ad intervalli più densi e meno densi. Spesso quello più denso può essere anche l'intervallo superiore a 10^n, per es. tra 100 (10^2) e 90 (100 – 10) c'è il solo numero primo 97, mentre tra 100 e 110 (100 + 10) ci sono i quattro numeri primi 101, 103 (gemelli), 107 e 109 (gemelli) e 101 + 103 = 204 = $102 \cdot 2 = 12 \cdot 17$, e 107 + 109 = 216 = $108 \cdot 2 = 12 \cdot 18$, quindi un intervallo "denso" al contrario del precedente, il solo numero primo 97, e quindi "rarefatto", pur essendo $96 = 6 \cdot 16$, ma $96 - 1 = 95 = 5 \cdot 19$ non primo.

Il caso limite è $10^n \pm 10^n$, e cioè i due intervalli tra 1 e 10^n e tra 10^n e $2 \cdot 10^n$, in questi casi è il secondo ad essere sempre meno denso, per via del rarefarsi dei numeri primi al crescere di N = 10^n; poiché tale intervallo è molto lungo, e la rarefazione dei numeri primi è più evidente. Per esempio, fino a 100 ci sono 25 numeri primi, e tra 100 e 200 ce ne sono 21. Quindi le alternanze di intervalli più o meno "fortunati", si possono verificare solo su scale più piccole, cioè $10^n \pm 10^k$ con n > k e k < 2n, affinché 2n / k sia maggiore di 1 e quindi nell'intervallo possiamo trovare almeno un numero primo. Nel caso $10^7 \pm 10^2$, abbiamo infatti 2n / k = 14 / 2 = 7, quasi uguale a 100 / 15 = 6,66…, cioè il numero medio di numeri primi per ognuno degli intervalli; in entrambi ci sono infatti $11 \cong 2 \cdot 6{,}5 = 13$ numeri primi ($6{,}5 = (7+6)/2$), sebbene divisi in 9 nel primo intervallo e 2 nel secondo, per i motivi precedentemente menzionati (due coppie vicine di gemelli nel primo, e nessuna nel secondo, ecc…).

Esiste un test di calcolo, dove inserendo un numero pari, si ottengono immediatamente tutte le coppie di Goldbach, 10 per ogni pagina, ma non il numero totale per il quale, quindi, occorre stampare tutte le pagine fino ad esaurimento e poi contare le coppie totali (numero di pagine per 10 più quelle della eventuale pagine incompleta. Per G < 10, ovviamente, basta una sola pagina). Troviamo così, per esempio, che per $600 = 6 \cdot 100$, G = 32; per 700, G = 24; per 800, G = 21 e per $900 = 6 \cdot 150$, G = $48 = 2 \cdot 24$. Notiamo come 600 e 900 siano grossi multipli di 6 e di 12, mentre 700 e 800 non lo sono.

Poiché i numeri primi crescono sia con la funzione generale "conteggio" $\pi(N) = \dfrac{N}{\log N - 1{,}08366} = \dfrac{N}{\log N - c}$, con c = 1,08366 = numero di Legendre, più precisa della funzione conteggio di Gauss $\pi(N) = \dfrac{N}{\log N}$, sia con la funzione gradino $J(N)$, cioè ogni volta che si incontra un numero primo sulla retta N, il grafico della funzione cresce di una unità (indicando sull'asse verticale la funzione conteggio $\pi(N)$). Per un grafico molto più esteso a destra, ad ogni impennata della funzione gradino, c'è sempre una o più coppie di gemelli al centro dell'impennata medesima, come si può facilmente intuire riguardo agli esempi delle sequenze riportate in questo lavoro, per esempio per i nove numeri primi nella sequenza 10^7 – 100, con ben due coppie di gemelli, mentre il grafico registra linea piatta (nessun numero primo) nella seconda sequenza, per le 60 unità tra 10.000.019 e 10.000.079. Quindi, ovviamente, le brusche impennate verso l'alto significano un intervallo denso di numeri primi, per esempio 10^7 – 100, con nove primi, invece linee pressoché piatte significano intervalli con pochissimi primi, per esempio 10^7 + 100 con due soli primi nelle 100 unità successive. La funzione gradino è quindi la prova visibile della reale distribuzione dei numeri primi, compresi intervalli più densi e successivi intervalli meno densi, e viceversa, spiegabili con il nostro ciclo di 12 e le connesse coppie di Goldbach esposto in questo lavoro.

Si è notato che, mentre i numeri primi tendono a distribuirsi in intervalli-gruppi più densi ("grappoli", contrassegnati dalle impennate della funzione gradino), gli zeri della funzione zeta di Riemann tendono, invece, ad uniformarsi nelle loro spaziature medie, non creando affatto zone di maggiore o minore intensità. Mentre i numeri primi spesso si "attraggono", creando intervalli più densi di numeri primi, gli zeri non si attraggono mai o sembrano "respingersi". Così ne parla M. du Sautoy nel suo libro "L'Enigma dei Numeri Primi" alla pag. 482: "La formula esplicita che

Riemann aveva scoperto utilizzando il paesaggio zeta esprimeva un collegamento diretto tra i numeri primi e gli zeri. Essa era intesa come un modo per comprendere i numeri primi attraverso l'analisi degli zeri. Montgomery non fece altro che ribaltare l'equazione: avrebbe usato le conoscenze sui numeri primi per dedurre il comportamento degli zeri lungo la retta "magica" di Riemann. Ricordava che Hardy e Littlewood avevano fatto una stima con cui i primi gemelli avrebbero dovuto presentarsi quando si passava in rassegna la sequenza dei numeri primi (la nostra stima di tale frequenza è, ricordiamolo, $\frac{1}{(\log N)^2}\cdot c$, con c = 1,08366 numero di Legendre, n.d.A.A.). Forse sarebbe riuscito ad estendere quella stima al comportamento degli zeri. Ma quando la inserì nella formula esplicita di Riemann, scoprì con sorpresa e delusione che la stima di Hardy e Littlewood non prediceva affatto l'esistenza di assembramento di zeri. Montgomery si mise ad analizzare quella predizione in dettaglio: essa sembrava indicare che quando si procedeva verso nord lungo la retta di Riemann, gli zeri – a differenza dei numeri primi – tendessero a respingersi. Montgomery si rese presto conto che gli zeri non amavano affatto stare vicini. Al contrario di quanto accadeva con i numeri primi (oggetto di questo lavoro, n.d.A.A.) ad uno zero non seguivano mai altri zeri in rapida successione…". Ed alla pag. 485 leggiamo: "…Poiché aveva sperato di scoprire che gli zeri erano ravvicinati, Montgomery giudicò il proprio lavoro una sorta di fallimento…".
Poiché con i numeri nulla succede a caso (e tanto meno con i numeri primi, viste le regolarità da noi scoperte con il Teorema n. 1 e le sue tante conseguenze), ci sarà pure una relazione matematica che spieghi questo strano fenomeno, e cioè l'andamento soltanto apparentemente irregolare e caotico dei numeri primi, con l'apparente uniformità nell'andamento degli zeri, che ha deluso Montgomery, il quale si aspettava da essi un analogo comportamento, ottenendo invece il risultato opposto.
La scoperta di tale relazione tra l'andamento dei numeri primi e quello degli zeri, collegati strettamente ai numeri primi dalla funzione zeta $\zeta(s)=\Pi\frac{1}{1-p_i^{-s}}$, dove p_i è la serie dei numeri primi, potrebbe essere, si spera, utile in qualche modo alla possibile dimostrazione dell'ipotesi di Riemann, legata ad entrambi gli "andamenti", in modo non uniforme quello dei numeri primi, ma da noi ora meglio compreso con questo lavoro sugli intervalli più o meno densi di numeri primi, a causa delle coppie di Goldbach e delle coppie dei gemelli legate al numero 12n (così come i primi sono legati al numero 6 nella forma generale $P=6n\pm1$. Notiamo, inoltre, che $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ della retta critica, ma questa è soltanto un'ipotesi), ed in modo più uniforme quello degli zeri della funzione zeta, che avrebbero dovuto rispecchiare in qualche modo, pensava erroneamente Montgomery, l'andamento non uniforme dei numeri primi, in quanto essi erano compresi, con p_i^{-s}, nella funzione zeta. Insomma, la non uniformità avrebbe dovuto generare altra non uniformità.
Adesso rimangono ben tre complessi punti da chiarire:

1) Spiegare bene l'andamento uniforme degli zeri, con un lavoro simile a questo;
2) Collegarlo matematicamente in qualche modo all'andamento non uniforme dei numeri primi;
3) Usare possibilmente le eventuali scoperte (perché una relazione certamente ci sarà, anche se opposta a ciò che più logicamente si aspettava Montgomery, e cioè due non uniformità simili per numeri primi e zeri di zeta, e invece per questi ultimi ha trovato una inattesa uniformità nelle loro spaziature) per ottenere qualcosa di nuovo ed interessante per l'ipotesi di Riemann: come e perché tutti gli zeri della funzione zeta di Riemann dovrebbero essere situati sulla retta critica reale $\frac{1}{2}$?

Sviluppando questi altri tre argomenti, tra loro correlati, l'ipotesi di Riemann si risolverà, quindi si arriverà alla definitiva soluzione, sia essa negativa o positiva. (Noi siamo fermamente convinti che

l'ipotesi di Riemann sia valida, in quanto sono molti gli indizi matematici e fisico-matematici, come le connessioni con la Teoria delle Stringhe, a favore di essa).
Con questo nostro lavoro abbiamo soltanto spiegato l'andamento non uniforme dei numeri primi; non è molto ma è già qualcosa che, speriamo, possa essere un buon primo passo in tale direzione.
Chi dimostrerà l'andamento uniforme degli zeri farà un altro passo avanti, e chi alla fine collegherà le due dimostrazioni sui due andamenti farà un altro passo avanti, e chi, infine, collegherà il tutto all'ipotesi di Riemann troverà la sua soluzione o ci andrà molto vicino.
La strada è ormai aperta, e ricordiamo che l'ipotesi di Riemann è uno dei sette problemi del millennio, e che essa è legata anche ai livelli energetici degli atomi, quindi con la fisica quantistica e la Teoria delle Stringhe, ed anche ad un centinaio di teoremi vari che fino ad oggi la prendono per buona. La sua dimostrazione o la sua confutazione trascinerebbe con sé, nel bene o nel male, anche tutti questi teoremi e l'apparato matematico che esiste alle spalle di essi.
Ecco il motivo per cui il Teorema di Goldston-Yldirim, fin qui trattato a livello aritmetico, è importante: esso ci ha permesso di spiegare l'andamento apparentemente irregolare (intervalli più o meno densi dei numeri primi), e questa spiegazione se confermata dalla comunità matematica nazionale (ed anche internazionale) spianerebbe forse la strada agli altri tre punti prima accennati.

L'andamento uniforme degli zeri, scoperto da Montgomery, potrebbe essere, per ipotesi, collegato a qualcosa di altrettanto uniforme che riguarda i numeri primi. Ma che cosa potrebbero avere di uniforme i numeri primi, visto l'andamento apparentemente irregolare in piccoli intervalli contigui esaminati in questo lavoro?
L'unica cosa che per ora ci viene in mente è il Teorema n. 1, per il quale $P = 6n \pm 1$, ed in questa formula 6n è perfettamente regolare: in media un primo ogni 6n unità, con i numeri gemelli (6n – 1 e 6n + 1) che "ammortizzano", ma soltanto in parte, i numeri di forma 6N che non danno luogo ad un numero primo, ma che crescono con una frequenza superiore a quella dei numeri primi.
Per esempio, tra i numeri primi già visti 10.000.019 e 10.000.079 ci sono 60 numeri, tra cui 60 / 6 = 10 numeri di forma 6n consecutivi, che non danno luogo a numeri primi (assenti in tale intervallo di d = 60), mentre ci sono pochissime coppie di gemelli (solo due nell'intervallo da 10^7 a $10^7 - 100$, e che ne decretano la maggiore densità di numeri primi).
In ogni caso, sostituendo 6n a p_i^{-s} nella funzione zeta, avremo:

$$\zeta(s) = \Pi \frac{1}{1-(6n)^{-s}} = \frac{1}{1-\frac{1}{(6n)^s}},$$

e forse avremo anche, come possibile conseguenza da verificare con gli opportuni calcoli su $\frac{1}{(6n)^s}$ anziché su $\frac{1}{p_i^s}$, una serie di zeri con spaziature più uniformi, forse le stesse che aveva trovato Montgomery, che cercava, invece, spaziature non uniformi come quelle dei numeri primi (e gemelli in particolare, corrispondenti, secondo la sua ipotesi di partenza, a due zeri ravvicinati, ma che non ha trovato con sua sorpresa e delusione).
Tale possibile ed ipotetica uniformità di spaziatura media nei nuovi zeri così ottenuti, pur mantenendo possibilmente la retta critica reale $\frac{1}{2}$, potrebbe essere interessante per i nostri scopi.
Tale linea critica sarebbe in tal caso comune ma forse dovuta alla nuova formula, (dimostrata con il Teorema n. 1, a sua volta applicata alla funzione zeta, tramite i primi di forma $P = 6n \pm 1$, media 6n) ma erroneamente attribuita ai soli numeri primi.

In caso di successo nella suddetta sostituzione e cioè la giustificazione dell'uniformità dei nuovi zeri, simile all'uniformità dei vecchi zeri, e la conservazione della loro eventuale posizione sulla retta critica $\frac{1}{2}$, avremmo compiuto un buon passo avanti nella comprensione della funzione zeta e del perché tutti gli zeri di entrambe le funzioni potrebbero essere sulla retta $\frac{1}{2}$, e quindi, in definitiva, sulla comprensione e possibile dimostrazione (grazie anche eventualmente al nostro Teorema n. 1) dell'ipotesi di Riemann.

Di sicuro ora sappiamo che 6n è uniforme, uno ogni 6 unità, e $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, in quanto i gemelli sono collegati al ciclo di 12, mentre i numeri primi al ciclo di 6; e guarda caso (ma è soltanto un semplice caso?), $\frac{6n}{12n}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, che è uguale alla retta critica reale in cui dovrebbero essere situati tutti gli zeri della funzione zeta.

3. Connessioni con la Teoria delle Stringhe.

Sia data la relazione che segue, ottenuta dal Nardelli, che prevede la creazione di stringhe fermioniche da quelle bosoniche, attraverso le quali si manifesta poi l'interazione gravitazionale:

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi\right]=$$
$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_{\mu}\Phi\partial^{\mu}\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_{\nu}\left(\left|F_2\right|^2\right)\right], \quad (3.1)$$

dove il segno meno indica la forza di espansione, cioè la costante cosmologica di Einstein.

Se nella geometria euclidea il "rapporto aureo"[1] è celato nelle proprietà del pentagono, nella geometria frattale esso scaturisce da forme più semplici, come il quadrato ed il triangolo equilatero. Infine, se il modello della struttura globale dell'Universo detto dell'"inflazione infinita" è corretto, allora l'Universo stesso è un immenso frattale.

Questo che abbiamo detto è correlabile sia al modello di Palumbo applicato da Nardelli alla Teoria di Stringa tramite l'equazione (3.1), che all'autosimilarità frattale dei sistemi "Universo" e "Vivente".

Difatti, per l'identità di Ramanujan[2] (B. C. Berndt, R. A. Rankin 1995 – S. Ramanujan 1962) secondo la quale

---

[1] Ricordiamo che il rapporto aureo è l'irrazionale $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$, radice positiva dell'equazione di secondo grado $x^2-x-1=0$. Esso è il limite della successione $\left(F_{n+1}/F_n\right)$, essendo $\left(F_n\right)$ la successione dei numeri di Fibonacci. I numeri di Fibonacci, sono numeri naturali definiti dalla formula ricorsiva $F_0=1, F_1=1, F_{i+2}=F_{i+1}+F_i$, con i = 0,1,… che fornisce la successione 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…, dove quindi ogni termine successivo è dato dalla somma dei due termini precedenti, detta serie di Fibonacci. Quindi, il rapporto aureo è dato dal rapporto tra due termini qualsiasi, successivo e precedente, della serie di Fibonacci.

[2] Nella prima lettera al matematico G. H. Hardy , S. Ramanujan descrive varie asserzioni inerenti R(q), inoltre, nel suo quaderno (25) e nel "quaderno perduto" (27), Ramanujan riporta senza dimostrazioni molte valutazioni e teoremi su R(q). Specialmente il quaderno perduto di Ramanujan contiene un enorme quantità di materiale su R(q), e molti di quei risultati soltanto recentemente sono stati confermati per la prima volta. R(q) viene definita la frazione continua di Rogers-Ramanujan. Tutte le relazioni che contengono R(q) ed il rapporto aureo, come l'equazione (4), sono definite identità di Ramanujan.

$$0{,}618033 = 1/\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}, \quad (3.2)$$

e che $\pi = 2\Phi - \frac{3}{20}\left[R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right]$, (3.3) con $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

segue, dalla (3.1):

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16G}\cdot\frac{1}{2\Phi-\frac{3}{20}\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f\left(-t^{1/5}\right)}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)} - \frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi) + \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\ \right] = \int_0^\infty \frac{R}{\kappa_{11}^2}\cdot 2\Phi - \frac{3}{20}\left[R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right]\cdot$$

$$\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2 - \frac{\kappa_{11}^2}{\left(2\Phi-\frac{3}{20}\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)\right)2Rg_{10}^2}Tr_\nu\right.$$

$$\left.\left(\left|F_2\right|^2\right)\ \right]. \quad (3.4)$$

Abbiamo quindi tradotto la (3.1) equazione che concerne la Teoria di Stringa, quindi fisica, nella (3.4), equazione che concerne la Teoria dei Numeri, quindi matematica.
Anche per quanto concerne le partizioni, abbiamo ottenuto un'interessante connessione con la teoria di stringa.

Com'è noto, le partizioni di un numero n sono tutte le p(n) possibilità di dividere n oggetti o un numero n in gruppi distinti, la cui somma totale sia sempre n.

Per esempio, per n = 5 , abbiamo 7 partizioni (quindi p(5) = 7):
1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5;
2 + 1 + 1 + 1 = 5;
2 + 2 + 1 = 5;
3 + 1 + 1 = 5;
3 + 2 = 5;
4 + 1 = 5;
5 = 5

I numeri di partizioni p(n), per i numeri interi n che vanno da 1 a 15 sono:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Come si vede, il numero delle partizioni p(n) cresce rapidamente al crescere di n , per cui, per esempio, per n = 200 si hanno: p(n) = p(200) = 3.972.999.029.038 partizioni.
La formula, dovuta al grande matematico indiano S. Ramanujan:

$$p(n)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{1\le k\le N}\sqrt{k}\left(\sum_{h \bmod k}\omega_{h,k}e^{-2\pi i\frac{hn}{k}}\right)\frac{d}{dn}\left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{k}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-1}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right)+O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right), \quad (3.5)$$

o la sua variante: $p(n)\approx\frac{e^{\left(\pi\sqrt{2n/3}\right)}}{4n\sqrt{3}}$ per $n\to\infty$, (che è una formula asintotica sviluppata insieme al matematico Hardy)

fornisce il numero quasi esatto di p(n) per ogni n. Difatti, per esempio, per n = 11, avremo:

$p(11)\approx\frac{2{,}7^{\left(3{,}14\sqrt{2\cdot 11/3}\right)}}{4\cdot 11\sqrt{3}}\approx\frac{2{,}7^{8{,}4}}{44\cdot 1{,}7}\approx\frac{4201{,}99}{74{,}8}\approx 56{,}1\cong 56$. Per n = 12, avremo:

$$p(12)\approx\frac{2{,}7^{\left(3{,}14\sqrt{2\cdot 12/3}\right)}}{4\cdot 12\sqrt{3}}\approx\frac{2{,}7^{8{,}8}}{48\cdot 1{,}7}\approx\frac{6251{,}74}{81{,}6}\approx 76{,}61\cong 77.$$

Nel 1937, H. Rademacher migliorò la formula di Hardy e Ramanujan, elaborando una serie convergente che tende a p(n):

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 \le m < k; (m,k)=1} e^{(\pi i s(m,k) - 2\pi i n m / k)} \sqrt{k} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{24} \right)} \right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) \quad (3.6)$$

Il problema delle partizioni era una specialità, insieme ai numeri primi, del giovane matematico indiano S. Ramanujan. La teoria delle partizioni ed il lavoro svolto da Ramanujan in quel ramo della matematica conosciuto come "forme modulari" si sono dimostrati essenziali nell'esame della matematica necessaria a descrivere le stringhe. L'opera dell'eccezionale matematico indiano sulle partizioni, sul modo in cui numeri più piccoli si combinano per formarne di più grandi, riguarda quel processo in cui "subunità" più corte, di lunghezza variabile, si sommano per costituire un tutto. È questo anche il caso delle stringhe, entità piccolissime che si "combinano" per formare entità più grandi (quarks), e così via fino alla materia e all'energia. Allora è possibile connettere al modello Palumbo-Nardelli anche la formula delle partizioni ottenuta da Ramanujan. Otterremo quindi:

$$\int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} Tr_v\left(\left|F_2\right|^2\right) \right] =$$

$$= -\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{8} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} Tr\left(G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}\right) f(\phi) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{1 \le k \le N} \sqrt{k} \left(\sum_{h \bmod k} \omega_{h,k} e^{-2\pi i \frac{hn}{k}} \right) \frac{d}{dn} \left(\frac{\cosh\left(\frac{\pi\sqrt{n - \frac{1}{24}}}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 1}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) + O\left(n^{-\frac{1}{4}} \right). \quad (3.7)$$

È interessante notare che quando una stringa si muove nello spazio-tempo e si divide e si ricombina, un gran numero di identità matematiche devono essere soddisfatte. Queste sono le identità di Ramanujan in funzione modulare. Il diagramma a "loop" KSV (Kikkawa-Sakita-Virasoro) di interazione tra le stringhe può essere descritto usando le funzioni modulari. La "funzione di Ramanujan" (una funzione modulare ellittica che soddisfa la "simmetria conforme") ha 24 "modalità" (24 + 2 = 26) che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica.
Quando la funzione di Ramanujan è generalizzata, 24 è sostituito da 8 (8 + 2 = 10), quindi, ha 8 "modalità" che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una superstringa.

Evidenziamo, inoltre, le formule di Ramanujan che consentono di calcolare π, direttamente collegate ad equazioni modulari. Abbiamo infatti:

$$\pi = \frac{12}{\sqrt{130}}\log\left[\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{13}\right)}{\sqrt{2}}\right], \ (3.8) \quad \text{e} \quad \pi = \frac{24}{\sqrt{142}}\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]. \ (3.9)$$

Da esse sono facilmente deducibili i numeri 12 e 24.
È interessante infine notare che tali espressioni, riguardanti π, sono ottimamente connesse con la (3.3) e anche con la (3.4), quindi con il modello Palumbo-Nardelli.

4. Su alcune congetture riguardanti la distribuzione dei primi gemelli secondo la Teoria dei Numeri.

Tra i numeri primi si distingue il sottoinsieme dei primi gemelli: i gemelli sono numeri (p, p') tali che entrambi p e $p' = p+2$ sono primi. Così l'insieme dei gemelli inizia con (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)…
I matematici usano la notazione $\pi_2(N)$ per indicare il numero di gemelli più piccolo di N e la congettura B di Hardy e Littlewood asserisce che il numero di gemelli al di sotto di un dato limite N sarebbe approssimativamente uguale a

$$\pi_d(N) \approx c_2 \int_2^N \frac{du}{\ln^2(u)} = c_2 \frac{N}{\ln^2(N)} + \ldots, \quad (4.1)$$

dove la costante c_2 è definita nel seguente modo:

$$c_2 \equiv 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) = 1{,}32032... \quad (4.2)$$

Il problema della distribuzione dei gemelli è molto difficile. Uno dei modi che possono essere usati per tale proposito è la statistica degli intervalli tra gemelli consecutivi. Sia d la distanza tra due gemelli consecutivi misurata come una differenza aritmetica tra gli ultimi primi costituenti gemelli consecutivi, così per esempio per i gemelli (29, 31) e (17, 19) $d = 12$ (infatti: 29 – 17 = 12 e 31 – 19 = 12). Le distanze possono essere soltanto multiple di 6, cioè $d = 6k$, perché tutti i gemelli sono della forma $6k \pm 1$. Adesso, $m(d, N)$ indichi il numero di gemelli separati da d e più piccoli di N:

$m(d,N)$ = numero di gemelli consecutivi $(p_m, p_{m+1} = p_m + 2)$ e $(p_n, p_{n+1} = p_n + 2)$ tale che $p_n - p_{m+1} = d$, e $p_{n+1} < N$. (4.3)

Sia $\mu(s, N)$ il numero di gemelli consecutivi più piccolo di N e separato da s primi, ad eccezione dei primi che costituiscono i gemelli in questione, per esempio per (5, 7) ed (11, 13) $s = 0$ mentre per (17, 19) e (29, 31) $s = 1$ (il numero primo 23 e situato tra essi). In maniera più rigorosa, adottiamo la seguente definizione:

$\mu(s,N)$ = numero di gemelli consecutivi $(p_m, p_{m+1} = p_m + 2)$ e $(p_n, p_{n+1} = p_n + 2)$ tale che $\pi(p_n) - \pi(p_{m+1}) - 1 = s$, e $p_{n+1} < N$. (4.4)

Qui $\pi(N)$ è il numero di primi $< N$ e

$$\pi(N) = \int_2^N \frac{du}{\ln(u)} = \frac{N}{\ln(N)} + \ldots \quad (4.5)$$

Il Prof. Marek Wolf, ha effettuato dei calcoli al computer fino a $N = 2^{44} \approx 1.76 \times 10^{13}$ ed ha contato il numero di primi tra gemelli consecutivi. Durante la ricerca al computer il dato che rappresenta la funzione $\mu(s, N)$ era contenuto ai valori di N che formano la progressione geometrica con il rapporto 4, vale a dire a $2^{22}, \ldots, 2^{42}, 2^{44}$. È possibile ottenere la seguente disposizione:

$$\mu(s, N) \approx A(N) e^{-B(N)s}. \quad (4.6)$$

Le funzioni $A(N)$ e $B(N)$ possono essere determinate utilizzando due identità a cui $\mu(s, N)$ obbedisce. Prima di tutto, la somma di $\mu(s, N)$ su tutto s è il numero totale di gemelli $< N$:

$$\sum_{s=0}^{s_{\max}(N)} \mu(s, N) = \pi_2(N). \quad (4.7)$$

Qui $s_{\max}(N)$ è la maggiore separazione s tra gemelli $< N$. La seconda condizione di auto-consistenza deriva dall'osservazione, che

$$\sum_{s=0}^{s_{\max}(N)} s\mu(s, N) = \pi(N) - 2\pi_2(N). \quad (4.8)$$

Ponendo la disposizione (4.6) nelle (4.7) e (4.8) e raccogliendo i termini appropriatamente, arriviamo alle serie geometriche con quoziente $e^{-B(N)}$ e la (4.8) è una serie geometrica differenziata. Usando l'approssimazione e sommando in (4.7) e (4.8) fino all'infinito, invece di una particolare $s_{\max}$ (la quale dipende da N) si giunge alle equazioni:

$$\frac{A(N)}{1 - \exp\{-B(N)\}} = \pi_2(N), \quad (4.9)$$

e

$$\frac{A(N) e^{-B(N)}}{(1 - \exp\{-B(N)\})^2} = \pi(N) - 2\pi_2(N). \quad (4.10)$$

Le pendenze $B(N)$ sono più piccole di 1 e decrescono con N, infatti abbiamo $B(2^{42}) = 0.0503\ldots$, $B(2^{44}) = 0.0483\ldots$ Così nelle relazioni di sopra è possibile porre $\exp\{-B(N)\} \approx 1 - B(N)$, $B(N) << 1$ e risolvere le equazioni. Si ottiene quindi la congettura principale:

$$A(N) \approx \frac{\pi_2^2(N)}{\pi(N) - 2\pi_2(N)}, \quad B(N) \approx \frac{\pi_2(N)}{\pi(N) - 2\pi_2(N)}. \quad (4.11)$$

Ponendo qui le forme asintotiche di $\pi(N)$ e $\pi_2(N)$ possiamo fare la seguente congettura:

$$A(N) \approx \frac{c_2^2 N^2}{\ln^3(N)}, \quad B(N) \approx \frac{c_2}{\ln(N)}. \quad (4.12)$$

Dalla congettura principale (4.11) segue che per N grande:

$$s_{\max}(N) \approx \frac{\pi(N)}{\pi_2(N)}\left[2\ln\pi_2(N) - \ln(\pi(N) - 2c_2\pi_2(N))\right]. \quad (4.13)$$

Per N grande si ha che:

$$s_{\max}(N) \approx \frac{1}{c_2}\ln^2(N), \quad (4.14)$$

che differisce dalla congettura di Cramer per gli intervalli massimi tra primi consecutivi per il fattore $1/c_2$. Inoltre, dalla (4.5), e dalle (4.13) e (4.14), ricaveremo la seguente importante equazione:

$$\int_2^N \frac{du}{\ln(u)}\left[2\ln - \ln\pi(N) + \ln 2c_2\right] \approx \frac{1}{c_2}\ln^2(N). \quad (4.15)$$

5. Teoria dei Numeri e Teoria di Stringa. Su alcune congetture inerenti gli intervalli tra primi consecutivi e sulle costanti di Brun generalizzate: connessioni con la Teoria delle Stringhe.

Nel 1922 Hardy e Littlewood proposero circa 15 congetture. La congettura B del loro articolo, già menzionata nel precedente paragrafo, asserisce:
Esistono infinite coppie di primi (p, p'), dove $p' = p + d$, per ogni d. Se $\pi_d(N)$ indica il numero di coppie minori di N, allora

$$\pi_d(N) \approx 2c_2 \frac{N}{\log^2(N)} \prod_{p|d} \frac{p-1}{p-2}. \quad (5.1)$$

Qui la costante c_2 è definita nel seguente modo:

$$c_2 \equiv \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 0.66016... \quad (5.2)$$

Il caratteristico modello di oscillazione di punti è causato dal prodotto

$$J(d) = \prod_{p|d,\, p>2} \frac{p-1}{p-2}, \quad (5.3)$$

che compare nella (5.1).
Qui siamo interessati nell'indagare il comportamento del numero di coppie di primi consecutivi p_n, p_{n+1} con differenza $p_{n+1} - p_n = d$. Abbiamo la seguente definizione:

$$h_N(d) = \text{numero di coppie } p_n, p_{n+1} < N \text{ con } d = p_{n+1} - p_n. \quad (5.4)$$

Notiamo che, saltando soltanto la tripletta (3, 5, 7) di tre primi consecutivi separati da 2, l'identità $\pi_d(N) \equiv h_N(d)$ è valida per $d = 2$ (primi Gemelli) e $d = 4$ che è naturale chiamare "primi Cugini".
Adesso, abbiamo la seguente equazione:

$$h_N(d) \approx B(N) \prod_{p|d,p>2} \frac{p-1}{p-2} e^{-A(N)d} . \quad (5.5)$$

Il punto essenziale della presente considerazione consiste in una possibilità di determinare le funzioni sconosciute $A(N)$ e $B(N)$ assumendo soltanto l'esponenziale decrescente di sopra di $h_N(d)$ con d ed impiegando due identità che sono soddisfatte da $h_N(d)$. Prima di tutto, il numero di tutti gli intervalli è da 1 più piccolo del numero di tutti i primi più piccoli di N :

$$\sum_d h_N(d) = \pi(N) - 1 , \quad (5.6)$$

dove $\pi(N)$ indica il numero di primi più piccolo di N . La seconda condizione di auto-consistenza deriva dall'osservazione che la somma delle differenze tra primi consecutivi $p_n \le N$ è uguale al più grande numero primo $\le N$ e per N grande possiamo scrivere:

$$\sum_d h_N(d) d \approx N . \quad (5.7)$$

Per calcolare le somme nella (5.6) e nella (5.7) sostituiamo il prodotto $J(d)$ nella (5.5) attraverso il suo valor medio s definito come:

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \prod_{p|2k,p>2} \frac{p-1}{p-2} . \quad (5.8)$$

Sommando sulla serie geometrica dalle identità (5.6) e (5.7) di sopra, si ottiene:

$$A(N) = \frac{\pi(N)}{N} , \quad B(N) = 2\frac{\pi^2(N)}{sN} . \quad (5.9)$$

Confrontando con la congettura di Hardy e Littlewood per i Gemelli $d = 2$ per $\log(N) >> d$ si ha che $1/s = c_2$. In questo modo "euristico" si arriva all'identità:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \prod_{p|2k,p>2} \frac{p-1}{p-2} = \frac{1}{\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)} = 1.514... \quad (5.10)$$

A questo punto è possibile asserire la seguente Congettura principale:

$$h_N(d) = 2c_2 \frac{\pi^2(N)}{N} \prod_{p|d,p>2} \frac{p-1}{p-2} e^{-d\pi(N)/N} + \text{termine di errore (N, d)} \;\text{ per }\; d \ge 6 , \quad (5.11)$$

mentre per i Gemelli (d = 2) ed i "Cugini" (d = 4) l'identità $h_N(d) = \pi_d(N)$ è valida.
La formula (5.11) consiste di tre termini. Il primo dipende soltanto da N , il secondo soltanto da d , mentre il terzo termine dipende sia da d , sia da N . Ponendo nella (5.11) $\pi(N) \approx N/\log(N)$ e

confrontando con la congettura originale di Hardy e Littlewood, si ha che il numero $h_d(N)$ di primi successivi (p_{n+1}, p_n) più piccolo di N e la differenza $d(= p_{n+1} - p_n)$, diminuiscono del fattore $\exp(-d/\log(N))$ in confronto a tutte le coppie di primi (p, p') indipendentemente dalla distanza $d(= p' - p)$:

$$h_N(d) = \pi_d(N) e^{-d/\log(N)} + \text{termine di errore (N, d), per } d \geq 6. \quad (5.12)$$

Prendendo N molto grande per una d fissata (tale che $\log(N) >> d$), si ottiene dalla (5.12) l'ovvia ed intuitiva relazione $h_N(d) \approx \pi_d(N)$.
Dal Teorema dei Numeri Primi con il termine di errore più piccolo ottenuto assumendo l'Ipotesi di Riemann, abbiamo che:

$$\pi(N) = \int_0^N \frac{du}{\log(u)} + O\left(N^{1/2} \log(N)\right). \quad (5.13)$$

D'altra parte la (5.1) può essere generalizzata come:

$$\pi_d(N) \approx 2c_2 \prod_{p|d} \frac{p-1}{p-2} \int_0^N \frac{du}{\log^2(u)} \equiv 2c_2 \prod_{p|d} \frac{p-1}{p-2} Li_2(N). \quad (5.14)$$

Come applicazione della Congettura principale (5.11) è possibile ottenere la lunghezza $G(N)$ del più grande intervallo tra primi consecutivi al di sotto di un dato limite N.
Usando la forma generale delle funzioni $A(N)$ e $B(N)$ data dalla (5.9), otteniamo la seguente Congettura:

$$G(N) \approx g(N) = \frac{N}{\pi(N)} \left[2\log(\pi(N)) - \log(N) + c_0\right], \quad (5.15)$$

dove $c_0 = \log(2c_2) \approx 0.278$. La formula (5.15), esprime $G(N)$ direttamente attraverso $\pi(N)$ e per la stima $\pi(N) \approx N/\log(N)$ congetturata da Gauss, fornisce:

$$G(N) \approx g_1(N) = \log(N)\left[\log(N) - 2\log\log(N) + c_0\right]. \quad (5.16)$$

La formula (5.16), per N grande passa per la congettura di Cramer:

$$G(N) \approx \log^2(N). \quad (5.17)$$

Il matematico A. Granville, rammenta che $G(N)$ può essere più grande di quella data dalla (5.17), cioè, egli esige che esistono infinite coppie di primi p_n, p_{n+1} per cui:

$$p_{n+1} - p_n = G(p_n) > 2e^{-\gamma} \log^2(p_n) \cong 1.12292 \log^2(p_n). \quad (5.18)$$

È importante evidenziare che la curva $G(N)$, giace sempre al di sotto della congettura di Cramer (5.17) e che la (5.18) per essere vera si deve trovare in una regione dove $G(N) > 1.123\log^2(N)$.
Dalla (5.15) è possibile ottenere la seguente equazione:

$$0.278N = \pi(N)\left[G(N) - 2\log N\right] + N\log(N). \quad (5.19)$$

Notando che $0.278 \approx 0.618033^3$, e sostituendo a $\pi(N)$ la (5.13), otteniamo la seguente interessante connessione:

$$\left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3\right]N = \int_0^N \frac{du}{\log(u)} + O\left(N^{1/2}\log(N)\right)\left[G(N) - 2\log N\right] + N\log(N), \quad (5.20)$$

da cui:

$$\left[(R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)})^3\right]N =$$
$$= \int_0^N \frac{du}{\log(u)} + O\left(N^{1/2}\log(N)\right)\left[G(N) - 2\log N\right] + N\log(N). \quad (5.21)$$

5.1 Sulle costanti di Brun generalizzate.

Nel 1919 Brun mostrò che la somma dei reciproci di tutti i primi gemelli è finita:

$$B_2 = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right) + \ldots < \infty. \quad (5.1.1)$$

La somma (5.1.1) è chiamata la costante di Brun. La stima numerica fornisce il seguente valore: $B_2 = 1.9021605$.
Indichiamo con T_d l'insieme dei primi consecutivi separati dalla distanza d:

$$T_d = \{p_{n+1}, p_n \mid p_{n+1} - p_n = d\}, \quad (5.1.2)$$

dove $d = 2k,\ k = 1,2,\ldots$ Chiameremo questi primi "gemelli di genere d". Per $d = 2$ l'insieme T_2 contiene primi gemelli, mentre per $d = 4$ l'insieme T_4 contiene primi "cugini". Le costanti di Brun generalizzate sono definite dall'equazione:

$$B_d = \sum_{p \in T_d} 1/p. \quad (5.1.3)$$

Per $d = 2$ abbiamo la solita costante di Brun B_2 per i gemelli. Se $\pi_d(x)$ indica il numero di coppie (p, p') minori di x tali che p e $p' = p + d$ siano entrambi primi, allora può essere provato che:

$$\pi_d(x) = O\left(x(\ln(\ln(x)))^2 \ln^{-2}(x)\right). \quad (5.1.4)$$

Perché la serie (5.1.3) contiene soltanto primi consecutivi separati dalla distanza d, essi sono maggiorati dalle serie su tutte le coppie di primi $p, p+d$, non necessariamente successive. Da questi fatti segue che la somma nella (5.1.3) è convergente per ogni d, in tal modo le costanti di Brun generalizzate sono finite.
Definiamo adesso la somma parziale (finita):

$$B_d(x) = \sum_{p \in T_d, p<x} 1/p . \quad (5.1.5)$$

La dipendenza di $B_2(x)$ da x è solitamente ottenuta rifacendosi alla congettura di Hardy-Littlewood sul numero di primi separati dalla distanza d. Essa asserisce che esistono infinite coppie di primi

$$p, p' = p + d , \quad (5.1.6)$$

ancora per ogni d e che

$$\pi_d(x) \approx 2c_2 \frac{x}{\ln^2(x)} \prod_{p|d} \frac{p-1}{p-2} . \quad (5.1.7)$$

Qui la costante c_2 è definita nel seguente modo:

$$c_2 \equiv \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 0.66016... \quad (5.1.8)$$

Le coppie di primi separate da $d = 2$ e $d = 4$ sono speciali in quanto esse sono sempre costituite da primi consecutivi (con l'eccezione della coppia (3, 7) che contiene il numero primo 5 nel mezzo) e per $d \geq 6$ la funzione $\pi_d(x)$ conteggia tutte le coppie $p, p' = p + d$, non necessariamente successive. Per $d = 2$ l'equazione (5.1.7) fornisce la probabilità di trovare una coppia di gemelli nelle vicinanze di x, che è $2c_2 / \ln^2(x)$, così il valore atteso dell'approssimazione finita per la costante di Brun, può essere stimato come segue:

$$B_2(x) = B_2(\infty) - \sum_{p \in T_2, p>x} \frac{1}{p} \approx B_2 - 4c_2 \int_x^{\infty} \frac{du}{u \ln^2(u)} = B_2 - \frac{4c_2}{\ln(x)} . \quad (5.1.9)$$

Ciò significa che il grafico di approssimazione finita $B_2(x)$ per l'originale costante di Brun, è una funzione lineare di $1/\ln(x)$. Lo stesso ragionamento si applica per l'intervallo $d = 4$.
Per ripetere tale tipo di ragionamento per $d = 2, 4$ per d più grandi, ci occorre un'analoga della congettura di Hardy-Littlewood per le coppie di primi consecutivi separati dalla distanza d.
È stato congetturato che il numero $h_d(x)$ di primi successivi (p_{n+1}, p_n) più piccolo di x e separato da $d(= p_{n+1} - p_n)$ si riduce del fattore $\exp(-d/\ln(x))$ nei confronti di tutte le coppie di primi (p, p'), indipendentemente dalla distanza $d(= p' - p)$:

$$h_d(x) = \pi_d(x) e^{-d/\ln(x)} = 2c_2 \frac{x}{\ln^2(x)} \prod_{p|d} \frac{p-1}{p-2} e^{-d/\ln(x)} . \quad (5.1.10)$$

Nulla si conosce circa il termine di errore riguardo l'equazione di sopra. Per $d \geq 6$ l'equazione (5.1.10) fornisce:

$$B_d(x) = B_d(\infty) - \sum_{p \in T_d, p>x} \frac{1}{p} \approx B_d - 4c_2 \prod_{p|d} \frac{p-1}{p-2} \int_x^{\infty} \frac{e^{-d/\ln(u)}}{u \ln^2(u)} du . \quad (5.1.11)$$

L'integrale può essere calcolato esplicitamente:

$$B_d(x) = B_d(\infty) + \frac{4c_2}{d}\prod_{p|d}\frac{p-1}{p-2}\left(e^{-d/\ln(x)}-1\right). \quad (5.1.12)$$

Da questo segue che la somma parziale $B_d(x)$ per $d \geq 6$ dipenderebbe linearmente da $\exp(-d/\ln(x))$ invece di $1/\ln(x)$ per $B_2(x)$ e $B_4(x)$.
È ben noto che la somma dei reciproci di tutti i primi più piccoli di x è data da:

$$\sum_{p<x}\frac{1}{p} = \ln(\ln(x)) + M + o(1); \quad (5.1.13)$$

qui $M = \gamma - \sum_{k=2}^{\infty} 1/k\Sigma(k) = 0.2614972...$, dove $\Sigma(k) = \sum_p 1/p^k$ e $\gamma = 0.5772157\ldots$ è la costante di Eulero. D'altra parte, essa può essere espressa tramite l'approssimazione finita inerente le costanti di Brun generalizzate:

$$\sum_{p<x}\frac{1}{p} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\sum_d B_d(x) = M' + \frac{2}{3} + 2c_2\sum_{d=2}^{G(x)}\frac{1}{d}\prod_{p|d}\frac{p-1}{p-2}e^{-d/\ln(x)}. \quad (5.1.14)$$

Qui è stata introdotta la costante M' che considera la somma dei termini di errore sconosciuti nella seguente espressione:

$$B_d(x) = \frac{4c_2}{d}\prod_{p|d}\frac{p-1}{p-2}e^{-d/\ln(x)} + \text{error term } (d, x). \quad (5.1.15)$$

La somma nella (5.1.14) passa proprio sopra d e si estende sull'intervallo più grande $G(x)$ tra due primi consecutivi più piccoli di x. È stato congetturato da Cramer che:

$$G(x) \approx \ln^2(x). \quad (5.1.16)$$

Il prodotto $\Im(d)$ si comporta in maniera molto irregolare, ma esso prende valori dell'ordine di 1. Infatti, il suo valor medio è uguale a $1/c_2$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{p|2k,p>2}\frac{p-1}{p-2} = \frac{1}{\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)} \quad (=1.51478...). \quad (5.1.17)$$

Sostituendo il prodotto $\Im(d)$ sotto la somma (5.1.14) attraverso il suo valor medio $1/c_2$, arriviamo alla serie:

$$\sum_{p<x}\frac{1}{p} = M' + \frac{2}{3} + 2\sum_{d=2}^{G(x)}\frac{1}{d}e^{-d/\ln(x)} = M' + \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{1/2G(x)}\frac{1}{k}q^k, \quad q = e^{-2/\ln(x)}. \quad (5.1.18)$$

Espandendo $\ln(1-q)$, dove $0 < q < 1$ nella serie, otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}q^k = -\ln(1-q) + \int_0^q \frac{u^n}{u-1}du. \quad (5.1.19)$$

Per x grande, il termine con logaritmo diviene:

$$\ln\left(1-e^{-2/\ln(x)}\right)=-\ln(\ln(x))+\ln(2)+O(1/\ln(x)). \quad (5.1.20)$$

Adesso, dal Teorema del valor medio, calcoliamo l'integrale:

$$I=\int_0^q \frac{u^n}{u-1}du=\frac{1}{(\theta q-1)}\frac{q^{n+1}}{(n+1)}, \quad 0<\theta<1. \quad (5.1.21)$$

Ma $q=\exp(-2/\ln(x))<1$ e:

$$\left|\frac{1}{\theta q-1}\right|<\frac{1}{1-q}=\frac{e^{2/\ln(x)}}{e^{2/\ln(x)}-1}<\frac{\ln(x)}{2}e^{2/\ln(x)}=O(\ln(x)). \quad (5.1.22)$$

Per $x>>1$ abbiamo, in virtù della congettura di Cramer, che nel nostro caso $n\approx\frac{1}{2}\ln^2(x)$, così:

$$|I|=O(1/x\ln(x)). \quad (5.1.23)$$

Finalmente, dalle (5.1.12) e (5.1.14), otteniamo che:

$$\sum_{p<x}\frac{1}{p}=\ln(\ln(x))+M'+\frac{2}{3}-\ln(2)+O(1/\ln(x)). \quad (5.1.24)$$

Perché $2/3$ è praticamente uguale a $\ln(2)$ per richiedere la coerenza con il Teorema di Merten, dobbiamo postulare che $M'\approx M$.

Su alcune connessioni con le identità di Ramanujan e con la Teoria di Stringa.

Prendiamo il numero puro 1,9021605 cioè la stima numerica fornita dalla (5.1.1). Abbiamo che:

$\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^7\times\frac{1}{3\cdot 5}\approx 1{,}935\cong 1{,}9...\cong 1{,}9021605$ (5.1.25), e che:

$\left[1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+\frac{1}{4}(c)\right]=1{,}888949$ (5.1.26) con c = 1,08366 che rappresenta la costante di Legendre. Notiamo che: $\frac{1{,}935621+1{,}888949}{2}=1{,}912285$ valore molto vicino a 1,9021605.

Ma la (5.1.25), ricordando una delle identità di S. Ramanujan, può anche scriversi:

$$\left[1+\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f\left(-t^{1/5}\right)}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)\right]^7\times\frac{1}{3\cdot 5}\cong 1{,}935... \quad (5.1.27)$$

Prendiamo adesso il numero puro 0,2614972 cioè il valore di M della (5.1.13). Avremo che:

$$\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2}\times\frac{1}{2\cdot 5}\approx 0{,}2618034025\cong 0{,}261 \quad (5.1.28)$$

che è un valore vicinissimo a quello iniziale.

Ma la (5.1.28) può anche scriversi:

$$\left[1+\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f\left(-t^{1/5}\right)}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)\right]^2\times\frac{1}{2\cdot 5}\cong 0{,}261. \quad (5.1.29)$$

Infine, prendiamo il numero puro 1,51478. Questo si ricava dall'equazione (5.1.17). In quest'ulteriore caso, abbiamo che:

$$\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{7}\times\frac{1}{2^2\cdot 5}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\times\frac{1}{2\cdot 5}\approx 1{,}51352...\cong 1{,}51 \quad (5.1.30)$$

che è un valore molto prossimo a quello dato. Anche la (5.1.30) può scriversi:

$$\left[1+\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f\left(-t^{1/5}\right)}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)\right]^7\times\frac{1}{2^2\cdot 5}+$$

$$+\left[\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f\left(-t^{1/5}\right)}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)\right]\times\frac{1}{2\cdot 5}\approx 1{,}51352...\cong 1{,}51. \quad (5.1.31).$$

È importante evidenziare che tutte e tre le espressioni, cioè la (5.1.27), (5.1.29) e (5.1.31), come anche la (4.15), la (5.21) e la (5.1.9), possono essere connesse con il modello di Palumbo-Nardelli che prevede la creazione di stringhe fermioniche da quelle bosoniche, attraverso le quali si manifesta poi l'interazione gravitazionale e dove il segno meno indica la forza di espansione, cioè la costante cosmologica di Einstein:

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16G}\cdot\frac{1}{2\Phi-\frac{3}{20}\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f\left(-t^{1/5}\right)}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\ \right]=\int_0^\infty\frac{R}{\kappa_{11}^2}\cdot 2\Phi-\frac{3}{20}\left[R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right]\cdot$$

$$\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{11}^2}{2\Phi-\frac{3}{20}\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)2Rg_{10}^2}Tr_v\right.$$

$$\left.\left(\left|F_2\right|^2\right)\ \right].\quad (5.1.32)$$

Tale espressione non è altro che la (3.4) che abbiamo in precedenza analizzato.

5.2 Connessioni tra Teoria di Stringa e Congettura di Goldbach: Soluzioni cosmologiche da un sistema D3/D7.

L'azione completa nella M-teoria consiste di tre parti: un termine di volume, , un termine di correzione quantico, $S_{quantum}$, ed un termine che origina una membrana, S_{M2}. L'azione è allora data dalla somma di queste tre parti:

$$S = S_{bulk} + S_{quantum} + S_{M2}. \quad (5.2.1)$$

Le parti individuali sono:

$$S_{bulk} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{11}x\sqrt{-g}\left[R-\frac{1}{48}G^2\right]-\frac{1}{12\kappa^2}\int C\wedge G\wedge G,\quad (5.2.2)$$

dove abbiamo definito G = dC, con C che è l'usuale tre-forma della M-teoria, e $\kappa^2\equiv 8\pi G_N^{(11)}$. Questa è la parte bosonica dell'azione classica della supergravità 11-dimensionale. La principale correzione quantistica all'azione può essere scritta come:

$$S_{quantum} = b_1 T_2\int d^{11}x\sqrt{-g}\left[J_0-\frac{1}{2}E_8\right]-T_2\int C\wedge X_8.\quad (5.2.3)$$

Il coefficiente T_2 è la tensione della membrana. Per il nostro caso, $T_2 = \left(\frac{2\pi^2}{\kappa^2}\right)^{1/3}$, e b_1 è una costante numerica data esplicitamente da $b_1 = (2\pi)^{-4} 3^{-2} 2^{-13}$. L'azione della M2 brana è data da:

$$S_{M2} = -\frac{T_2}{2}\int d^3\sigma\sqrt{-\gamma}\left[\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu X^M \partial_\nu X^N g_{MN} - 1 + \frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\mu X^M \partial_\nu X^N \partial_\rho X^P C_{MNP}\right], \quad (5.2.4)$$

dove X^M sono le coordinate di "immersione" della membrana. La metrica del "volume d'universo" $\gamma_{\mu\nu}, \mu,\nu = 0,1,2$ è semplicemente il "pull-back" di g_{MN}, la metrica dello spazio-tempo. Il moto di questa M2 brana è ovviamente influenzato dal "background" dei G-flussi.

<u>Classificazione e stabilità delle soluzioni cosmologiche</u>.

La metrica che otteniamo per il tipo IIB è della seguente forma generale :

$$ds^2 = \frac{f_1}{t^\alpha}\left(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2\right) + \frac{f_2}{t^\beta}dx_3^2 + \frac{f_3}{t^\gamma} g_{mn} dy^m dy^n \quad (5.2.5)$$

dove $f_i = f_i(y)$ sono alcune funzioni delle coordinate della quadri-varietà e α, β e γ possono essere numeri positivi o negativi. Per arbitrarie $f_i(y)$ e arbitrarie potenze di t, la metrica di tipo IIB può derivare in generale da una metrica di M-teoria della forma

$$ds^2 = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + e^{2B} g_{mn}dy^m dy^n + e^{2C}|dz|^2, \quad (5.2.6)$$

con tre differenti fattori di curvatura A, B e C , dati da:

$$A = \frac{1}{2}\log\frac{f_1 f_2^{\frac{1}{3}}}{t^{\alpha+\frac{\beta}{3}}} + \frac{1}{3}\log\frac{\tau_2}{|\tau|^2}, \quad B = \frac{1}{2}\log\frac{f_3 f_2^{\frac{1}{3}}}{t^{\gamma+\frac{\beta}{3}}} + \frac{1}{3}\log\frac{\tau_2}{|\tau|^2}, \quad C = -\frac{1}{3}\left[\log\frac{f_2}{t^\beta} + \log\frac{\tau_2^2}{|\tau|}\right]. \quad (5.2.7)$$

Per vedere quali sono le possibili scelte per un tale background, occorre trovare la differenza B – C . Questa è data da:

$$B - C = \frac{1}{2}\log\frac{f_2 f_3}{t^{\gamma+\beta}} + \log\frac{\tau_2}{|\tau|}. \quad (5.2.8)$$

Poichè le parti dipendenti inerenti lo spazio ed il tempo della (5.2.8) possono essere isolate, la (5.2.8) può annullarsi soltanto se

$$f_2 = f_3^{-1}\cdot\frac{|\tau|}{\tau_2}, \qquad \gamma + \beta = 0, \quad (5.2.9)$$

con α e $f_1(y)$ che rimangono completamente arbitrarie.
Adesso studiamo il seguente caso interessante, dove $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = 0$ $\quad f_1 = f_2$. La 6-varietà interna è indipendente dal tempo. Questo esempio corrisponderebbe ad un esatto background di tipo

de-Sitter, e quindi questo produrrebbe un universo in accelerazione con i tre fattori di curvatura dati da:

$$A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2}, \quad B = \frac{1}{2}\left[\log f_3 + \frac{1}{3}\log\frac{f_1}{t^2}\right], \quad C = -\frac{1}{3}\log\frac{f_1}{t^2}. \quad (5.2.10)$$

Vediamo che la quadri-varietà interna ha fattori di curvature dipendenti dal tempo sebbene lo spazio 6-dimensionale di tipo IIB è completamente indipendente dal tempo. Un tale background ha il vantaggio che la dinamica quadri-dimensionale che dipenderebbe sullo spazio interno adesso diviene indipendente dal tempo. Questo caso presuppone che la dipendenza dal tempo ha una forma peculiare, cioè la varietà interna 6D della teoria di tipo IIB è assunta costante, e le direzioni non-compatte corrispondono ad uno spazio di de-Sitter 4D. Usando la (5.2.10), la corrispondente metrica 11D nello scenario della M-teoria, può allora, in linea di principio, essere inserita nelle equazioni del moto che seguono dalla (5.2.1).

5.3 Soluzione applicata alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB.

Consideriamo la seguente azione in (q+n+2) dimensioni, contenente la metrica, $g_{\mu\nu}$, un campo diatonico, ϕ, con un potenziale scalare generale, $V(\phi)$, ed un campo di forza (q+2)-forma, $F_{q+2} = dA_{q+1}$, conformemente accoppiato al dilatone:

$$S = \int_{\mathrm{M}_{q+n+2}} d^{q+n+2}x\sqrt{|g|}\left[\alpha R - \beta(\partial\phi)^2 - \frac{\eta}{(q+2)!}e^{-\sigma\phi}F_{q+2}^2 - V(\phi)\right]. \quad (5.3.1)$$

Qui R è lo scalare di Ricci costruito dalla metrica ed M è una costante. La stabilità richiede che le costanti α, β e η siano positive, infine, $V = \Lambda e^{-\lambda\phi}$ è il potenziale di Liouville, per il quale Wiltshire ed i suoi collaboratori hanno mostrato che le equazioni del moto non ammettono soluzioni di tipo buco nero eccetto per il caso di una costante cosmologica pura negativa, $\lambda = 0$ e $\Lambda < 0$.
La soluzione che cerchiamo può essere realizzata su una tre-sfera S^3 per fornire una soluzione alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB. Questa teoria a 10D contiene un gravitone, un campo scalare e la 3-forma NSNS tra altri campi ed ha un'azione 10 dimensionale, molto simile alla (5.3.1), fornita da

$$S_{10} = \int d^{10}x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{4}R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12}e^{-2\phi}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right]. \quad (5.3.2)$$

Abbiamo una configurazione 10 dimensionale data da

$$ds_{10}^2=\left(\frac{2}{r}\right)^{3/4}\left[-h(r)dt^2+r^2dx_{0,5}^2+\frac{r^2}{h(r)}dr^2\right]+\left(\frac{r}{2}\right)^{5/4}\left[d\theta^2+d\psi^2+d\varphi^2+\left(d\psi+\cos\theta d\varphi-\frac{Q}{5r^5}dt\right)^2\right]$$

$$\phi=-\frac{5}{4}\log\frac{r}{2},$$

$$H_3=-\frac{Q}{r^6}dr\wedge dt\wedge\left(d\psi+\cos\theta d\varphi\right)-\frac{g}{\sqrt{2}}\sin\theta d\theta\wedge d\varphi\wedge d\psi.\quad(5.3.3)$$

Questa soluzione 10-dimensionale descrive NS-5 brane che si intersecano con le stringhe fondamentali nella direzione del tempo.
Adesso effettuiamo la “manipolazione” delle variabili angolari della tre-sfera introducendo le seguenti 1-forme di SU(2) invarianti a sinistra:

$$\sigma_1=\cos\psi d\theta+\sin\psi\sin\theta d\varphi,\quad \sigma_2=\sin\psi d\theta-\cos\psi\sin\theta d\varphi,\quad \sigma_3=d\psi+\cos\theta d\varphi,\quad(5.3.4)$$

e
$$h_3=\sigma_3-\frac{Q}{5}\frac{1}{r^5}dt.\quad(5.3.5)$$

Poi, eseguiamo il seguente cambio di variabili

$$\frac{r}{2}=\rho^{\frac{4}{5}},\quad t=\frac{5}{32}\tilde{t},\quad dx_4=\frac{1}{2\sqrt{2}}d\tilde{x}_4,\quad dx_5=\frac{1}{2}dZ,\quad g=\sqrt{2}\tilde{g},\quad Q=\sqrt{2}2^7\tilde{Q},\quad \sigma_i=\frac{1}{\tilde{g}}\tilde{\sigma}_i.$$
(5.3.6).

É semplice verificare che la soluzione 10-dimensionale (5.3.3) diviene, dopo questi cambi

$$d\tilde{s}_{10}^2=\frac{1}{2}\rho^{-1}\left[d\tilde{s}_6^2\right]+\frac{\rho}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2+\tilde{\sigma}_2^2+\left(\tilde{\sigma}_3-\frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right]+\rho dZ^2,$$
$$\phi=-\ln\rho,$$
$$H_3=-\frac{1}{\tilde{g}^2}\tilde{\sigma}_1\wedge\tilde{\sigma}_2\wedge\tilde{h}_3+\frac{\tilde{Q}}{\sqrt{2}\tilde{g}\rho^5}d\tilde{t}\wedge d\rho\wedge\tilde{h}_3,\quad(5.3.7)$$

dove definiamo

$$d\tilde{s}_6^2=-\tilde{h}(\rho)d\tilde{t}^2+\frac{\rho^2}{\tilde{h}(\rho)}d\rho^2+\rho^2d\tilde{x}_{0,4}^2\quad(5.3.8)$$

e, dopo aver rimisurato M,

$$\tilde{h}=-\frac{2\tilde{M}}{\rho^2}+\frac{\tilde{g}^2}{32}\rho^2+\frac{\tilde{Q}^2}{8}\frac{1}{\rho^6}.\quad(5.3.9)$$

Adesso trasformiamo la soluzione dal riferimento di Einstein a quello di stringa. Questo conduce a

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\rho^{-2}\left[d\tilde{s}_6^2\right] + \frac{1}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = -2\ln\rho,$$

$$\bar{H}_3 = H_3. \qquad (5.3.10)$$

Abbiamo una soluzione per la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB con un campo NSNS non banale. Se eseguiamo una trasformazione di S-dualità a questa soluzione, otteniamo ancora una soluzione per la teoria di tipo IIB, ma con una RR 3-forma, F_3 non banale. La trasformazione di S-dualità agisce soltanto sulla metrica e sul dilatone, lasciando invariante la tre-forma. In questo modo siamo condotti alla seguente configurazione, che è S-duale a quella derivata sopra

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\left[d\tilde{s}_6^2\right] + \frac{\rho^2}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + \rho^2 dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = 2\ln\rho,$$

$$F_3 = H_3. \qquad (5.3.11)$$

Riguardo alla T-dualità, nel riferimento di stringa abbiamo

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\left[ds_6^2\right] + \frac{r^2}{g^2}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left(\sigma_3 - \frac{gQ}{4\sqrt{2}}\frac{1}{r^4}dt\right)^2\right] + r^{-2}dZ^2. \quad (5.3.12)$$

Questa espressione fornisce una soluzione alla supergravità di tipo IIA con RR 4-forma, C_4 eccitata. Procediamo effettuando una trasformazione di T-dualità, che conduce ad una soluzione della teoria di tipo IIB con RR 3-forma, C_3 non banale. La soluzione completa allora diviene

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\left[ds_6^2\right] + \frac{r^2}{g^2}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left(\sigma_3 - \frac{gQ}{4\sqrt{2}}\frac{1}{r^4}dt\right)^2\right] + r^2 dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = 2\ln r$$

$$C_3 = -\frac{1}{g^2}\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge h_3 - \frac{Q}{\sqrt{2}g}\frac{1}{r^5}dt \wedge dr \wedge h_3. \quad (5.3.13)$$

Siamo condotti in questo modo, precisamente alla stessa soluzione 10D come è stata trovata in precedenza [vedi formula (5.3.11)].

5.4 Connessioni con alcune equazioni riguardanti la funzione zeta di Riemann.

Sono state ottenute delle interessanti connessioni tra alcune soluzioni cosmologiche di un sistema D3/D7, alcune soluzioni riguardanti la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB ed alcune equazioni riguardanti la funzione zeta di Riemann, in modo specifico il teorema di Goldston-Montgomery.
Nel 1742, in due lettere indirizzate ad Eulero, Goldbach congetturò che "**ogni intero** n **pari**, n > 2, **è somma di due numeri primi**". Tale affermazione è oggi nota come congettura di Goldbach. Talvolta per congettura di Goldbach si intende anche l'affermazione più debole "**ogni intero** n **pari**, n **sufficientemente grande, è somma di due numeri primi**". Si definisce, inoltre, "G-numero" un intero esprimibile come somma di due primi.
Negli anni '90 Goldston ha osservato che, supponendo oltre all'Ipotesi di Riemann anche la Congettura di Montgomery, è possibile ottenere l'esistenza di G-numeri in intervalli di lunghezza log N.
Nel capitolo "Numeri di Goldbach in intervalli corti" dell'articolo di Languasco "La congettura di Goldbach", è descritto il teorema di Goldston-Montgomery.

TEOREMA 1

Assumiamo l'ipotesi di Riemann. Abbiamo le seguenti implicazioni: (1) Se $0 < B_1 \le B_2 \le 1$ e $F(X,T) \approx \frac{1}{2\pi} T \log T$ uniformemente per $\frac{X^{B_1}}{\log^3 X} \le T \le X^{B_2} \log^3 X$, allora

$$\int_1^X (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 dx \approx \frac{1}{2}\delta X^2 \log\frac{1}{\delta}, \quad (5.4.1)$$

uniformemente per $\frac{1}{X^{B_2}} \le \delta \le \frac{1}{X^{B_1}}$.

(2) Se $1 < A_1 \le A_2 < \infty$ e $\int_1^X (\psi((1+\delta)x) - \psi(x) - \delta x)^2 dx \approx \frac{1}{2}\delta X^2 \log\frac{1}{\delta}$ uniformemente per $\frac{1}{X^{1/A_1}\log^3 X} \le T \le \frac{1}{X^{1/A_2}}\log^3 X$, allora $F(X,T) \approx \frac{1}{2\pi} T \log T$ uniformemente per

$$T^{A_1} \le X \le T^{A_2}.$$

La dimostrazione di tale teorema richiede alcuni risultati preliminari.

Lemmi preliminari. (Tali lemmi sono stati dimostrati da Goldston-Montgomery)

Lemma 1.

Sia $f(y) \ge 0 \quad \forall y \in R$ e valga $I(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|y|} f(Y+y)dy = 1 + \varepsilon(Y)$. Allora detta R(y) una funzione Riemann-integrabile si ha

$$\int_a^b R(y)f(Y+y)dy = \left(\int_a^b R(y)dy\right)(1+\varepsilon'(y)).$$

Inoltre, fissata R, $|\varepsilon'(Y)|$ è piccolo se $|\varepsilon(y)|$ è piccolo uniformemente per $Y+a-1 \le y \le Y+b+1$.

Lemma 2.

Sia $f(t) \ge 0$ una funzione continua definita su $[0,+\infty)$ tale che $f(t) << \log^2(t+2)$.
Se

$$J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon(T))T\log T ,$$

allora

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin ku}{u}\right)^2 f(u)du = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'(k)\right)k\log\frac{1}{k},$$

con $|\varepsilon'(k)|$ piccolo per $k \to 0^+$ se $|\varepsilon(T)|$ è piccolo uniformemente per

$$\frac{1}{k\log^2 k} \le T \le \frac{1}{k}\log^2 k .$$

Lemma 3.

Sia $f(t) \ge 0$ una funzione continua definita su $[0,+\infty)$ tale che $f(t) << \log^2(t+2)$. Se

$$I(k) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin ku}{u}\right)^2 f(u)du = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'(k)\right)k\log\frac{1}{k}, \quad (5.4.2) \qquad \text{allora}$$

$$J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T \ , \ (5.4.3)$$

con $|\varepsilon'|$ piccolo se $|\varepsilon(k)| \le \varepsilon$ uniformemente per $\frac{1}{T\log T} \le k \le \frac{1}{T}\log^2 T$.

Lemma 4.

Sia $F(X,T) := \sum_{0<\gamma,\gamma'<T} \frac{4X^{i(\gamma-\gamma')}}{4+(\gamma-\gamma')^2}$. Allora (i) $F(X,T) \ge 0$; (ii) $F(X,T) = F(1/X,T)$; (iii) Se

vale l'Ipotesi di Riemann allora

$$F(X,T)=T\left(\frac{1}{X^2}\log^2 T+\log X\right)\left(\frac{1}{2\pi}+O\left(\sqrt{\frac{\log\log T}{\log T}}\right)\right)$$

uniformemente per $1\le X\le T$.

Lemma 5.

Sia $\delta\in(0,1]$ e $a(s)=\dfrac{(1+\delta)^s-1}{s}$. Se $c(\gamma)\le 1\quad\forall y$ si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|a(it)|^2\left|\sum_{\gamma}\frac{c(\gamma)}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{|\gamma|\le Z}a(1/2+i\gamma)\frac{c(\gamma)}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt+O\left(\delta^2\log^3\frac{2}{\delta}\right)+O\left(\frac{1}{Z}\log^3 Z\right)$$

per $Z>\dfrac{1}{\delta}$.

La dimostrazione del Teorema 1, si divide in due parti. Proviamo (1).
Definiamo

$$J(X,T)=4\int_0^T\left|\sum_{\gamma}\frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt.$$

Montgomery ha provato che $J(X,T)=2\pi F(X,T)+O(\log^3 T)$ e quindi l'ipotesi $F(X,T)\approx\dfrac{1}{2\pi}T\log T$ equivale a $J(X,T)=(1+o(1))T\log T$. Ponendo $k=\dfrac{1}{2}\log(1+\delta)$, abbiamo

$$|a(it)|^2=4\left(\frac{\sin kt}{t}\right)^2.$$

Il Lemma 2 fornisce

$$\int_0^{\infty}|a(it)|^2\left|\sum_{\gamma}\frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt=\left(\frac{\pi}{2}+o(1)\right)k\log\frac{1}{k}=\left(\frac{\pi}{4}+o(1)\right)\delta\log\frac{1}{\delta}$$

per

$$\frac{1}{\delta\log^2\frac{1}{\delta}}\le T\le\frac{3}{\delta}\log^2\frac{1}{\delta}.$$

Per il Lemma 5 e la parità dell'integranda si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{|\gamma|\le Z}a(\rho)\frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt=\left(\frac{\pi}{2}+o(1)\right)\delta\log\frac{1}{\delta}\qquad\text{(a)}$$

se $Z\ge\dfrac{1}{\delta}\log^3\dfrac{1}{\delta}$.

Detta $S(t)=\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)\frac{X^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}$ notiamo che la sua trasformata di Fourier verifica

$$\hat{S}(u)=\pi\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)X^{i\gamma}e(-\gamma u)e^{-2\pi|u|}.$$

Dall'identità di Plancherel, segue che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)X^{i\gamma}e(-\gamma u)\right|^2 e^{-4\pi|u|}du=\left(\frac{2}{\pi}+o(1)\right)\delta\log\frac{1}{\delta}.$$

Operando la sostituzione $Y=\log X$, $-2\pi u=y$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)e^{i\gamma(Y+y)}\right|^2 e^{-2|y|}dy=(1+o(1))\delta\log\frac{1}{\delta}. \quad \text{(b)}$$

Usando il Lemma 1 con $R(y)=e^{2y}$ se $0\le y\le\log 2$ e $R(y)=0$ altrimenti, e ponendo $x=e^{Y+y}$ si ha

$$\int_{X}^{2X}\left|\sum_{|\gamma|\le Z} a(\rho)x^{\rho}\right|^2 dx=\left(\frac{3}{2}+o(1)\right)\delta X^2\log\frac{1}{\delta}.$$

Sostituendo X con $X2^{-j}$, sommando su j, $1\le j\le K$, e usando la formula esplicita per $\psi(x)$ con $Z=X\log^3 X$ deduciamo

$$\int_{X2^{-K}}^{X}(\psi((1+\delta)x)-\psi(x)-\delta x)^2dx=\frac{1}{2}\left(1-2^{-2K}+o(1)\right)\delta X^2\log\frac{1}{\delta}.$$

Poniamo infine $K=[\log\log X]$ e ricorriamo, per l'intervallo $1\le x\le X2^{-K}$, alla stima di Lemma 4 (con $X2^{-K}$ al posto di X). In tal modo otteniamo (1).
Proviamo (2).
Fissiamo un numero reale X_1. Integrando per parti tra X_1 e $X_2=X_1\log^{2/3}X_1$ otteniamo, ricordando che in ipotesi abbiamo

$$\int_{1}^{X}(\psi((1+\delta)x)-\psi(x)-\delta x)^2dx\approx\frac{1}{2}\delta X^2\log\frac{1}{\delta},$$

che

$$\int_{X_1}^{X_2}(\psi((1+\delta)x)-\psi(x)-\delta x)^2x^{-4}dx=\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\delta X_1^{-2}\log\frac{1}{\delta}. \quad \text{(c)}$$

Utilizzando la stima, valida sotto ipotesi di Riemann

$$\int_{1}^{X}(\psi((1+\delta)x)-\psi(x)-\delta x)^2dx<<\delta X^2\log^2\frac{2}{\delta},$$

deduciamo analogamente a quanto fatto in precedenza che

$$\int_{X_2}^{\infty}(\psi((1+\delta)x)-\psi(x)-\delta x)^2 x^{-4}dx << \delta X_2^{-2}\log^2\frac{1}{\delta} = o\left(\delta X_1^{-2}\log\frac{1}{\delta}\right). \quad \text{(d)}$$

Sommando adesso (c) e (d) e moltiplicando la somma per X_1^2 otteniamo

$$\int_1^{\infty}\min\left(\frac{x^2}{X_1^2},\frac{X_1^2}{x^2}\right)(\psi((1+\delta)x)-\psi(x)-\delta x)^2 x^{-2}dx = (1+o(1))\delta\log\frac{1}{\delta}.$$

Ponendo $X_1 = X$, $Y = \log X$, $x = e^{Y+y}$ ed usando la formula esplicita per $\psi(x)$ con $Z = X\log^3 X$, otteniamo l'equazione (b). A partire dalla summenzionata (b) si può seguire la dimostrazione del punto (1) a ritroso. L'unica differenza consiste nell'applicare il Lemma 3 anziché il Lemma 2.

Adesso, prendiamo l'equazione (5.2.10) e precisamente $A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2}$. Notiamo che dall'equazione (5.4.3) per $\varepsilon' = -\frac{2}{3}$ e T = 2, abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T = \frac{2}{3}\log 2$. Questo risultato è correlato a $A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2}$ ponendo $\frac{f_1}{t^2} = 2$, quindi con il Lemma 3 del teorema di Goldston-Montgomery. Allora, abbiamo la seguente relazione interessante

$$A = \frac{2}{3}\log\frac{f_1}{t^2} \Rightarrow \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T, \quad (5.4.4)$$

quindi la connessione tra la soluzione cosmologica e l'equazione correlata alla funzione zeta di Riemann.

Adesso, prendiamo le equazioni (5.3.3) e (5.3.11) e precisamente $\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2}$ e $\bar{\phi} = 2\ln\rho$.

Notiamo che dall'equazione (5.4.3) per $\varepsilon' = \frac{3}{2}$ e T = 1/2 , abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T = \frac{5}{4}\log\frac{1}{2}$.

Inoltre, per $\varepsilon' = 3$ e T = 1/2 , abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T = 2\log\frac{1}{2}$.

Questi risultati sono correlati a $\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2}$ ponendo r = 1 ed a $\bar{\phi} = 2\ln\rho$ ponendo $\rho = 1/2$, quindi con il Lemma 3 del teorema di Goldston-Montgomery. Allora, abbiamo le seguenti relazioni interessanti:

$$\phi = -\frac{5}{4}\log\frac{r}{2} \Rightarrow -\int_0^T f(t)dt = -[(1+\varepsilon')T\log T], \qquad \bar{\phi} = 2\ln\rho \Rightarrow \int_0^T f(t)dt = (1+\varepsilon')T\log T, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int d^{10}x\sqrt{|g|}\left[\frac{1}{4}R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12}e^{-2\phi}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda}\right] \quad (5.4.5)$$

quindi la connessione tra le soluzioni 10-dimensionali ed alcune equazioni correlate alla funzione zeta di Riemann.
Da questo il possibile legame tra soluzioni cosmologiche inerenti la teoria di stringa ed alcuni settori matematici inerenti la funzione zeta, quali il Teorema di Goldston-Montgomery e la collegata Congettura di Goldbach.

Ringraziamenti

È espresso desiderio di M. Nardelli, coautore e curatore del presente lavoro, rivolgere i doverosi ringraziamenti a F. Di Noto, per l'invio del prezioso ed originale materiale inerente la parte algebrica della Congettura (Teorema) di Polignac e del Teorema di Goldston-Yldirim, che hanno permesso la stesura e l'elaborazione del presente lavoro. Il Nardelli ringrazia anche il fisico Prof. A. Palumbo dell'Università di Napoli Federico II ed il fisico teorico Prof. G. Tasinato della Oxford University, per la loro amicizia e disponibilità.

Bibliografia

M. Nardelli, F. Di Noto, A. Tulumello: "*Fibonacci, Primi e Teoria di Stringa*" – Database CNRSOLAR – 113BC2006 – 07.11.2006.

M. Nardelli e F. Di Noto: "*Su alcuni contributi al Programma Langlands: ulteriori connessioni tra alcuni fenomeni fisici naturali, Teoria dei Numeri e Teoria di Stringa*" – Database CNRSOLAR – 124JA2007 – 08.01.2007.

Marek Wolf: "*Some Remarks on the Distribution of twin Primes*" – arXiv:math.NT/0105211 v1 – 25.05.2001.

Marek Wolf: "*Some conjectures on the gaps between consecutive primes*", Preprint IFTUWr 894//95, submitted to Asterisque.

Marek Wolf: "*Generalized Brun's constants*", Preprint IFTUWr 910//97, March 1997.

Finito di stampare nel mese di Marzo 2007
presso DI. VI. Service – Via Miranda, 50 – 80131 Napoli