UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI

SOLUZIONI DI UN MODELLO DI ACCUMULAZIONE

(UNA DIMOSTRAZIONE DI ESISTENZA E NON NEGATIVITA' DELLE SOLUZIONI IN UN MODELLO ECONOMICO DI ACCUMULAZIONE)

Relatori:
Prof. Gianfranco PALA
Dott. Michele TUCCI

Laureanda:
Fabrizia SERNIA
Matr. N.43525

Anno Accademico
1981 - 1982

I N D I C E

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro è contenuta una dimostrazione matematicamente rigorosa dell'esistenza di soluzioni economicamente significative nel modello di equilibrio economico generale secondo Zaghini.

Tale dimostrazione è stata condotta lungo le linee suggerite dall'autore stesso negli articoli analizzati; suggerimenti che tuttavia non assurgevano alla completezza di una dimostazione formale.

Si ritiene utile accennare a grandi linee la procedura matematica seguita nella dimostrazione:

si considerano le relazioni del modello di Zaghini

(a) $Cy \leq S$

(b) $vC \geq P$

(c) $P = \frac{1}{r} v$

(d) $Py = vS$

(e) se $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j < S_i$ allora $v_i = 0$

(f) se $\sum_{i=1}^{m} c_{ij} v_i > P_j$ allora $y_j = 0$

Una soluzione delle relazione da (a) a (f) è accettabile dal punto di vista economico se

$y \geq 0 \qquad v \geq 0 \qquad P \geq 0 \quad e \quad r \geq 0$

Determiniamo un livello assoluto dei prezzi imponendo che sia

$$(***) \qquad \sum_{1}^{n}{}_i P_i = 1$$

Consideriamo la relazione

$$(c) \qquad P = \frac{1}{r} v$$

e sfruttando la (***) otteniamo

$$P = \frac{1}{\sum_{1}^{n}{}_i v_i} v$$

Ricordiamo che, per le proprietà della P.L. le due relazioni

(a) $Cy \leq S$

(b) $vC \geq P$

si possono interpretare come i due sistemi di vincoli dei due problemi di P.L.

---

1) massimizzare Py subordinatamente a $Cy \leq S$

e $y \geq 0$

2) minimizzare vS subordinatamente a $vC \geq P$ e

$v \geq 0$

ossia:

$$1) \begin{cases} \max \quad Py \\ Cy \leq S \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad e \qquad 2) \begin{cases} \min \quad vS \\ vC \geq P \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Poichè la matrice C è non negativa ed è inoltre tale che ogni sua colonna possiede almeno un elemento positivo, i due insiemi di vincoli ammettono soluzioni possibili in corrispondenza ad ogni vettore P apprtenente all'insieme

$$V = \left\{ P \mid \sum_{1}^{n}{}_{i} P_i = 1; \quad P \geq 0 \right\}$$

Allora per il teorema fondamentale della programmazione lineare segue che esistono soluzioni ottime.

Indichiamo con $W(P)$ l'inisieme dei vettori non negativi v soluzioni del problema di minimo per $P \in V$.

Ogni insieme $W(P)$ è non vuoto, limitato e convesso e non contiene il vettore $v = 0$

Consideriamo la corrispondenza (i)

$$\text{(i)} \quad P = \frac{1}{\sum_{1}^{n} v_i} v$$

Con la corrispondenza (i) associamo ad ogni $v \in$ a uno dei $W(P)$ ottenuto sostituendo un $P \in V$ nel problema 2) - un insieme convesso $F(P)$ di punti $P \in V$

La corrispondenza da $P \in V \longrightarrow F(P)$ risulta essere un'applicazione semi-continua superiormente dell'insieme V in se stesso.

Si ricorda la definizione di applicazione s.c.s.

siano $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $W(P) \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia f una funzione multivoca da V in W, ossia una funzione che associa ad $\forall P \in V$ un sottoinsieme $f(P) \subseteq W$.

Diremo che f è semi-continua superiormente se, data una successione $\{P_k\}$ in V, con $\lim_{k\to\infty} P_k = \bar{P} \in V$, e, data una successione $\{v_k\}$ in W con $v_k \in f(P_k)$ e $\lim_{k\to\infty} v_k = \bar{v} \in W$, si ha : $\bar{v} \in f(\bar{P})$.

Dimostriamo così la semi-continuità superiore

Sia $\{P_k\}$ la successione di $P \in V$ tale che

$\lim_{k \to \infty} P_k = \bar{P} \in V$

Sia $\{v_k\}$ una successione ottenuta estraendo da ogni $W(P_k)$ un elemento v_k.

Consideriamo l'insieme $W = \bigcup_{1}^{\infty}{}_k W(P_k)$

W è un insieme limitato

Indichiamo con $\bar{W}$ la chiusura di tale insieme.

La successione $\{v_k\}$ per come è fatta risulterà contenuta in $\bar{W}$ e per il teorema di Bolzano - Weierstrass possiamo sicuramente riuscire a estrarre dalla successione $\{v_k\}$ una sottosuccessione convergente a un punto $\bar{v} \in \bar{W}$, ossia

$$v_{h_k} \to \bar{v} \in \bar{W}$$

Dobbiamo dimostrare che $\bar{v} \in \bar{W}$

Si verifica che $\bar{v}$ soddisfa i vincoli del problema di minimo

$$2) \begin{cases} \min \quad vS \\ vC \geq P \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Per provare che verifica :

$$\min \quad vS$$

consideriamo il problema 1) di massimo

$$1)\begin{cases} \max \quad Py \\ Cy \leq S \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Poichè il problema di minimo ammette soluzioni per $\forall\, P \in V$, per il teorema forte di dualità possiamo garantire che il problema di max ammette soluzione per $\forall P_k \in \{P_k\}$.

La soluzione y del problema di max può essere scelta in un insieme finito G di vettori.

Indichiamo con y_k una soluzione del problema 1) .

Poichè la $\{y_k\}$ può assumere solo un numero finito di valori esisterà una sua sottosuccessione $\{y_{h_k}\}$ che assuma difinitivamente lo stesso valore .

Sia $\lim\limits_{k \to \infty} y_{h_k} = \bar{y}$

Ma poichè vale il teorema forte di dualità,

è :

$$P_{h_k} y_{h_k} = v_{h_k} S \qquad \text{per ogni } h_k \text{ fissato}$$

e infine, per la continuità di ambo i membri, è:

$$\bar{P}\bar{y} = \bar{v}S$$

Ma allora, poichè $\bar{v}$ verifica

$$\begin{cases} \bar{v}C \geqslant \bar{P} \\ \bar{v} \geqslant 0 \end{cases}$$

allora $\bar{v} \in W(\bar{P}) \Longrightarrow \bar{v} \in W$.

Siamo riusciti a costruire una successione $\{P_k\}$ e una successione $\{v_k\}$ con i requisiti richiesti dalla definzione di applicazione s.c.s.

Notiamo infine che l'applicazione

$$\text{(i)} \qquad P = \frac{1}{\sum_{1}^{m} {}_i v_i} v$$

è continua,e quindi l'applicazione prodotto:

$$P \xrightarrow{f} W(P) \longrightarrow F(P)$$

risulta ancora essere s.c.s.

E' possibile applicare il teorema di Kakutani all'insieme V, cheèchiuso, limitato e convesso, e affermare quindi l'esistenza di almeno un punto fisso $P^* \in F(P^*)$.

Questo vettore e i corrispondenti vettori ottimali y^* e v^* soddisfano simultaneamente le (a) (b) (i).

Tenendo conto di note proprietà della programmazione lineare, si ha inoltre che essi soddisfano sia la (d), sia le condizioni addizionali (e) e (f).

In conclusione si può affermare che i vettori P^*, v^*, y^* e il numero $r^* = \sum_{1}^{n} i v_i^*$ soddisfano simultaneamente tutte le condizioni da (a) a (g), costituiscono cioè una soluzione economicamente significativa del modello walrasiano di accumulazione.

E' utile notare che il saggio di interesse e almeno un elemento di ogni vettore sono strettamente positivi.

A conclusione di questi cenni ci sembra doveroso ricordare ancora una volta che, partendo da alcune indicazioni non completamente formalizzate nei lavori esistenti in letteratura, si è fatto qui un tentativo di ricostruzione formale rigorosa dell'apparato dimostrativo del modello di ZAghini, giungendo ad una dimostrazione della tesi con procedure rigorosamente matematiche.

Da ultimo ci pare utile ricordare uno dei particolari filoni lungo i quali si è sviluppata l'analisi del modello walrasiano di accumulazione pura di capitale.

Tale filone è quello nel quale si inserisocono i modelli di Morischima e Debreu, che, sfruttando il teorema del punto fisso di Brouwer, garantiscono anch'essi l'esistenza di soluzioni aventi significato economico.

CAPITOLO I

1.1 Zaghini propose per la prima volta all'attenzione degli economisti il suo modello di accumulazione pura di capitale in una pubblicazione del 1968: "Il problema dell'esistenza di soluzioni economicamente significative nel modello Walrasiano di accumulazione".

Questo articolo scaturiva da una attenta analisi dell'autore del modello, sempre di accumulazione, proposto da L. Walras nel suo trattato "Elements d'economie politique pure ou thèorie de la richesse sociale", pubblicato nel 1926.

Si ritiene utile fornire qui di seguito le motivazioni da cui ha preso spunto la critica dell'autore di tale modello formulato da Walras: riassumeremo perciò il contenuto delle sue numerose pubblicazioni su questo argomento.

1.2 Importanza del problema dell'esistenza di soluzioni accettabili.

"La teoria Walrasiana è in primo luogo, ed essenzialmente un tentativo di rappresentare in un quadro unitario e coerente tutto il mondo economico.

Il suo primo ed essenziale passo consiste nella individuazione di due categorie di elementi nettamente distinti: quelli che devono essere spiegati dalla teoria, e quelli che, pure essendo rilevanti per la teoria non sono da essa determinati.

I primi sono le variabili o incognite del problema, rappresentanti i fenomeni economici, i secondi sono i parametri o dati.

L'idea centrale degli "Eléments d'économie politique pure" è che tutti i fenomeni economici devono essere determinati simultaneamente dall'interno del sistema. Il secondo passo consiste quindi nella individuazione delle forze, generate dall'interno del sistema, in grado di determinare tutti gli elementi di carattere economico.

Da che cosa dipendono queste forze? Esse sono riportate all'azione dei singoli soggetti appartenenti al sistema e alle condizioni che ne garantiscono la mutua compatibilità.

Inoltre queste forze sono rappresentate attraverso un sistema di vincoli che legano variabili e dati. Tali vincoli sono a loro volta rappresentati sotto forma di equazioni.

In base al presupposto che per determinare le variabili sia necessario un numero eguale di equazioni il compito principale diventa allora quello di mostrare come sia possibile, in base al ragionamento economico, scrivere un numero di equazioni uguale al numero complessivo delle variabili.

Questo scopo è realizzato attraverso approssimazioni successive passando dal caso più semplice a quelli via via più complessi per arrivare al caso più generale in cui viene determinato un numero di equazioni eguale al numero di tutti i fenomeni economici considerati.

L'equilibrio economico generale è dato dall'insieme dei valori delle variabili che soddisfano simultaneamente tutte le equazioni.

Walras più di ogni altro economista ha avuto la percezione dell'unità del processo economico e il suo principale contributo consiste proprio nel aver dato una forma precisa a questa intuizione della mutua interdipendenza di tutti i fenomeni economici".

1. 3 La Critica

Molto tempo dopo l'enunciazione della teoria dell'equilibrio economico generale e quasi contempo raneamente, vari economisti trovarono che essa in alcuni casi non era in grado di fornire alcuna soluzione, e in altri invece forniva soluzioni non aventi significato economico.

Ma il risultato più importante e fondamentale a cui si pervenne fu che l'analisi dell'equilibrio economico generale non può esaurirsi nel confronto del numero delle equazioni con il numero delle incognite.

In altri termini si capì che l'uguaglianza fra il numero delle equazioni e quello delle variabili non garantisce affatto che lo schema definisca un equilibrio e che in più questo equilibrio abbia significato economico.

Ciò deriva in via di principio dal fatto che questa eguaglianza non può in alcun modo assicurarci che non si siano commesse incoerenze nella costruzione dello schema. Infatti se, ad esempio, due equa zioni rappresentano due condizioni contraddittorie, non riusciamo sicuramente a scoprire questa incoerenza logica confrontando il numero delle equazioni con quello delle variabili.

Noi vogliamo garantire la coerenza del modello e per fare ciò dobbiamo dimostrare esplicitamente che se esso possiede soluzioni, queste sono significative economicamente.

Zaghini nei suoi saggi si pone dapprima il problema della determinatezza, cioè la dimostrazione dell'eguaglianza del numero dei vincoli e di quello delle variabili. Il superamento di questa prima "impasse" equivale alla determinazione delle forze che dovrebbero determinare l'equilibrio: egli cerca praticamente la traduzione in termini matematici della particolare visione che ha del processo economico.

A questa prima fase che è quella in cui si dà semplicemente un abbozzo del modello, segue poi quella in cui si esaminano le capacità del modello di definire effettivamente una posizione di equilibrio che abbia i requisiti richiesti.

1.4 <u>Il modello economico</u>.

E' utile specificare a chiare lettere cosa si intende per "modello economico".

(...)"In generale un modello è costituito da un insieme di relazioni, ricavate in base a certe ipotesi, fra i dati e le variabili. I valori di equilibrio delle variabili sono determinati dai dati e dalle relazioni che legano variabili e dati. Allora la dimostrazione dell'esistenza o meno di soluzioni economicamente significative si basa sulla individuazione delle condizioni necessarie e sufficienti che devono essere soddisfatte dai dati e dalle suddette relazioni affinchè i valori di equilibrio delle variabili siano economicamente accettabili.

Un modello è accettabile in quanto costruzione compiuta e coerente, se le condizioni da imporre sui dati e sulle relazioni sono accettabili ed è, tanto più generale quanto più generali sono tali condizioni.

Questo tipo di analisi è particolarmente importante in economia dove è molto difficile e spesso impossibile ricorrere all'esperimento per confutare una teoria. Esso infatti fornisce un primo valido criterio di scelta dei modelli permettendo di eliminare,come logicamente scorretti, quei modelli che possono fornire informazioni non significative sulle variabili in corrispondenza a valori significativi dei dati".

Si è detto in precedenza che molti autori misero in discussione la capacità della teoria walrasiana di definire un equilibrio.

Con lo sviluppo della programmazione lineare e della teoria dei giochi vari autori hanno considerato nuovamente questo problema.

Zaghini, come avremmo modo di sottolineare farà uso dei concetti basilari della programmazione lineare nella formulazione del suo modello.

Come tutti gli altri studiosi Zaghini parte da una assunzione fondamentale che è quella per cui in generale lo schema walrasiano non può essere rappresentato esclusivamente da equazioni.

Alcuni gruppi di egualianze devono essere sostituiti da gruppi di diseguaglianze e inoltre devono essere aggiunte ulteriori condizioni.

Naturalmente a tutte le modifiche rapportate al sistema originario egli è stato in grado di attribuire un preciso significato economico.

La critica di Zaghini muove da una ragione ben precisa: il fatto che in tutte le riformulazioni dell'equilibrio economico generale gli autori si siano limitati a considerare lo scambio, oppure lo scambio e la riproduzione, tralasciando completamente il fenomeno dell'<u>accumulazione</u>: Zaghini mette in luce che, così facendo, essi hanno trascurato la peculiare natura dei beni capitali, che è quella di essere dei fattori producibili.

Negli anni '63-65 si è accesa in Italia una vivace discussione in merito a questo particolare aspetto dello schema walraaiano: questo perchè alcuni autori sostenevano che il modello di accumulazione di capitale è sopradeterminato mentre dall'altra parte si sosteneva che esso è indeterminato.

Zaghini si è soffermato nei suoi numerosi saggi su questo problema: la capacità del modello walrasiano di accumulazione di capitale di definire un equilibrio economicamente significativo.

1.5 Il modello walrasiano di accumulazione.

Per studiare isolatamente il fenomeno dell'accumulazione senza pregiudicare i risultati, Zaghini pone l'ipotesi semplificatrice che esistano nel sistema solo i beni capitali propriamente detti, scartando così l'esistenza dei beni di consumo e dei fattori non riproducibili.

Il modello di Walras è costituito da 4 gruppi di equazioni:

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots\dots\dots c_{1n}y_n = S_1 \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots\dots\dots c_{2n}y_n = S_2 \\ \vdots \\ c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots\dots\dots c_{nn}y_n = S_n \end{cases}$$

(1) esprime la condizione che in equilibrio le quantità domandate dei servizi dei vari beni capitali sono eguali alle quantità offerte. Poichè caratteristica fondamentale dei beni capitali è quella di fornire servizi produttivi, è completamente realistico supporre che le offerte dei servizi dei beni ca-

pitali siano sempre uguali alle quantità inizialmen te disponibili. La quantità domandata del servizio di un bene capitale è uguale alla somma delle quantità di quel servizio impiegate nella produzione dei vari beni capitali.

Nelle (1) si indica con c_{ij} la quantità del servizio del bene capitale i-mo necessaria per la produzione di una unità del bene capitale j-mo, con y_j la quantità complessiva prodotta del bene capitale j-mo e con S_i la quantità inizialmente disponibile del bene capitale i-mo.

Il secondo gruppo di equazioni esprime la condizione concorrenziale dell'eguaglianza fra costo unitario e prezzo per ogni bene.

Indicando con $P_1 \ldots\ldots P_n$ i prezzi dei vari beni capitali e con $v_1 \ldots\ldots v_n$ i prezzi dei loro servizi si ha:

$$
(2)\quad \begin{cases}
c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \dots\dots\dots + c_{1n}v_n = P_1 \\
c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \dots\dots\dots + c_{2n}v_n = P_2 \\
\vdots \\
c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \dots\dots\dots + c_{nn}v_n = P_n
\end{cases}
$$

in cui primi membri rappresentano i costi unitari in termini dei prezzi dei servizi impiegati.

Le eguaglianze del terzo gruppo rappresentano le relazioni tra i prezzi dei beni capitali e i prezzi dei loro servizi. Il prezzo di un bene capitale è eguale alla capitalizzazione del prezzo del suo servizio.

Indicando con r il saggio di interesse si ha:

$$
(3)\quad \begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{r} v_1 \\
P_2 &= \frac{1}{r} v_2 \\
&\vdots \\
P_n &= \frac{1}{r} v_n
\end{aligned}
$$

Infine vi è l'uguaglianza esprimente la condizione che il valore dei beni capitale prodotti è eguale al risparmio. Avendo eliminato dal quadro i beni di consumo, il reddito percepito dai capitalisti viene completamente risparmiato.

Poichè tale reddito è eguale al totale delle remunerazioni dei servizi dei beni capitali disponibili, si deve allora avere:

$$(4) \quad p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots \; p_m y_m = v_1 S_1 + v_2 S_2 + \ldots\ldots + v_n S_n$$

Nello scrivere le precedenti relazioni sono state implicitamente impiegate le seguenti ipotesi, fatte anche dallo stesso Walras.

a) che vi è un numero di processi produttivi eguale al numero dei beni;

b) che ogni processo produce un solo bene; viene cioè esclusa la possibilità di produrre congiuntamente più beni.

c) le quantità prodotte dei nuovi beni capitali non vengono impiegate nel periodo considerato, ma lo cominceranno a essere solo nel periodo successivo.

d) che non vi sono beni intermedi;

Zaghini ha aggiunto per semplicità l'ipotesi

e) che i beni capitali non si logorino ; assunzione che eliminerà in seguito.

Puntualizziamo quali sono le incognite nel modello walrasiano definito dalle equazioni

(1) (2) (3) (4)

Esse sono i prezzi dei beni capitali e dei corrispondenti servizi, le quantità prodotte dei beni capitali e il saggio di interesse.

I dati sono i coefficienti di produzione c_{ij} rappresentanti la tecnologia e le quantità disponibili dei vari beni capitali S_i .

Poichè i c_{ij} hanno significato economico, essi devono soddisfare la condizione

$$c_{ij} \geq 0 \qquad\qquad \begin{array}{l} i = 1 \ldots\ldots\ldots n \\ j = 1 \ldots\ldots\ldots n \end{array}$$

che sintetizza il fatto che il servizio di un bene capitale o entra $(c > 0)$ o non entra $(c = 0)$ nella produzione di un qualunque bene capitale; matematicamente esprimiamo questa condizione dicendo che la matrice C della tecnica è <u>irriducibile</u> (nota 1).

Per quanto concerne la quantità inizialmente disponibili S_i dei vari beni capitali e quindi dei servizi, si supporrà che esse siano non negative; potremmo anzi addirittura affermare che esse siano positive;

$$S_i > 0$$

Infatti se un bene capitale non fosse disponibile: $S_i = 0$ sarebbero automaticamente nulle le produzioni dei beni per i quali il servizio di quel bene capitale fosse necessario.

A questo punto sorge il problema: queste restrizioni assolutamente generali sui dati

$$(*)\begin{cases} c_{ij} \geq 0 & i = 1 \ldots\ldots\ldots n \\ s_i > 0 & j = 1 \ldots\ldots\ldots n \end{cases}$$

sono in grado di garantirci valori economicamente significativi per le variabili ?

Sostituiamo le (3) nelle (2): otteniamo il sistema

$$(**)\begin{cases} c_{11}v_1 + \ldots\ldots\ldots + c_{1n}v_n = \frac{1}{r}\, v_1 \\ c_{21}v_1 + \ldots\ldots\ldots + c_{2n}v_n = \frac{1}{r}\, v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n1}v_1 + \ldots\ldots\ldots + c_{nn}v_n = \frac{1}{r}\, v_n \end{cases}$$

che si può scrivere in forma compatta $vC = \frac{1}{r}\, v$, in cui le variabili sono rappresentate dai prezzi dei servizi-che è il vettore riga v-e dal saggio di interesse r.

L'ipotesi fatta sui coefficienti c_{ij} ci garantisce che il sistema (**) determini in maniera <u>univoca</u> i prezzi relativi dei servizi e il saggio di interesse.

Inoltre tali prezzi e tale saggio risultano essere positivi: infatti poichè C è una matrice non negativa e irriducibile, il teorema di Frobenius(nota 2) afferma che il sistema (**) possiede una soluzione costituita da un numero positivo r e da un vettore positivo v determinato a meno di una costante moltiplicativa.

Ma allora poichè

$$
(3) \qquad \begin{array}{l} P_1 = \dfrac{1}{r} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_m = \dfrac{1}{r} v_m \end{array}
$$

risulteranno positivi anche i prezzi P_i dei beni capitali.

A questo punto riconsideriamo il sistema

$$
(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots\dots\dots\, c_{1n}y_n = S_1 \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.
$$

$$(1)\quad \begin{cases} \vdots \\ c_{m11}y_1 + c_{m22}y_2 + \ldots + c_{mm}y_m = S_m \end{cases}$$

esso dovrebbe determinare le quantità prodotte dei beni capitali: naturalmente per avere significato economico questi livelli produttivi dovrebbero essere positivi o nulli: $y_i \geqslant 0$; $i = 1, \ldots n$

Se fosse possibile dimostrare ciò, avremmo dimostrato che il modello walrasiano di accumulazione possiede sempre soluzioni economicamente significative.

Queste eventuali soluzioni che soddisfano (1), (2), e (3), soddisfano anche la (4).

A questo punto avremmo concluso l'analisi riguardante la coerenza interna del modello walrasiasiano di accumulazione, perchè avremmo dimostrato che esso possiede sempre soluzioni economicamente significative.

La critica mossa al modello da tutti gli studiosi parte proprio dal fatto che il risultato auspicato non si può garantire a meno di supporre "a priori" che tra i coefficienti di produzione c_{ij} e le quantità date S_i dei beni capitali esistano certe speciali relazioni, che priverebbero questo modello di qualsiasi generalità.

Analizziamo che cosa provoca il fatto che il sistema (1) fornisca delle soluzioni che contengono valori negativi, non avente cioè significato economico.

Nel modello considerato si è detto che sia la tecnologia $C = (c_{ij})$, sia le quantità inizialmente disponibili dei beni capitali S_i, e quindi dei servizi, sono date.

Data la tecnologia, rimane completamente determinate l'insieme di tutte le proporzioni in cui è possibile impiegare completamente i servizi.

Bisogna a questo punto soffermarsi sul fatto che le proporzioni in cui sono date le quantità inizialmente disponibili S_i dei servizi possono essere qualsiasi, e può accadere che tali quantità non rientrino nel suddetto insieme.

Questa "impasse" si traduce in termini economici nel fatto che qualche servizio risulta essere tecnologicamente sovrabbondante, nel senso che non esiste alcuna combinazione economicamente accettabile dei livelli produttivi che possa permettere la sua completa utilizzazione.

A questo punto, l'insistenza sulle condizioni di uguaglianza del sistema (1)

$$(1) \begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots\dots\dots c_{1n}y_n = S_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots\dots\dots c_{nn}y_n = S_n \end{cases}$$

porterebbe soltanto a costringere il sistema a fornire una soluzione solo dal punto formale, valida matematicamente, ma assolutamente insignificante dal punto di vista economico, perchè conterrebbe alcuni livelli di produzione negativi: $y_i < 0$.

Focalizziamo il nostro problema con la simbologia matematica: cerchiamo di determinare un vettore y dei livelli produttivi tale che

$$y > 0$$

si intuisce che, per non perdere di generalità ma tenendo anche conto della situazione in cui non vi è completo utilizzo di tutti i servizi disponibili, si dovrà riformulare il modello walrasiano di accumulazione con qualche modifica.

Zaghini sottolinea il fatto che questa esigenza scaturisce dal fatto che le quantità iniziali dei servizi sono date <u>in maniera indipendente dalla tecnologia</u>: per dare una traduzione matematica di quanto detto potremmo dire che le S_i sono assegnate a prescindere dall'azione delle funzioni di domanda dei beni di consumo (nota 3).

In ogni caso, sarà sempre utile non dimenticare questa ipotesi, perchè essa ha un ruolo fondamentale in tutta la trattazione del modello.

Affinchè il sistema (1) assicuri soluzioni significative Zaghini rinuncia alle eguaglianze e le sostituisce con altrettante disuguaglianze

$$
(a)\quad \begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 \cdots\cdots\cdots + c_{1m}y_m \leq S_1 \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 \cdots\cdots\cdots + c_{2m}y_m \leq S_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 \cdots\cdots\cdots + c_{mm}y_m \leq S_m \end{cases}
$$

con l'ammissione esplicita che vi sia la possibilità che la quantità disponibile di qualche servizio sia superiore alla quantità impiegata.

Facciamo un rapido confronto fra (1) e (a): il sistema (1) esprimeva la condizione di equilibrio fra la domanda e l'offerta dei vari servizi; con la (a) invece riconosciamo che l'offerta di un servizio può essere superiore alla domanda, anche quando il suo prezzo cade a zero.

In forma compatta esprimeremo la condizione (a) e quest'ultima con la notazione:

(a) $Cy \leqslant S$

con la relazione addizionale

(e) $\sum_{j=1}^{m} c_{ij} y_j < S_i$ allora $v_i = 0$

notiamo che a questo punto dell'analisi bisogna modificare anche le (2)

$$
(2) \begin{cases} c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \dots + c_{1n}v_n = P_1 \\ c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{2n}v_n = P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m1}v_1 + c_{m2}v_2 + \dots + c_{mn}v_n = P_m \end{cases}
$$

Infatti poichè in generale i prezzi dei beni capitali sono uguali ai valori capitalizzati dei prezzi dei servizi, il prezzo di un bene capitale è nullo se è nullo il prezzo del suo servizio.

Allora avremo che nelle (2) qualcuno dei P_i sarà tale che $P_i = 0$.

Studiamo il verso delle disuguaglianze: poichè i membri di sinistra, cioè i costi di produzione, sono in generale positivi, è evidente che le relazioni considerate non potranno essere rappresentate sempre dal segno di uguaglianza, e perquanto detto, avremo che le relazioni (2) saranno modificate nelle

$$
(b) \quad \begin{cases} c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \cdots\cdots\cdots + c_{1n}v_n \geqslant P_1 \\ c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \cdots\cdots\cdots + c_{2n}v_n \geqslant P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m1}v_1 + c_{m2}v_2 + \cdots\cdots\cdots + c_{mn}v_n \geqslant P_m \end{cases}
$$

Aggiungiamo inoltre la condizione che la quantità prodotta di un bene capitale è nulla, se il costo di produzione è superiore al prezzo.

In simboli:

$$\text{(b)} \qquad vC \geqslant P$$

$$\text{(f)} \qquad \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i > P_j \quad \text{allora} \quad y_j = 0$$

Introducendo questa modifica per il sistema (2) sorge una nuova difficoltà, in quanto dobbiamo abbandonare una condizione apparentemente essenziale della nozione walrasiana dell'equilibrio.

Infatti, consideriamo ancora per una volta le (2)

$$(2) \begin{cases} c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \dots\dots\dots + c_{1n}v_n = P_1 \\ c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \dots\dots\dots + c_{2n}v_n = P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \dots\dots\dots + c_{nn}v_n = P_n \end{cases}$$

Dal sistema (**), che abbiamo provato precedentemente, sostituendo le (3) nelle (2) si otteneva immediatamente

$$
(5) \quad
\begin{aligned}
r &= \frac{v_1}{c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \dots + c_{1n}v_1} \\
r &= \frac{v_2}{c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{2n}v_n} \\
&\vdots \\
r &= \frac{v_n}{c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \dots + c_{nn}v_n}
\end{aligned}
$$

Specifichiamo le quantità che compaiono in questi gruppi di uguglianze.

Al secondo membro troviamo i rapporti fra i prezzi dei servizi e i costi di produzione dei beni capitali.

Zaghini definisce questi rapporti "<u>Saggi di rendimento netto</u> dei beni capitali sui costi di produzione".

E' utile puntualizzare la differenza che corre fra il saggio di rendimento (dato dal rapporto fra i prezzi netti dei servizi e i costi di produzione dei corrispondenti beni capitali), e il saggio di interesse di tutta l'economia, impiegato per scontare la serie dei redditi futuri forniti dai vari beni capitali al fine di determinare i loro prezzi. "Criés au hasard" i prezzi dei servizi e il saggio di interesse, si avranno n saggi di rendimento che saranno in generale diversi fra loro, e inoltre diversi dal saggio di interesse.

E' solo <u>in equilibrio</u> che questi saggi devono soddisfare certe condizioni: il problema sta proprio nel determinare queste condizioni.

Soffermiamoci per un attimo sulle (5).

Poichè esprimono il fatto che i vari saggi di rendimento siano tutti uguali al saggio di interesse, implicano anche che tali saggi sono anche eguali fra loro.

Si capisce allora che le eguaglianze delle (2) implicano anche l'uniformità dei saggi di rendimento in tutta l'economia.

Ci rendiamo conto che la sostituzione delle (2) con le (b) non solo significa che i costi di produzione possono essere superiori ai prezzi, ma automaticamente significa anche ammettere la possibilità che in equilibrio i saggi di rendimento siano diversi.

Ma il modello walrasiano ha come ipotesi fondamentale che vi sia uniformità di saggio di rendimento, ciò che è in accordo con una situazione di concorrenza perfetta su tutti i mercati, mentre la nostra ammissione è in aperto contrasto contale ipotesi.

Ci troveremmo allora a dover ammettere che il modello walrasiano incorpora due condizioni contrad dittorie: infatti se da una parte, la condizione che le quantità iniziali dei vari beni capitali S_i siano date arbitrariamente, implica, in generale, che i saggi di rendimento siano diversi, dall'altra, l'ipotesi di concorrenza perfetta, vuole l'uniformità di tali saggi.

Allora esso in generale darebbe soluzioni non significative.

Si potrebbe muovere un'ultima obiezione, ricordando che nel caso in cui valgano le uguaglianze (1)

$$(1)\quad \begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots\cdots\cdots + c_{1n}y_n = S_1 \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots\cdots\cdots + c_{2n}y_n = S_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots\cdots\cdots + c_{nn}y_n = S_n \end{cases}$$

cioè nel caso in cui vi è pieno impiego degli stock iniziali dei vari beni capitali, il modello ha soluzioni economicamente significative con uniformità di saggi di rendimento .

Ma un modello generale, come pretende di essere quello walrasiano, non può limitarsi a considerare solo un tipo di situazione, quindi questa apparente contraddizione fra l'ipotesi di arbitrarietà delle disponibilità iniziali dei beni capitali e l'uniformità dei saggi di rendimento non può essere superata imponendo che le disponibilità dei beni capitali vengano date in modo che siano completamente utilizzate.

Per superare questo ostacolo mostreremo che nel modello walrasiano con quelle condizioni date l'ipotesi di concorrenza è compatibile con quella diversità dei saggi di rendimento, e quindi con l'ipotesi di disponibilità date dei beni capitali.

Zaghini spiega chiaramente qual è il ragionamento in base al quale si sostiene che la concorrenza perfetta implica l'uniformità dei saggi di rendimento: "In condizioni di concorrenza perfetta si deve avere l'eguaglianza dei saggi di rendimento per tutti i beni capitali, perchè in caso contrario gli investimenti avverrano solo nei beni capitali che hanno il saggio di rendimento più elevato.

Aumentando le disponibilità di questi beni capitali rispetto a quelle degli altri, i prezzi dei loro servizi diminuiranno, facendo di conseguenza diminuire i corrispondenti di saggi di rendimento.

Questo processo di riproporzionamento delle disponibilità dei vari beni capitali continua fino a quando si sia raggiunta l'uniformità di tutti i saggi di rendimento".

A questo punto Zaghini si chiede se è esatto dedurre dal suddetto ragionamento che nel modello walrasiano l'ipotesi di concorrenza è rappresentata solo ed esclusivamente dall'uniformità dei saggi di rendimento, che abbiamo definito con (5)

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
r &= \frac{v_1}{c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \dots\dots + c_{1n}v_n} \\
r &= \frac{v_2}{c_{21}v_2 + c_{22}v_2 + \dots\dots + c_{2n}v_n} \\
&\vdots \\
r &= \frac{v_n}{c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \dots\dots + c_{nn}v_n}
\end{aligned}
$$

L'economista dà una risposta negativa a questo quesito, appellandosi al fatto che vi è la possibilità di modificare le quantità disponibili dei vari beni capitali.

Ma Walras, scrivendo nel suo trattato (nota 4) che i capitali nuovi non entrino in funzione che in un periodo successivo a quello considerato", scarta automaticamente che si possa modificare queste quantità, che non solo sono date, ma sono anche immodificabili all'interno del periodo cui l'equilibrio si riferisce.

Si giunge pertanto all'importante conclusione che non vi è alcuna contraddizione fra l'ipotesi di disponibilità date di beni capitali - che implica la diversità dei saggi di rendimento - e quella di concorrenza perfetta.

1.6 Alcune precisazioni.

E' importante verificare che le modifiche apportate dal Zaghini al modello walrasiano originario non sono soltanto necessarie, ma anche sufficienti a garantire sempre soluzioni accettabili dal punto di vista economico, e che soddisfino le condizioni poste.

Allora potremo affermare che il modello è coerente e che le forze in gioco sono in grado di definire una posizione di equilibrio.

La dimostrazione che segue metterà in luce questo fatto, e sarà utile anticipare che la situazione di equilibrio non è "banale", nel senso che tutti i valori di equilibrio delle variabili sono nulli.

NOTE AL CAPITOLO I

1) Definizione di decomponibilità di una matrice.

Consideriamo una matrice $A = (a_{ij})$, tale che sia: $(n \times n) > 0, \neq 0$.

Consideriamo una permutazione dell'insieme dei numeri posititvi $1, 2, \ldots\ldots n$; per ogni permutazione consideriamo la matrice ottenuta dalla A riordinando le righe e le colonne secondo l'ordine indicato dalla permutazione.

Definiamo la matrice A decomponibile se è possibile trovare una permutazione tale da trasformare la matrice A nella seguente forma:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

con A_{11} matrice quadrata $(s \times s)$, con $s < n$, A_{12} oppure A_{21} matrici con elementi tutti nulli.

Se l'operazione sopra descritta non è possibile, allora la matrice A (a_{ij}) è definita <u>indecomponibile</u>.

2) Per enunciare il teorema di Perron - Frobenius, ci servono le seguenti definizioni:

<u>Def.</u>: se V e V' sono due spazi vettoriali, un omomorfismo di spazi vettoriali di V in V', o una applicazione lineare di V in V', è una applicazione tale che per ogni $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2 \in V$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

i) $L(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = L(\underline{v}_1) + L(\underline{v}_2)$

ii) $L(x\,\underline{v}) = x\,L(\underline{v})$

<u>Definizione</u>: un omomorfismo di V in V stesso si dice endomofismo di V.

<u>Definizione</u>: sia L un endomorfismo di uno spazio vettoriale V , di dimensione finita $n>0$, su un campo K:

i) si dice <u>autovettore</u> o vettore proprio, o vettore caratteristico dell'endomorfismo L un vettore non nullo $v \in V$ tale che esista uno scalare $\lambda \in K$

per cui risulti $L(\underline{v}) = \lambda v$.

Lo scalare λ si dice allora <u>autovalore</u> o valore proprio o valore caratteristico di L associato all'autovettore v.

ii) uno scalare $\lambda \in K$ si dice autovalore dell'endomorfismo L se esiste un vettore $v \in V^n$ non nullo e tale che sia $L(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$. Ogni tale vettore $\underline{v}$ si dice allora autovettore di L associato all'autovalore λ.

<u>Corollario</u>: sia $L \in End(V^n)$ si ha:

i) un autovettore di L è associato ad unico autovalore di L.

ii) se λ è un autovalore di L e v è un autovettore adesso associato, sono autovettori associati al medesimo autovalore tutti i vettori del tipo Kv con $K = \lambda\alpha$.

<u>Teorema di Perron e Frobenius</u> : Consideriamo una

matrice A : (n x n), $\geqslant 0, \neq 0$, indecomponibile.

Sussistono le seguenti proprietà:

a) A possiede un autovalore $\lambda^* > 0$ a cui saranno associati autovettori destri e sinistri, rispettivamente x^* e y^*, strettamente positivi.

Inoltre ogni qualvolta si verificano le relazioni: $A x^{(1)} = \lambda^* x^{(1)}$, e $y^{(1)} A = \lambda^* y^{(1)}$, con $x^{(1)} \geqslant 0, \neq 0$ $y^{(1)} \geqslant 0, \neq 0$, allora sarà: $x^{(1)} = t\, x^*$; $y^{(1)} = s\, y^*$ con $t, s > 0$.

b) sarà: $\lambda^* \geqslant |\lambda|$, dove λ è un qualsiasi autovalore di A diverso da λ^*

c) A nessun altro autovalore di A (a_{ij}) eccetto λ^* sono associati autovettori non negativi, non nulli.

<u>Lemma 1)</u> : sia $x \geqslant 0$ un n-vettore riga. Allora $A x = 0 \Rightarrow x = 0$

<u>Lemma 2)</u> : $\exists\, \lambda^* > 0$ Tale che $A x^* = \lambda^* x^*$ con $x^* \geqslant 0, \neq 0$

<u>corollario</u>: sia B una matrice reale (n x n) tale che $0 \leqslant B \leqslant A$ e K un autovalore di B. Allora sarà: $|K| \leqslant \lambda^*$. Inoltre $K = \lambda^*$ implica necessaria-

mente : B = A .

3) Funzioni di domanda .

Ricordiamo che nella trattazione walrasiana da una parte si ha il consumatore e dall'altra l'imprenditore.

Per il consumatore viene definita la funzione di utilità, che rappresenta sinteticamente tutte le informazioni del consumatore sulle varie quantità di beni.

Se il consumatore si trova in presenza di n beni, in quantità $y_1 \ldots\ldots y_n$ e di m servizi $x_1 \ldots\ldots x_m$, la sua funzione di utilità è:

$$U = f (y_1 \ldots\ldots y_n, x_1 \ldots\ldots x_m)$$

Questa funzione è continua e possiede derivate parziali continue del primo e del secondo ordine: in generale non è unica.

Se vogliamo rappresentare la quantità del bene che sarà comprata dal consumatore, in funzione del suo prezzo, ci serviamo della curva di domanda, la cui funzione si ottiene analiticamente risolvendo il problema di massimizzazione vincolata della funzione di utilità rispetto alle incognite $y_1 \ldots y_m$, $x_1 \ldots x_m$.

4) Cfr. L. Walras, op. cit.

CAPITOLO II

2.1 DIMOSTRAZIONE DELL'ESISTENZA DI SOLUZIONI ECONOMICAMENTE SIGNIFICATIVE.

Il modello walrasiamo di accumulazione con le modifiche di cui sopra è rappresentato dalle seguenti relazioni:

a) n diseguaglianze indicanti che le quantità impiegate dei servizi devono essere inferiori o al massimo uguali alle quantità inizialmente disponibili

$$(a) \quad Cy \leqslant S$$

b) n diseguaglianze indicanti che i costi di produzione dei vari beni capitali devono essere superiori o al minimo uguali ai prezzi corrispondenti

$$(b) \quad vC \geqslant P$$

c) n eguaglianze indicanti che i prezzi dei beni capitali sono dati dai valori capitalizzati dei prezzi dei corrispondenti servizi

$$(c) \quad P = \frac{1}{r} v$$

d) un'equazione indicante che il valore complessivo dei beni capitali prodotti deve essere uguale al risparmio, ovvero, essendo stati eliminati i beni di consumo, al reddito totale

$$\text{(d)} \quad Py = vS$$

I valori di equilibrio delle variabili devono essere inoltre tali che soddisfino le condizioni addizionali:

e) se una relazione a) è soddisfatta come stretta disuguaglianza, cioè se la quantità disponibile di un servizio non è completamente utilizzata, allora il prezzo del servizio è nullo

$$\text{(e)} \quad \text{se} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} y_j < S_i \quad \text{allora } v_i = 0$$

f) se una relazione b) è soddisfatta come stretta diseguaglianza, cioè se il costo di un bene capitale è superiore al prezzo, allora la quantità prodotta di quel bene capitale è nulla

$$\text{(f)} \quad \text{se} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} v_i > P_j \quad \text{allora } y_j = 0$$

Riassumiamo quanto detto precedentemente sulle grandezze in gioco nella tabella

DATI	INCOGNITE
$C = (c_{ij})$ matrice tecnica, quadrata, irriducibile con $c_{ij} \geq 0$	Prezzi dei beni capitali p_i $i = 1,\ldots\ldots n$ $\underline{p}$ vettore riga
$s_i > 0$ quantità disponibili dei beni capitali $\underline{s}$ vettore colonna	Prezzi dei corrispondenti servizi dei beni capitali v_i $i = 1,\ldots\ldots n$ $\underline{v}$ vettore riga
	Quantità prodotte dei beni capitali y_i $i = 1,\ldots\ldots n$ $\underline{y}$ vettore colonna
	Saggio di interesse r

Elenchiamo qui di seguito tutte le relazioni del modello per agevolare i riferimenti a queste ultime nel corso della trattazione

(a) $Cy \leqslant S$

(b) $vC \geqslant P$

(c) $P = \frac{1}{r} v$

(d) $Py = vS$

(e) se $\sum_{1}^{n} {}_{j} c_{ij} y_j < S_i$ allora $v_i = 0$

(f) se $\sum_{1}^{m} {}_{i} c_{ij} v_i > P_j$ allora $y_j = 0$

Ricordiamo che

1) Una soluzione delle relazioni da (a) a (f) è accettabile dal punto di visto economico se $y \geqslant 0$; $v \geqslant 0$; $P \geqslant 0$; $r \geqslant 0$

2) Poichè nella nostra discussione, dal punto di vista economico, interessano soltanto i prezzi relativi, possiamo, senza perdere alcuna generalità,

determinare il livello assoluto dei prezzi imponendo che sia:

$$\sum_{1}^{m} {}_i P_i = 1$$

Il nostro vettore P perciò sarà un vettore normalizzato.

Il primo passo della dimostrazione consiste nell'esprimere la variabile $r = r(v)$.

Consideriamo a tale scopo la relazione (c)

$$\text{(c)} \quad P = \frac{1}{r} v$$

Allora $P = \frac{1}{r} \sum_{1}^{m} {}_i v_i$ (*), ma anche, per quanto esposto precedentemente:

$$\sum_{1}^{m} {}_i P_i = 1 \qquad (**)$$

Confrontando i secondi membri di (*) e (**) si ottiene facilmente:

$$\frac{1}{r} \sum_{1}^{m} {}_i v_i = 1 \Longrightarrow \sum_{1}^{m} {}_i v_i = r \qquad (***) \qquad (1) \text{nota}$$

Sostituendo questo valore di r nella (c) si ottiene:

$$\text{(i)} \qquad P = \frac{1}{\sum_{1}^{m} {}_i v_i} \underline{v}$$

La programmazione lineare ci insegna che, dato un sistema di disequazioni, è sempre possibile ricondurre la soluzione di tale sistema alla soluzione di un problema di P.L., avente come insieme di vincoli il sistema di disequazioni considerato: precisamente si risolve il problema della FASE I del metodo del simplesso (nota 2).

Nel nostro caso le relazioni

(a) $Cy \leqslant S$

(b) $vC \geqslant P$

si possono facilmente interpretare come i vincoli dei 2 problemi duali di P.L. (nota 3):

1) massimizzare Py subordinatamente a $Cy \leqslant S$ e $y \geqslant 0$

2) minimizzare vS subordinatamente a $vC \geqslant P$ e $v \geqslant 0$, ossia:

1) $\begin{cases} \max \; Py \\ Cy \leqslant S \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \min \; vS \\ vC \geqslant P \\ v \geqslant 0 \end{cases}$

Definiamo l'insieme $V = \left\{ P \ / \sum_{1}^{n} {}_i P_i = 1;\ P \geq 0 \right\}$

Poichè per ipotesi la matrice C è non negativa (nota 4) ed inoltre è tale che ogni sua colonna possiede almeno un elemento positivo, e così pure il vettore $S > 0$, allora, dato un vettore $P \in V$, gli insiemi dei vincoli (a) e (b) ammettono soluzioni possibili.

Nel modello considerato deve essere soddisfatta la relazione:

$$\text{(d)} \quad Py = vS$$

forte di dualità

il teorema ~~fondamentale~~ della P. L, afferma che data una coppia di problemi fra loro duali, come è il caso di 1) e 2), se $\bar{y}$ è una soluzione ammissibile per il primale e $\bar{v}$ è una soluzione ammissibile per il duale, e se :

$$P\bar{y} = \bar{v}S$$

allora $\bar{y}$ è una soluzione ottima per il primale e nello stesso tempo $\bar{v}$ è una soluzione ottima per il duale, e i due ottimi coincidono (nota 5).

Poichè noi ci troviamo proprio nelle condizioni auspicate dal teorema, avremo che per i 2 problemi:

$$1)\quad \begin{cases} \max Py \\ Cy \leqslant S \\ y \geqslant 0 \end{cases} \qquad\qquad 2)\quad \begin{cases} \min vS \\ vC \geqslant P \\ v \geqslant 0 \end{cases}$$

$\exists$ soluzioni ottime e queste soluzioni soddisfano

$$Cy \leqslant S \quad e \quad \sum_1^m {}_J c_{iJ} y_J < S_i \implies v_i = 0$$

$$vC \geqslant P \quad e \quad \sum_1^m {}_i c_{iJ} v_i > P_J \implies y_J = 0$$

Per provare l'esistenza delle soluzioni che soddisfano le relazioni (a),(b),(i),(d),(e),(f) operiamo in questo modo.

Il nostro scopo adesso è di risolvere per $\forall\ P \in V$ con $V = \left\{ P \mathbin{/} \sum_1^m {}_i P_i = 1;\ P \geqslant 0 \right\}$, i due problemi di massimo e di minimo che abbiamo indicato con 1) e 2).

Consideriamo dapprima l'iniseme dei vettori che risolvono il problema:

$$
2) \begin{cases} \min vS \\ vC \geq P \\ v \geq 0 \end{cases}
$$

Per trovare questo insieme di soluzioni seguiamo questo procedimento: scelto un $P \in V$ arbitrario, lo sostituiamo nel sistema:

(b) $vC \geq P$ con $v \geq 0$

Allora a questo $P \in V$ sarà associato uno o più v che risolvono il problema 2), cioè troveremo uno o più vettori v che minimizzano la funzione obiettivo:

$$
z = \sum_{i=1}^{m} v_i s_i
$$

subordinatamente ai vincoli (b).

Naturalmente queste considerazioni si possono estendere ad $\forall P \in V$.

Le proprietà della programmazione lineare ci garantiscono che per $\forall P \in V$ l'insieme W(P) dei vettori v che soddisfano il problema 2) è (un insieme) non vuoto e convesso.

Ricordiamo infatti che l'insieme dei vettori che soddisfano il sistema dei vincoli (b) è un poliedro di $\mathbb{R}^n$ che ha la caratteristica di essere un insieme convesso (nota 6).

Inoltre l'insieme $W(P)$ dei vettori soluzione è limitato: infatti è limitato inferiormente perchè deve essere $v \geqslant 0$; ma è anche limitato superiormente:

Infatti il vettore S è > 0 per ipotesi e dunque

$vS \geqslant 0 \implies \min vS \geqslant 0$

Ma il prodotto vS è vincolato a soddisfare la (d) $Py = vS$

dove $P \in V$ è limitato;

anche y è limitato perchè verifica i vincoli del problema di massimo, infatti è $Cy \leqslant S \implies Py$ è limitato.

Da queste considerazioni si ricava che anche il prodotto $v\ S$ è limitato, essendo S assegnato $\Longrightarrow$ v limitato superiormente.

Un'ultima osservazione su questo insieme : il vettore soluzione v è tale che : $v \notin W$ se $v = 0$

Infatti nel caso in cui $v = 0$ almeno una delle relazioni *

(b) $vC \geqslant P$

non è soddisfatta.

Logicamente quanto detto è valido nel caso in cui $P > 0$, perchè quando $P = 0$ nelle (b) vale il segno di uguaglianza. Noi però stiamo cercando una soluzione per il caso non banale, con $v \neq 0$, e $P \neq 0$

Consideriamo la corrispondenza

(i) $$P = \frac{1}{\sum_{1}^{m}{}_{i} v_i}\, v$$ che per comodità di notazione indicheremo con il simbolo $\boxslash$ dove v varia in un insieme $W(P)$ che abbiamo determinato per un particolare $P \in V$, con P arbitrario.

Istituendo la corrispondenza $\boxslash$ ad $\forall\, v \in W(P)$ associamo un $P \in V$.

In simboli: $v \xrightarrow{\boxslash} P$

L'insieme di vettori P immagine di v nella $\boxslash$ formano un insieme convesso $F(P)$ di punti $P \in V$.

Verifichiamo questa affermazione:

a) mostriamo dapprima che i P ottenuti con la $\boxslash$ che individueremo con $P_{\boxslash}$, appartengono effettivamente a V, ossia:

$$P_{\boxslash} \in V$$

Sappiamo che tutti gli elementi $P \in V$ soddisfano la condizione:

$$\sum_{1}^{m} {}_{i} P_{i} = 1$$

Per i $P_{\boxtimes}$ si ha:

$$\sum_{1}^{m} {}_i P_{i\boxtimes} = \frac{1}{\sum_{1}^{m} {}_i v_i} \sum_{1}^{m} {}_i v_i = \frac{v_1}{\sum_{1}^{m} {}_i v_i} + \dots$$

$$+ \dots \frac{v_m}{\sum_{1}^{m} {}_i v_m} = 1$$

per cui, procedendo in questo modo, ci siamo costrui ti un'applicazione multivoca dello spazio V in sè.

E' utile notare che, istituendo la corrispondenza $\boxtimes$, Zaghini ha riproporzionato gli elementi che soddisfano il problema 2) di minimo per $\forall P \in V$, ottenendo che questi elementi vangano effettivamente a trovarsi in V.

b) verifichiamo ora che l'insieme F (P) è <u>convesso</u>.

Dalle considerazioni svolte precedentemente e dalla P.L. sappiamo che ognuno degli insiemi W (P) di vettori v che soddisfano il problema di minimo per $\forall$ $P \in V$, è un insieme convesso di soluzioni ammissibili.

Sottoponiamo per $\forall$ insieme W (P) - ottenuto ciascuno per una scelta particolare di P - tutti i vettori v tali che

$$v \in W\ (P)$$

all'applicazione:

$$\boxtimes \qquad P = \frac{1}{\sum_{1}^{m} {}_i \; v_i} \; v$$

Ci è utile ricordare la definizione di insieme convesso:

"Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è convesso se e solo se contiene tutte le combinazioni convesse dei suoi elementi" (nota 7).

Mentre la definizinne di combinazione convessa è la seguente:

il vettore somma : $\lambda_1 v_1 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m v_m$

si dice combinazione convessa di $v_1 \ldots\ldots v_m$ se i coefficienti λ_i sono tutti non negativi e $\sum_{1}^{m} \lambda_i = 1$

A questo punto se l'insieme F (P) è convesso detti P_1 e P_2 due elementi provenienti dalla applicazione di $\boxtimes$ a v_1 e $v_2 \in$ ad uno stesso W (P), dovrà valere:

$$\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2 \in F(P) \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Allora ricordando la

$$\boxtimes \qquad P = \frac{1}{\sum_1^m{}_i \; v_i} \; v$$

applicata ai vettori v_1 e v_2, che, per comodità di notazione, ora trascriviamo con gli indici in alto (v^1 e v^2), si ottiene :

$$\lambda \frac{v^1}{\sum_1^m{}_i \; v_i^1} + (1-\lambda) \frac{v^2}{\sum_1^m{}_i \; v_i^2}$$

ma poichè deve essere :

$$\sum_1^m{}_i \; P_i = 1 \qquad \text{si avrà:}$$

$$\sum_1^m{}_i \left(\frac{\lambda v_i^1}{\sum_1^m{}_i \; v_i^1} + (1-\lambda) \frac{v_i^2}{\sum_1^m{}_i \; v_i^2} \right) = 1$$

e questo è vero, infatti si ottiene:

$$\lambda \frac{v^1}{v^1} + (1-\lambda) \frac{v^2}{v^2} = 1$$

$\Longrightarrow$ F (P) è un insieme convesso

A questo punto Zaghini afferma che questa corrispondenza da V in se stesso è una corrispondenza che risulta essere SEMI-CONTINUA SUPERIORMENTE.

Per dimostrare questo fatto, che è il nucleo centrale del problema, procediamo come segue:
Sia $P \in V$ (P elemento arbitrario del simplesso V) (nota 8);

F associa ad $\forall$ P, per quanto abbiamo visto l'insieme dei vettori ottenuti che è stato indicato con $\Phi(P)$.

Sia $P_k \in V$, dove con $\{P_k\}$ indichiamo una successione di prezzi $\in V$ tali che

$$\lim_{k \to \infty} P_k = \bar{P} \in V,$$

mentre con P_k indichiamo uno degli elementi della successione.

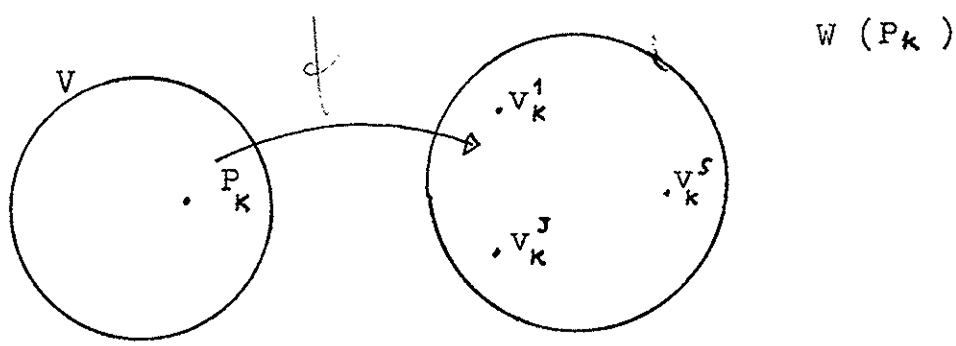
Sia $v_k \in W(P_k)$: con questa scrittura indichiamo l'elemento così ottenuto:
ad $\forall P_k \in \{P_k\}$ associamo l'insieme dei v che risol-

vono il problema di minimo.

Le proprietà della programmazione lineare ci garantiscono che $\exists$ un numero finito di soluzioni base ammissibili per il problema di minimo (nota 9).

$$\begin{cases} \min \quad vS \\ vC \geqslant P \\ v \geqslant 0 \end{cases}$$

e indichiamo con v_k l'elemento k-esimo $\in$ all'insieme dei valori che soddisfano il problema di minimo per quel particolare P_k .



L'applicazione sintetizzata in simboli si può rappresentare così:

$$P_k \longrightarrow \{v_k^j\} \qquad j = 1 \ldots\ldots s_k$$

Da $\forall$ successione (insieme) dei W (P_K) estraiamo un v_K^j, e consideriamo la successione formata da questi elementi, che indichiamo con $\{v_K\}$.

Consideriamo $\bigcup_1^{\infty} W_i$ dove W_i indica l'insieme delle soluzioni del problema di minimo per $\forall P_i \in V$.

La successione $\{v_K\}$ risulterà contenuta nell'insieme $W = \bigcup_1^{\infty} W_i$

Tale insieme W è limitato infatti;
P è limitato perchè $\in V : \left\{P \;/ \sum_1^m P_i = 1 \;;\; P \geqslant 0\right\}$ che un insieme limitato.

y è limitato superiormente perchè soddisfa ai vincoli:

$Cy \leqslant S$ e poichè C e S sono assegnati $\Longrightarrow$ y limitato.

Allora dalla relazione (d) $Py = vS \Longrightarrow v$ deve essere limitato $\Longrightarrow$ W insieme limitato poichè $v \in W$.

Dato l'insieme W consideriamo la chiusura $\overline{W}$, che è un insieme compatto $\Longrightarrow$ per il teorema di Bolzano - Weierstrass dalla successione $\{v_k\} \in \overline{W}$ possiamo estrarre una sottosuccessione convergente, ovvero:

$$(*) \qquad v_{h_k} \longrightarrow \overline{v} \in \overline{W}$$

Estraendo dalla successione di partenza la sottosuccessione (*), di indici k_h, saranno verificate l'ipotesi richieste dalla definizione di applicazione semi-continua superiormente (s. c. s.)

<u>Definizione di applicazione s. c. s.</u>

Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Sia f una funzione multivoca da U in V, ossia una funzione che associa ad ogni $u \in U$ un sottoinsieme $f(u) \subseteq V$. Diremo che f è semicontinua superiormente se, data una successione $\{u_k\}$ in U, con $\lim\limits_{k \to \infty} u_k = \overline{u} \in U$, e data una successione $\{v_k\}$ in V con $v_k \in f(u_k)$ e $\lim\limits_{k \to \infty} v_k = \overline{v} \in V$, si ha : $\overline{v} \in f(\overline{u})$.

Resta da provare allora che $\bar{v} \in W(\bar{P})$, e quindi a W.

2.2

Per le considerazioni che faremo in seguito ci conviene porre il problema di minimo sotto una forma più agevole.

Ricordando che P varia in V , consideriamo la funzione g(P) univoca, continua, così definita:

$$g(P) = P$$

Il nostro problema di minimo allora si presenterà nella forma:

$$2')\begin{cases} \min vS \\ vC \geqslant g(P) \\ v \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{equivalente a } 2)\begin{cases} \min vS \\ vC \geqslant P \\ v \geqslant 0 \end{cases}$$

Allora, poichè per quanto è stato detto, $\forall v_K$ V_{h_K} è tale che

$$v_K C \geqslant P_K$$

$$v_K \geqslant 0$$

per la continuità della funzione identità, passando al $\lim_{k \to \infty}$ si avrà:

$$\bar{v}C \geq \bar{P}$$

$$\bar{v} \geq 0$$

cioè $\bar{v}$ soddisfa anch'esso i vincoli del problema di minimo 2).

Proviamo ora che verifica

$$\min \quad vS$$

Sappiamo che il problema di minimo ammette soluzioni ammissibili per $\forall\, P \in V$.

Il problema duale di max, che trascriviamo

$$1')\begin{cases} \max \quad g(P)\, y \\ Cy \leq S \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \text{equivalente a } 1)\begin{cases} \max \quad Py \\ Cy \leq S \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni per $\forall P_k \in$ alla successione $\{P_k\}$ tale che $\lim_{k \to \infty} P_k = \bar{P}$.

Il fatto che anche il problema di max ammette soluzioni ci è garantito dal "teorema forte di dualità". (nota 10)

La soluzione y del problema di max può essere scelta in un insieme finito di vettori G.

Per affrontare correttamente questo punto sfrutteremo alcuni risultati che ci vengono forniti dall'analisi "di sensitività", o <u>analisi post-ottimale</u>".

Ricordiamo che il nostro problema di max

$$1) \qquad \begin{cases} \max \quad Py \\ Cy \leq S \\ y \geq 0 \end{cases}$$

può essere sempre ridotto ad un problema in forma canonica (nota 11).

Sfrutteremo ora il risultato che ci è fornito da un teorema sull'equilibrio, riguardante i problemi di programmazione lineare in forma canonica (nota 12).

Tale teorema ci garantisce che l'insieme delle soluzioni del problema di max dipende solo dai vincoli, e essendo i vincoli sempre gli stessi, perchè sono rappresentati da $Cy \leq S$, dove C e S son fissati, abbiamo ora che l'insieme delle y che soddisfano il problema di max non dipende dai P_i , che sono i coefficienti della funzione obiettivo, che nel nostro caso è rappresentata da $w = \sum_1^m P_i y_i$.

A questo punto ci chiediamo come otteniamo questo insieme G .

Non dobbiamo dimenticare che per risolvere il nostro problema di max noi lo abbiamo ricondotto ad un problema in forma canonica, con l'introduzione di un numero di variabili pari al numero dei vincoli, che sono rappresentati dalle disequazioni di 1).

In pratica siamo passati da un sistema

$$Cy \leq S$$

di n disequazioni in n incognite ad un sistema di n equazioni in 2n incognite (dove n sono le variabili artificiali basiche (nota 13) e

n sono le variabili non basiche).

Il nuovo sistema è :

$$C\tilde{y} = S$$

Soffermiamoci per un attimo su quanto detto.

Alla fine del procedimento noi avremo trovato una soluzione per il problema: $C\tilde{y} = S$.

A noi però interessa che la nostra soluzione soddisfi ai vincoli: $Cy \leqslant S$.

Il teorema fondamentale della P.L. ci garantisce che se un problema di P.L. in forma canonica ammette una soluzione ottima, allora ammette anche una soluzione basica ottima.

Come troviamo questa soluzione basica ottima?

In generale se i vincoli sono costituiti da n equazioni in m incognite, con $m > n$, noi esaminiamo gli mn insiemi di soluzioni basiche che abbiamo ottenuto ponendo $m - n$ delle incognite uguali a zero in tutti i possibili modi.

Fra tutti questi possibili mn vettori il vettore basico ottimale sarà l'unico che massimizza la funzione data.

Quindi con G indicheremo l'insieme di tutte le soluzioni ottime basiche del problema di max che otteniamo per $\forall P \in V$.

Il problema di max ammette un numero finito di soluzioni ottime basiche, indipendentemente dai coefficienti della funzione obiettivo e in dipendenza solo dai vincoli del problema;
le soluzioni ottime basiche sono i vertici del poliedro $Cy \leq S$ che ha sempre un numero finito di vertici.

Consideriamo ora la successione $\{y_k\}$, cioè l'insieme dei vettori in cui la funzione obiettivo raggiunge il suo valore massimo al variare di P_k in V.

Logicamente, per quanto detto, la successione $\{y_k\}$ può assumere solo un numero finito di valori, perchè varia in G .

Fra tutte le sottosuccessioni parziali che possono estrarre dalla $\{y_k\}$, che è una successione limitata, ne troveremo sicuramente una convergente all'elemento $\bar{y} \in G$ (nel senso che assume definitivamente il valore $\bar{y}$). definitivamente il [illegible]

La sottosuccessione invece la indichiamo con $\{y_{h_k}\}$.

Per come è fatta $\{y_{h_k}\}$ che soddisfa il problema di max, sarà tale che:

$$P_{h_k} y_{h_k} = v_{h_k} S \quad \text{per ogni } h_k \text{ fissato}$$

(infatti P_{h_k} è un indice opportuno scelto fra i P_k , con $\lim_{k\to\infty} P_k = \bar{P}$).

Poichè $\lim_{h_k\to\infty} y_{h_k} = \bar{y}$ allora varrà:

$$\lim_{h_k\to\infty} P_{h_k} y_{h_k} = \lim_{h_k\to\infty} v_{h_k} S$$

e infine, poichè dall'Analisi sappiamo che qualunque sottosuccessione converge allo stesso limite della successione da cui è estratta, sarà :

$$(*) \qquad \bar{P}\bar{y} = \bar{v}S$$

Poichè $\bar{y}$ verifica i vincoli

$$\begin{cases} Cy \leqslant S \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

per come è stato scelto e vale (*), e inoltre $\bar{v}$

verifica:

$$\begin{cases} \bar{v}C \geqslant \bar{P} \\ \bar{v} \geqslant 0 \end{cases}$$

allora $\bar{v} \in W(\bar{P})$. Allora poichè $\bar{v} \in W(\bar{P}) \subseteq W = \bigcup_{1}^{\infty} W(P_i) \Longrightarrow$ $\bar{v} \in W$.

Questo risultato ci è garantito dal teorema forte di dualità.

Ricordiamo la definizione di applicazione semi-continua superiormente; questa volta la esprimeremo con la simbologia coerente con la nostra:

<u>Definizione</u> :

siano $V \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad W \subseteq \mathbb{R}^n$

Sia f una funzione nultivoca da V in W , ossia una funzione che associa ad $\forall P \in V$ un sottoinsieme

$f(P) \subseteq W$.

Diremo che f è semi-continua superiormente se, data una successione $\{P_k\}$ in V , con $\lim_{k\to\infty} P_k = \bar{P} \in V$, e, data una successione $\{v_k\}$ in W con $v_k \in f(P_k)$ e $\lim_{k\to\infty} v_k = \bar{v} \in W$, si ha : $\bar{v} \in f(\bar{P})$.

Per le considerazioni fin qui svolte possiamo subito dire che la nostra applicazione, che associa ad $\forall P_k$ l'insieme dei vettori soluzione del problema di minimo, è semi-continua superiormente.

Ancora, per quanto dimostrato precedentemente, possiamo affermare che, sottoponendo gli elementi ottenuti con questa applicazione alla trasformazione :

$$\boxed{/} \qquad P = \frac{1}{\sum_{1}^{n}{}_{i} \; v_i} \; v$$

che è continua, per quanto ci garantisce un teorema sul prodotto di applicazione s. c. s., l'applicazione prodotto è anch'essa semi-continua superiormente (nota 14).

Fin qui così abbiamo dimostrato che è possibile istituire una corrispondenza semi-continua superiormente dell'insieme V in sè.

Poichè l'insieme V è un insieme chiuso, non vuoto, limitato e convesso, infatti V è un simplesso, e un simplesso gode di queste proprietà (nota 15), è possibile applicare il teorema di Kakutani, e affermare l'esistenza di almeno un punto fisso, cioè un vettore P^* tale che $P^* \in F(P^*)$ (nota 16).

<u>Teorema di Kakutani</u>: Se $P \rightarrow F(P)$ è un'applicazione semi-continua superiormente di un n- dimensionale simplesso chiuso in sè, allora esiste un $P^* \in S$ tale che $P^* \in F(P^*)$.

Allora il vettore P^* e i corrispondenti vettori ottimali y^* che ottengo risolvendo il problema di massimo:

$$\begin{cases} \max \; P^* y \\ Cy \leq S \\ y \geq 0 \end{cases}$$

e il vettore v^* che ottengo risolvendo il problema di minimo:

$$\begin{cases} \min \; vS \\ vC \geq P^* \\ v \geq 0 \end{cases}$$

soddisfano i vincoli dei 2 problemi duali di P.L. $\max P^* y$ e $\min vS$.

Per il teorema fondamentale della P.L., poichè y^* è soluzione ottima del problema primale e v^* è soluzione ottima del duale, varrà sicuramente

$$P^* y^* = v^* S$$

cioè è soddisfatta la condizione (d) e sempre per le proprietà della Programmazione Lineare, sono soddisfatte le relazioni addizionali

$$\text{(e)} \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j < S_i \qquad \text{allora} \quad v_i = 0$$

$$\text{(f)} \quad \sum_{i=1}^{m} c_{ij} v_i > P_j \qquad \text{allora} \quad y_j = 0$$

Allora i vettori P^* v^* e y^* verificano tutte le condizioni da (a) a (g);

abbiamo trovato una soluzione economicamente significativa del modello walrasiano di accumulazione.

Si noti che abbiamo determinato anche un saggio di interesse tale che

$$r^* = \sum_{1}^{m} {}_i v_i^*$$

NOTE AL CAPITOLO II

In questa parte del lavoro si troveranno oltre alle specificazioni dei passaggi matematici della dimostrazione su esposta dal punto di vista economico, anche le numerose proprietà della P.L. che sono state sfruttate nel corso della dimostrazione.

1) Nella (***) con $\sum_{1}^{n} v_i = r$ abbiamo espresso il saggio di interesse in termini di prezzi dei servizi.

2) Il problema di P.L.

$$\begin{cases} \max \; Py \\ Cy \leq S \\ y \geq 0 \end{cases}$$

è in <u>forma semplice</u> e si risolve col metodo del simplesso, perchè:

a) è un problema di massimo

b) tutte le variabili y_j $j = 1 \ldots\ldots n$ sono soggette a vincoli di non negatività.

Tutti i vincoli rimanenti sono della forma $f(y_1 \ldots\ldots\ldots y_n) \leq S$ con f lineare.

c) Tutti i termini noti sono non negativi.

Definizione: un problema di P.L. si dice in forma standard se:

a) è un problema di massimo

b) tutte le variabili sono soggette a vincoli di non negatività e vincoli rimanenti sono equazioni

c) tutti i termini noti sono non negativi.

Il primo passo verso la soluzione di un problema di P.L. consiste nel trasformarlo in forma standard.

Dato un problema generico di P.L., lo si trasforma in un problema in forma standard mediante l'aggiunta di variabili che vengono chiamate variabili artificiali.

La risoluzione di questo problema ausiliario viene detta FASE I del metodo del simplesso.

3) Dato il problema primale di P.L.

$$\begin{cases} \max Py \\ Cy \leq S \\ y \geq 0 \end{cases}$$

definiamo duale il problema:

$$\begin{cases} \min vS \\ vC \geq P \\ v \geq 0 \end{cases}$$

ottenuto con le seguenti operazioni:

Disequazioni	diventano	disequazioni
n° vincoli	"	n° variabili
n° variabili	"	n° vincoli
coeff. della f.o.	"	termini noti
termini noti	"	coeff. della f.o.
$C = (c_{ij})$	"	$C^T = (c_{ji})$
massimizzazione	"	minimizzazione

duale e se

$$c\bar{x} = \bar{u}b$$

allora $\bar{x}$ è una soluzione ottima per il primale e nello stesso tempo $\bar{u}$ è una soluzione ottima per il duale e i due ottimi coincidono.

6) <u>Definizione</u>:

Si definisce "POLIEDRO" l'intersezione di un numero finito di semispazi, dove semispazio è l'insieme dei punti y che verificano la disequazio - ne lineare: $c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \ldots\ldots\ldots + c_{im}y_n \leq S_i$

Un Poliedro $P: \{y : Cy \leq S\}$ è sempre convesso.

Vale il seguente importante teorema che mette in relazione i vertici del poliedro P con le soluzioni basi che soddisfano il problema di P.L.

<u>Teorema</u>:

I punti estremi di P sono tutte e sole le soluzioni basiche ammissibili del sistema $Cy \leq S$.

7) cfr. Rockafellar op. cit.

8) Definizione : Simplesso di dimensione n

E' un insieme di uno spazio euclideo

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \quad \text{per} \quad i = 0 \ldots\ldots n \; ; \; \sum_0^n {}_i x_i = 1 \right\}$$

9) Ad ogni base ammissibile corrisponde un veritce del Poliedro $P: \{ y : Cy \leq S \}$. Detto n il numero delle incognite e m quello dei vincoli, il numero di basi ammissibili è al più $\binom{n}{m}$

10) Vedi nota 5.

11) Si ha la seguente diefinizione.

Un sistema in cui i coefficienti di un numero di variabili pari al numero delle righe costituiscono una matrice unità si dice in "forma canonica".

Nel nostro caso otteniamo il sistema in forma canonica aggiungendo n variabili artificiali.

Dato il sistema $Cy \leq S$, diciamo che il sistema è in forma canonica rispetto alle variabili $y_1 \ldots . y_n$ se è nella forma:

$$\begin{cases} y_1 + \cdots\cdots\cdots + cy_{1,m+1} + \cdots + cy_{1,2m} = S_1 \\ y_2 + \cdots\cdots\cdots + cy_{2,m+1} + \cdots + cy_{2,2m} = S_2 \\ \quad \ddots \\ \qquad\qquad y_m + cy_{m,m+1} + \cdots + cy_{m,2m} = S_m \end{cases}$$

ossia lo portiamo nella forma : $C\tilde{y} = S$

12) Teorema sull'equilibrio canonico.

Sia $\tilde{y} = (\xi_i)$ una soluzione non negativa di $Cy = S$ e sia $v = (\eta_j)$ una soluzione di $vC \geq P$.

Allora y massimizza Py e v minimizza vS se e solo se $\xi_i = 0$ tutte le volte che $vc_i > \gamma_i$ dove $\gamma_i = P_i$

13) Vedi nota 2 .

14) Riportiamo qui di seguito due definizioni di semi-continuità superiore .

a) "Si dice che Γ è semi-continua superiormente in x_0 se per ogni aperto G contenente Γx_0 $\exists$ un intorno $U(x_0)$ tale che : $x \in U(x_0) \Longrightarrow \Gamma x \subset G$.

Si dice che Γ è semi-continua superiormente in X se è s. c. s. in ogni punto di X e se in più Γx è un insieme compatto per $\forall x$.

(cfr. C. Berge op. cit.)

b) Sia $\mathcal{R}(S)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi chiusi convessi di S .

L'applicazione punto - insieme $x \longrightarrow \phi(x) \in \mathcal{R}(S)$ di S in $\mathcal{R}(S)$ si dice semi-continua superiormente se $x_m \to x_0$, $y_m \in \phi(x_m)$ e $y_m \to y_0$ implica $y_0 \in \phi(x_0)$

(cfr. Shizuo kakutani op. cit.)

15) cfr. Rockafellar, cap. 6 , op. cit.

continua nota 14) Teorema :

Il prodotto cartesiano $\Gamma = \prod_{i=1}^{m} \Gamma_i$ di una famiglia finita di applicazioni s. c; s. di X in Y_i è un'applicazione s.c. s. di X in $Y = \prod_{i=1}^{m} Y_i$

16) Teorema di Kakutani: SE $x \to \phi(x)$ è un'applicazione semicontinua superiormente da un punto a un insieme di un simplesso S, di dimensione r chiuso, in R (S), dove R (S) è la famiglia di tutti i sot-

toinsiemi convessi chiusi di S, allora esiste un

$x^0 \in S$ tale che $x^0 \in \phi(x^0)$

Nota : il teorema di punto fisso di Brouwer è un

caso speciale del teorema di Kakutani.

TEOREMA DI BROUWER
Sia f una [illegible] definita su
un simplesso S^n e a valori in S^n, continua
allora esiste almeno un punto $x^0 \in S^n$ tale
[illegible] $f(x^0)$

CAPITOLO III

3.1 INTERPRETAZIONE DEL MECCANISMO WALRASIANO DI ACCUMULAZIONE

Acceniamo qui brevemente all'analisi svolta da Zaghini dal punto di vista strettamente economico in corrispondenza ai risultati ottenuti per via matematica.

Per mettere in luce gli aspetti più significativi dovuti al risultato matematico, Zaghini formula dapprima esplicitamente le ipotesi di comportamento che stanno alla base del modello walrasiano e mostra poi come sia possibile determinare direttamente con un ragionamento deduttivo , quelle proprietà che era stato possibile individuare in modo indiretto attraverso lo studio del problema dell'esistenza di soluzioni.

Si tenga presente che l'analisi viene condotta nell'ipotesi che esistono come fattori produttivi solo i beni capitali.

Zaghini divide i soggetti economici che operano all'interno del sistema in 2 categorie: imprenditori e capitalisti: gli uni organizzano la produzione corrente, gli altri possegono i beni capitali esistenti.

I capitalisti offrono agli imprenditori i servizi dei beni capitali posseduti e dall'altra chiedono con il reddito ricavato nuovi beni capitali.

Un'altra ipotesi fondamentale è che l'equilibrio che stiamo cercando è di tipo concorrenziale, cioè vi sia concorrenza perfetta su tutti i mercati.

Poichè le proprietà dell'equilibrio che verrà a stabilirsi dipendono dalle ipotesi che si fanno sul comportamento degli imprenditori e dei capitalisti egli formula le ulteriori ipotesi:

a) gli imprenditori si comportano in modo tale da massimizzare i loro profitti correnti.

Poichè essi non possegono i beni capitali i cui servizi sono necessari per la produzione di nuovi beni capitali, li prendono a prestito dai capitalisti; c'è inoltre l'ipotesi di perfetta trasferibilità da un settore all'altro

b) I capitalisti vengono considerati come acquirenti di nuovi beni capitali (ipotesi peraltro implicita nel modello walrasiano).

Essi richiedono nuovi beni capitali, perchè, come dice Walras, attraverso le vendite dei servizi, da questi ultimi otteniamo redditi in periodi futuri.

Allora l'ipotesi sui capitalisti è che, essi, in qualità di investitori, si comportino in modo tale da massimizzare i redditi da essi forniti.

In più Walras suppone che i profitti attesi sui nuovi beni capitali vengono calcolati dai capitalisti sulla base dei prezzi dei loro servizi correnti e Zaghini condivide la stessa ipotesi.

Per capire il meccanismo walrasiano di accumulazione supponiamo di essere nella prima fase dei "tâtonnements" con i prezzi dei servizi v, il saggio di interesse r e le quantità da produrre dei beni capitali nuovi y dati a caso, "criés au hasard".

"Nei mercati dei servizi troveremo imprenditori e capitalisti"; in questi mercati le quantità offerte sono sempre eguali alle disponibilità date, mentre le quantità domandate dipendono direttamente dalle quantità dei beni capitali che devono essere prodotte. Mentre qui gli imprenditori sono acquirenti e i capitalisti sono i venditori, nel mercato dei beni capitali nuovi accade il contrario: le funzioni degli imprenditori e dei capitalisti sono invertite.

Sono gli imprenditori che determinano i costi di produzione dei beni capitali, perchè essi conosco no sia i metodi di produzione, sia i prezzi dei servizi.

Le valutazioni dei capitalisti costituiranno i termini di confronto.

I capitalisti attribuiranno al bene capitale un valore uguale al profitto atteso su esso, dato dal valore attuale della serie infinita di redditi futuri, tutti eguali al prezzo corrente del suo servizio. Dal punto di vista dei capitalisti i beni capitali hanno quindi valori direttamente proporzionali ai prezzi dei rispettivi servizi, dove il fattore comune di proporzionalità è rappresentato dall'inverso del saggio di interesse. I suddetti valori rappresentano i prezzi di vendita dei beni capitali".

Nella dimostrazione su enunciata ricordiamo che il saggio di interesse r veniva espresso con la relazione

$$r = \sum_{1}^{n} i \, v_i$$

mediante i prezzi v_i dei servizi dei beni capitali.

Se invece vogliamo ritrovare nella dimostrazione quanto appena detto circa la relazione di proporzionalità fra i prezzi dei beni capitali e prezzi dei loro servizi, ricorderemo che questa relazione è rappresentata proprio dalla

$$(i) \quad P = \frac{1}{\sum_{1}^{m} i \; v_i} \; v_i$$

"Si consideri ora un bene capitale qualunque. Se il suo costo di produzione è superiore al valore che esso ha per i capitalisti, la sua produzione è economicamente non conveniente. Esso infatti potrebbe essere venduto solo a un prezzo eguale a quel valore.

Gli imprenditori che intendevano produrre quel bene capitale rinunceranno quindi a produrlo. Essi nella fase successiva si offriranno di produrre qualcuno dei beni capitali che nelle condizioni attuali permetterebbero un profitto massimo".

La rinuncia a produrre un bene economicamente sconveniente è rappresentata nella nostra dimostrazione dalle

(b) $vC \geqslant P$

(f) se $\sum_{1}^{n} {}_i c v_{ji} > P_j \implies y_j = 0$

"Tenderanno a spostarsi verso la produzione di questi capitali anche gli imprenditori che nella fase attuale intendevano produrre qualche bene capitale che pur essendo remunerativo non forniva tuttavia un profitto massimo. Poichè esistono solo beni capitali tutto il reddito dei capitalisti sarà offerto per ottenere beni cpaitali nuovi. Probabilmente il valore complessivo dei beni capitali nuovi sarà superiore oppure inferiore al reddito complessivo dei capitalisti. Nel primo caso il fattore di proporzionalità fra i prezzi dei beni capitali e quelli dei servzi diminuirà (il saggio di interesse aumenterà, facendo così automaticamente diminuire il prezzo unitario di ogni bene capitale e quindi il valore complessivo dei beni capitali nuovi. Il contrario avverrà nel secondo caso".

3.2 A questo punto, dopo che abbiamo individuato le direzioni in cui spingono le forze generate dalla concorrenza e dal comportamento ipotizzato degli imprenditori e dei capitalisti, descriviamo, riferendoci sempre ai risultati matematici prima ottenuti, la situazione in cui tali forze sono in equilibrio.

"Nei mercati dei servizi si avrà equilibrio quando l'offerta è non inferiore alla domanda. Nel caso però che l'offerta di un servizio risulti essere superiore alla domanda (nel caso cioè che un bene capitale risulti aovrabbondante) il suo prezzo è nullo".

Le nostre relazioni:

$$(a) \quad Cy \leqslant S$$

$$(e) \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j < s_i \implies v_i = 0$$

esprimono questa posizione.

"Per quanto riguarda gli <u>imprenditori</u> la ricerca del massimo profitto corrente e la possibilità di spostarsi da un settore all'altro, implicano:

a) che non vengono prodotti i beni capitali i cui costi di produzione sono superiori ai prezzi

b) che nessun imprenditore realizza un profitto positivo, o, in altri termini, che i beni capitali prodotti hanno prezzi uguali ai rispettivi costi di produzione.

Nel nostro modello economico le a) e b) erano espresse da

a) $\longrightarrow$

$$(b) \quad vC \geqslant P$$

$$(f) \quad \text{se } \sum_{1}^{n} c_{ij} v_i > P_j \quad \text{allora } y_j = 0$$

b) $\longrightarrow$ $(c) \quad P = \frac{1}{r} v$

Vediamo invece il significato delle (b) (f) (c) dal punto di vista dei <u>capitalisti</u>.

Abbiamo detto che i capitalisti impongono prezzi dei beni capitali proporzionali ai prezzi dei corrispondenti servizi: da ciò segue che i prezzi dei beni capitali sovrabbondanti risultano essere nulli, essendo nulli i prezzi dei loro servizi.

In generale si avrà che i costi di produzione di questi beni capitali sono in generale superiori ai prezzi, e la loro produzione non risulta essere conveniente.

Allora i beni capitali che in equilibrio sono sovrabbondanti <u>non sono prodotti</u>.

Soffermiamoci un attimo ancora sulla

$$P = \frac{1}{r} v \qquad \text{(c)}$$

Essa non soltanto esprime l'eguaglianza fra costi e prezzi dei beni capitali prodotti, ma anche l'uniformità dei saggi di rendimento sui costi per questi beni capitali.

"Il saggio di interesse coincide con il valore comune di questi saggi di rendimento. Esso risulta invece superiore ai saggi di rendimento dei beni capitali per cui i costi di produzione sono superiori ai prezzi.

Questo significa che in equilibrio il saggio di interesse è eguale al massimo saggio di rendimento.

3.3 La domanda e l'offerta

Vediamo infine il significato della

$$\text{(d)} \qquad Py = vS$$

Essa esprime il fatto considerevole che in equilibrio si ha uguaglianza fra valore complessivo dei beni capitali nuovi e reddito totale.

Abbiamo visto, nel corso della dimostrazione del cap. 2 che Zaghini ha ottenuto i suoi risultati a prescindere dalla funzioni di domanda e offerta.

Egli sopperisce alla mancanza delle funzioni attribuendo al meccanismo da lui costruito il ruolo svolto dalla domanda e dall'offerta nell'individuazione, nel periodo considerato, dei beni capitali scarsi sovrabbondanti, e dall'attribuzione di un prezzo nullo ai prezzi di questi ultimi.

Quindi sono ancora ad entrare in causa per questa ulteriore specificazione le

(a) $Cy \leq S$

(e) $\sum_{j=1}^{m} cy_{ij} < S_i$ allora $v_i = 0$

3.4 Il "clou" del problema: il saggio di rendimento uniforme.

"Il ruolo centrale è tuttavia svolto dai capitalisti sono essi infatti che, attribuendo ai beni capitali valori proporzionali ai prezzi dei loro servizi, prezzi dipendenti a loro volta dalle disponibilità date dai beni capitali stessi, fanno sì che qualsiasi sproporzione in tali disponibilità abbia la possibilità di riflettersi immediatamente sulle decisioni di produzione e quindi di investimento.

Aumentando le quantità dei beni capitali scarsi, cioè completamente utilizzati, rispetto a quelle dei beni capitali sovrabbondanti, che rimangono invece inalterate, si realizza un riproporzionamento delle disponibilità dei beni capitali favorevole alla possibilità di completa utilizzazione, nel periodo successivo, dei beni capitali che ora risultano essere sovrabbondanti.

In questo senso si manifesta pertanto nell'equilibrio uniperiodale <u>una tendenza verso una situazione di</u> uniformità dei saggi di rendimento di tutti i beni capitali. Quando si dice che la concorrenza <u>tende</u> a rendere eguali i saggi di rendimento si ha in mente iroprio questo: si deve stare attenti però a non confondere la <u>tendenza</u> con la <u>realizzazione</u> di tale uniformità".

La concorrenza tra gli imprenditori e i capitalisti, guidati dalla ricerca della massimizzazione dei profitti attesi sui nuovi investimenti, implica che siano uguali solo i saggi di rendimento dei beni capitali che sono prodotti e nei quali concretamente si realizzano gli investimenti, mentre non implica l'uguaglianza di rendimento dei beni capitali che non sono prodotti.

Si è messo in evidenza nel cap. 1 che pareva che ci fosse una contraddizione fra l'ipotesi di concorrenza perfetta e quella di disponibilità date: in effetti, alla base della disputa, sta l'erronea convinzione di credere che le condizioni di concorrenza perfetta debbano essere <u>sempre</u> espresse analiticamente attraverso l'uniformità dei saggi di rendimento di <u>tutti</u> i beni capitali, Zaghini sottolinea che tale uniformità può realizzarsi invece solo nel <u>lungo periodo</u>, dopo che le eventuali sproporzioni nelle disponibilità iniziali siano state corrette attraverso il processo di accumulazione, mentre in generale non può realizzarsi nel breve periodo, proprio a causa del fatto che le <u>quantità iniziali dei beni disponibili</u> non sono modificabili.

Quindi sostituendo i 2 gruppi di uguaglianze

$$(2)\quad \begin{cases} c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \dots\dots + c_{1n}v_n = P_1 \\ c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \dots\dots + c_{2n}v_n = P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \dots\dots + c_{nn}v_n = P_n \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{array}{l} r = \dfrac{v}{cv + cv + \dots + cv} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r = \dfrac{v}{cv + cv + \dots + cv} \end{array}$$

con le disuguaglianze

(b) $$vC \geqq P$$

nel tentativo di ricerca di condizioni atte a garantire l'esistenza di soluzioni economicamente significative, mettiamo ora in evidenza che tali disuguaglianze permettono di afferrare pienamente la natura di breve periodo del modello walrasiano.

D'altronde, anche Walras, sebbene si sia soffermato sempre sulle uguaglianze, si rese conto che l'ipotesi di disponibilità arbitrariamente date degli stock iniziali fosse incompatibile con l'uniformità dei saggi di rendimento di tutti i beni capitali.

3.5 Eliminazione di alcune ipotesi restrittive.

Nella sua trattazione Zaghini aveva posto alcune ipotesi semplificatrici: le rielencheremo qui di seguito esponendo poi le motivazioni per le quali esse si possono eliminare senza modificare peraltro i risultati ottenuti col modello di partenza.

1) Ipotesi che il servizio di ogni bene capitale entri, direttamente o indirettamente, nella produzione di tutti i beni capitali. Questa ipotesi ci garantiva che i sistemi di uguaglianze

$$(2)\quad \begin{cases} c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \ldots\ldots\ldots\ c_{1n}v_n = P_1 \\ c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \ldots\ldots\ldots\ c_{2n}v_n = P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n1}v_1 + c_{n2}v_2 + \ldots\ldots\ldots\ c_{nn}v_n = P_n \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} P_1 = \frac{1}{r}\, v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n = \frac{1}{r}\, v_n \end{cases}$$

fornissero sempre soluzioni positive nei prezzi e nel saggio di interesse.

Inoltre questi sistemi (2)e(3) ci permettevano di individuare, nel caso di sproporzioni in cui venivano assegnate le disponibilità iniziali dei vari beni capîtali, la necessità di sostituire le uguaglianze con diseguaglianze al fine di assicurare soluzioni significative.

Zaghini fa notare che se la suddetta ipotesi viene eliminata è possibile ugualemnte che i sistemi di disuguaglianze (2) e (3) non ammettano soluzioni accettabili, e ciò è assolutamente indipendente dalla circostanza che le disponibilità iniziali dei beni capitali possano oppure non possano essere completamente utilizzate.

2) <u>Ipotesi che i beni capitali siano indistruttibili, cioè non siano soggetti a logoramento</u>.

Anche questa ipotesi si può facilmente eliminare specificando, come fa lostesso Walras, l a percentuale di ogni bene capitale che viene distrutta in conseguenza del suo uso per unità di tempo.

Notiamo che introducendo l'ipotesi di logoramento di beni capitali, è necessario introdurre una condizione precisa sulla tecnologia, cioè che C sia _vitale_. Il significato economico di detta posizione sta nel fatto che se non vi è logoramento, l'esercizio dei vari processi produttivi dà luogo _sicuramente_ a quantità addizionali positive dei beni capitali mentre, quando vi è logoramento non si può escludere _a priori_ la possibilità che per produrre una unità di un certo bene capitale sia necessario consumare più di una unità di questo bene capitale. Questo caso, in cui la produzione sarebbe sconveniente, è _annullato_ dall'ipotesi di _vitalità_ sulla matrice C.

La vitalità di C implica che tale matrice tecnica sia in grado di produrre quantità positive di tutti i beni (nota 1).

3) Ipotesi più restrittiva : trascuramento dei fattori produttivi primari, e dei beni di consumo.

Per fattori produttivi primari si intendono tutti i fattori diversi dai beni capitali propriamente detti.

Si può eliminare anche tale ipotesi, ma si dovrà ricordare che da questo momento nel calcolo dei costi di produzione entreranno anche le rumenerazioni dei servizi dei fattori primari, fra cui il lavoro . Da sottolineare che con questa modifica il reddito dei vari soggetti economici ha ora due destinazioni: il risparmio, cioè l'acquisto dei beni capitali, e il consumo, cioè l'acquîsto di beni che soddisfano i bisogni dei soggetti in qualità di consumatori.

Zaghini fa notare che l'introduzione dei fattori primari e dei beni di consumo non modifica sostanzialmente l'interpretazione del modello walrasiano.

Il funzionamento del meccanismo di accumulazione rimane sostanzialmente inalterato.

"Introducendo i beni di consumo, il fatto che le quantità iniziali dei vari beni capitali possano o non possano essere completamente impiegate, dipende non soltanto dalle condizioni sulla tecnologia, ma anche dalle condizioni della domanda dei beni di consumo rappresentate dalle funzioni di domanda (......). Questo significa che le proporzioni in cui i beni di consumo sono richiesti dai consumatori possono essere diverse da quelle che sarebbero compatibili con il pieno impiego di tutti i beni capitali.

In questo modello generale walrasiano allora la necessità di sotituire le uguaglianze con le diseguaglianze dipenderà dall'autonomia delle disponibilità iniziali dei beni capitali rispetto alla tecnologia e dalla domanda dei beni di consumo.

Si noti che anche in questo caso più generale la sovrabbondanza di un bene capitale implicherà che la corrispondente relazione fra costo e prezzo di produzione: (B) $vC \geqslant P$ sia soddisfatta come disuguaglianza, ovvero , che il corrispondente saggio di rendimento sia inferiore al saggio di interesse. Questo, a sua volta implicherà che quel bene capitale non sia prodotto; ritroviamo la condizione

(f) $\sum_{1}^{m} {}_i c_{ij} v_i > P_j$ allora $y_j = 0$

e inoltre sarà così favorito il riproporzionamento della struttura produttiva rispetto alle condizioni della domanda e della tecnologia.

Abbiamo qui esaurito l'analisi della eliminazione dell'ipotesi semplificatrici.

3. 6 Un'ipotesi che resta.

Ci domandiamo ora se non è possibile, alla luce dalle considerazioni fin qui svolte, eliminare una ulteriore ipotesi che è stata posta da Zaghini nel suo modello, e cioè quella di sostituire i gruppi di uguaglianze (1) e (2) con quelli di disuguaglianze (a) e (b).

Si era visto che tale esigenza aveva preso spunto dalla necessità di assicurare soluzioni economicamente significative.

Questo scopo, spiega Zaghini, può sembrare raggiungibile ponendo l'ipotesi che sicuramente tutte le diponibilità iniziali vengono pienamente utilizzate, qualunque siano le proporzioni in cui esse siano date.

Per fare ciò, si può ammettere la variabilità, entro dei limiti ragionevoli, dei coefficienti tecnici c_{ij}.

Inoltre si può sempre supporre, che per $\forall$ bene capitale esista un bene di consumo, - sempre desiderato, un bene cioè che i consumatori sono disposti a acquistare in qualsiasi quantità a un prezzo positivo, (cfr. Dorfman, op. cit. cap. 13),- "nella produzione del quale il suo servizio può essere impiegato in qualsiasi quantità, senza che la sua produttività marginale fisica, sebbene decrescente, cada a zero".

Ma anche in questo caso, che garantisce il pieno impiego di tutti i beni capitali, Zaghini assicura che può accadere che il prezzo del bene capitale, anche se è particolarmente abbondante rispetto agli altri, può essere inferiore al suo costo di produzione, cioè la:

$$\text{(b)} \quad vC \geq P$$

continua a dover sussistere.

Si comprende che l'esigenza di ammettere la diversità dei saggi di rendimento dei beni capitali è una proprietà intrinseca e ineliminabile del modello walrasiano di accumulazione.

NOTE AL CAPITOLO III

1) Definizione di vitalità : consideriamo il sistema di equazioni : (1) $(S\ I - A)\ x = C$ dove:

$A\ (n \times n)$, $\geq 0, \neq 0$, indecomponibile; $C \geq 0$, $\neq 0$;

S reale .

Diremo che la matrice A è vitale se il sistema (1) ammette una soluzione $x > 0$, qualunque sia $C \geq 0$, $\neq 0$.

C.N.E.S. per la vitalità : la matrice $(s\ I - A)^{-1}$ esista e sia strettamente positiva.

C.N.E.S.: sarà $(s\ I - A)^{-1} > 0 \iff s > \lambda^*$

C.S. di Solow: sia s = 1 sarà $(I - A)^{-1} > 0$ se $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1\ \forall i$ con la disuguaglianza stretta per almeno un valore di i.

C.N.E.S. di Howkins -Simon: sarà $(s\ I - A)^{-1} > 0 \iff$ $\det\ (s\ I - A)_i > 0$ per $i = 1, \ldots n$.

CAPITOLO IV

Conclusione.

Rielencando i concetti salienti dell'analisi di Zaghini sul modello di accumulazione pura siamo giunti ai seguenti risultati

1) La sostituzione delle uguaglianze con disegua-glianze è sufficiente a garantire l'esistenza di soluzioni accettabili

2) La massimimizzazione da parte dei capitalisti dei profitti attesi sugli investimenti non implica l'uniformità dei saggi di rendimento sui costi di produzione per tutti i beni capitali, bensì solo per quelli nei quali si realizzano gli investimen-ti, cioè la situazione di equilibrio definita dal modello di Walras è perfettamente compatibile con la diversità dei saggi di rendimento netto sui costi.

3) In questo equilibrio di tipo uniperiodale i sag-gi di rendimento netto sui costi risultano tali da permettere di affermare che esiste una tendenza ver

so una completa uniformità di tali saggi.

4) Il saggio di interesse, in presenza di diversi saggi di rendimento, risulta essere uguale di massimo saggio di rendimento.

Ma il più importante risultato ci è stato fornito dal fatto che nel modello primario discusso da Zaghini, definito "modello di accumulazione pura" perchè è il modello in cui compaiono solo i beni capitali, riusciamo a trovare soluzioni economicamente significative.

L'importanza di ciò sta nel fatto che, questo modello, escludendo i beni di consumo, elimina completamente anche il fenomeno del consumo, ma fornendo ugualmente soluzioni significative confuta direttamente l'opinione secondo la quale le funzioni di modello walrasiano, nel senso che la loro mancanza priverebbe il modello di qualsiasi possibilità di avere posizioni di equilibrio.

In tal senso va ricordata la critica mossa dal Garegnani al modello di Zaghini, (già diffusamente esposta in un lavoro precedentemente presentato (cfr. Rossella Magaldi : "Un riesame critico dell'equilibrio economico generale") che dimostra che l'inclusione delle funzioni di domanda non modifica sostanzialmente il modello walrasiano di accumulazione pura.

Ricordiamo inotre che altri spunti di confronto possono essere forniti dai modelli walrasiani modificati proposti da Morishima, che è del tutto analogo a quello di Zaghini, e da Von Neumann, che basa la costruzione del suo modello sull'ipotesi che le difficoltà del modello walrasiano sarebbero eliminate se si potesse protarre l"equilibrio lungo una successione di periodi.

A conclusione si può dire che anche attraverso un esame matematico rigoroso del procedimento dimostrativo, rimane valida l'affermazione che il modello di Zaghini ammette sempre nelle ipotesi poste soluzioni economicamente significative.

BIBLIOGRAFIA

BERGE, C. : "Espaces topologiques; fanctions multivoques"
DUNOD, Paris, 1959

DE ANGELIS, W. : "Metodi matematici di ottimazione"
Ma Goliardica Editrice, 1979 Roma

DE ANGELIS, W. : "Ottimazione: Seminari"
La Goliardica Editrice, 1979 Roma

DEBREU, G. : "Theory of value"
Chapman e Hall, Ldt, London,1959

DORFMAN, SAMUELSON, SOLOW : "Linear Programming and Economic Analysis"
Mc Graw - Hill, Book Company, inc. New York, Toronto, London, 1958

GALE, D. : "The theory of linear economic models"
Mc Graw - Hill Book Company, inc. New York, Toronto, London, 196

GAREGNANI, P. : "Sulle equazioni walrasiane della capitalizzazione"
Giornale degli economisti, Marzo - Aprile, 1966

GAY, A. : "Esistenza e caratteristiche dell'equilibrio in modelli di tipo walrasiano". Rivista di politica economica, 1967, pagg. 1203-1239

KAKUTANI, S. : "A Generation of Brouwer's fixed point theorem" (1941) in Readings in mathematical Economics: value theory - vol. I ed Newman, P. The J. Hopkins Press - Baltimore, 1968

LAISE, D., TUCCI, M. : "Considerazioni su sistemi di equilibrio economico generale di tipo walrasiano". Giornale degli economisti e annali di economia - Gennaio - Febbraio, 1981

LIPPI, M. : "I prezzi di produzione" Ed. Il Mulino, 1979 Bologna

MORISHIMA, M. : "Equilibrium, Stability and Growth" Appendice cap. 3 Oxford University,Press, London, 1964

MORISHIMA, M. : "Walras' Economics" Cambridge University Press, Cambridge, 1977

NAPOLEONI, C. : "L'equilibrio economico generale"
Boringhieri - Torino, 1965

NAPOLEONI, C. : "Il pensiero economico del '900"
G. Einaudi, Torino, 1963

PALA, G. : "Appunti di economia matematica"
Istituto G. Castelnuovo, Roma, 1977

RICCI, G. : Analisi matematica
vol. I, II, Libreria Editrice, 1976, Milano

SIMEONE, B. : "Appunti del corso di metodi, matematici di ottimizzazione"
Istituto di calcolo delle probabilità, Università di Roma, 1980

SUCCI, F. : "Appunti di Algebra Lineare"
Ed. Veschi, Roma, 1977

TUCCI, M. : "Esercitazioni di Economia Matematica"
Istituto Matematico G. Castlnuovo.
Università di Roma, 1978

ZAGHINI, E. : "Il problema dell'esistenza di soluzioni economicamente significative nel modello walrasiano di accumulazione". In : "Prezzi relativi e distribuzione del Reddito" a cura di P. Sylos Labini - Boringhieri - Torino 1973

ZAGHINI , E. : saggi su "L'Accumulazione di Capitale nei modelli di equilibrio generale" Edizione dell'Ateneo, Roma, 1967

ZAGHINI, E. : "Sistemi di prezzi e saggio non uniforme di profitto" Giuffrè editore 1977 estratto da: saggio di economia in onore di Antonio Pesenti, a cura di Flaminio De Cindio e Paolo Sylos Labini

ZAGHINI, E. : A note di Capital Goods Durability in the walrasian theory of capital Formation and Credit Siena, 1975 by Springer-Verlag 1975

ZAGHINI, E. : Un modello di equilibrio generale non concorrenziale Rassegna economica N. 3 Maggio-Giugno 1979 Anno XLIII

ZAGHINI, E. : A lecture au price théory: Flexible tâtonnements and existen ce of solutions for Walras model of capital formation Siena, 1973

ZAGHINI, E. : "Saggi di microeconomia" Università degli Studi di Roma Edizioni dell'Ateneo, Roma

ZAGHINI, E. : Ammissibilità dell'equilibrio temporaneo nel modello walrasiano di accumulazione Rassegna Economica N. 4 Luglio-Agosto 1973 Anno XXXVII

ZAGHINI, E. : "Prezzi naturali e prezzi di mercato: un'interpretazione della teoria walrasiane di accumulazione"; Università degli Studi di Roma Edizione dell'Ateneo

WALRAS, L. : "Teoria Matematica della ricchezza sociale" Biblioteca dell'economista, serie 3, vol. 2, UTET - Torino, 1978

PICONE, M., FICHERA G. : "Analisi Matematica
vol. I, II
Veschi Editore,Roma 1967