Nota sulla "Connessione Goldbach – gemelli - Polignac"e su "Una formula più precisa per una stima logaritmica dell'N°numero primo"

Francesco Di Noto e Michele Nardelli[1]

[1]Dipartimento di Scienze della Terra – Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Largo S. Marcellino, 10 – 80138 Napoli (Italy)

La connessione tra le congetture di Goldbach, dei numeri primi gemelli e della congettura di Polignac " già trattata su SolarCNR e sul sito

http://xoomer.alice.it/stringtheory

con il titolo " Teoria dei numeri e teorie di stringa, ulteriori connessioni: congettura (teorema) di Polignac, teorema di Goldston – Yldirim e relazioni con Goldbach e numeri primi gemelli" e in un più recente lavoro "Connessione Goldbach –gemelli –Polignac" (con nota finale sulla formula per il calcolo approssimativo per l' N.° numero primo, più precisa della formula precedente N= N° · log N°) consiste essenzialmente nella constatazione che:

a) Ogni numero N $\geq$ 4 è sempre la somma di due numeri primi

p e q tali che p + q = N almeno una volta per i numeri pari N più piccoli (es. $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11 = 7 + 7$, ecc.) e G(N) volte per i numeri N pari più grandi, per es. per N = 100 si hanno già sei coppie di numeri primi (coppie di Goldbach G(100) = 6, per N= 1000 si hanno 27 coppie: G(1000) = 27, ecc. , con G(N) crescente con N anche se con piccole oscillazioni positive o negative attorno a un valore medio, ma mai con G(N) = 0, il che sarebbe un contro esempio della congettura, che, fortunatamente, si dimostra che non si verifica mai.

b) Per molti numeri pari di forma N = 12n, ma non tutti, l'ultima coppia di Goldbach (vedi esempi finali) è una coppia di numeri primi gemelli, e quindi consecutivi, per esempio:

$$5 + 7 = 12 = 12 \times 1$$

$$11 + 13 = 24 = 12 \times 2$$

$$17 + 19 = 36 = 12 \times 3$$

ma non $23 + 25 = 48 = 12 \times 4$, poiché 25 non è primo,

ma anche $29 + 31 = 60$, ecc.

Dato un numero N=12n, i due numeri $\frac{N}{2} \pm 1$ = p e q tali che p + q = N possono essere entrambi primi e quindi gemelli; oppure uno solo primo e l'altro no, oppure entrambi non primi.

c) Per tutti gli altri numeri pari N, di forma diversa da 12n e per tutti gli altri numeri pari di forma 12n ma non somma di due numeri primi gemelli, per es. $48 = 23 + 25$ con solo 23 numero primo, l'ultima coppia di Goldbach è anche una coppia di Polignac, cioè una coppia di numeri primi consecutivi (a differenza della altre precedenti coppie di Goldbach per lo stesso N) con differenza $D = q - p = 2n$, anziché solo $2 = 2\times1$ per i numeri primi gemelli, che hanno la differenza minima possibile. Si trova che la differenza $D = q - p = 2n$ (e cioè un numero pari, come tutte le differenze tra due numeri primi e quindi dispari) è rara fino a 10^{2n}, poi si ripete infinite volte per numeri N più grandi di 10^{2n}; mentre la differenza più piccola, $D = 2^1 = 2$, si trova già da prima di $10^1 = 10$ con le coppie di gemelli 3 e 5; 5 e 7, per ripetersi infinite volte al crescere di N; per $N = 10^{2n} = 10^{14} = 10^{2*7}$, la differenza $D = 2n = 2 \times 7 = 14$ si ripete infinite volte a partire da $N = 10^7$, mentre per N minori essa è rara.

Tale connessione Goldbach – gemelli – Polignac ci potrebbe dire qualcosa in più sulla distribuzione dei numeri primi (oltre alla verità delle tre congetture), per esempio che le coppie di Polignac con D = 2n sono infinite ma solo a partire da $N = 10^{2n}$. La distribuzione dei numeri primi è molto importante nell'ipotesi di Riemann, ancora non dimostrata, e potrebbe contribuire in qualche modo alla sua dimostrazione. Ecco quindi che la suddetta connessione Goldbach – gemelli – Polignac, se approfondita ulteriormente anche in base ai nostri risultati, potrebbe in futuro avere la sua importanza in tal senso (eventuale utilità per dimostrare l'ipotesi di Riemann).

Nota. Esempio di costruzione delle coppie di Goldabch per un dato Numero pari N, per es. 20, scrivendo in due colonne i numeri dispari complementari tali che la loro somma sia 20, ed evidenziando le coppie in cui entrambi i numeri sono primi:

p + q = N

1 + 19 = 20

3 + 17 " = prima coppia di Goldbach

5 + 15 "

7 + 13 " = seconda ed ultima coppia di Goldbach

(=coppia di Polignac per D = 6 = q-p)

9 + 11 "

Per N = 20 , G(20) = 2

Esempio di coppie di Goldbach di cui l'ultima è una coppia di numeri primi gemelli (e di Polignac) con D = 2, per $N = 12 \times 2 = 24$:

p	+	q	= 24	
1	+	23	"	
3	+	21	"	= prima coppia di Goldbach
5	+	19	"	
7	+	17	"	= seconda coppia di Goldbach
9	+	15	"	
11	+	13	"	= terza ed ultima coppia di Goldbach = coppia di Polignac con $D = 2 = q - p$ Per N = 24, G(24) = 3

Per i numeri N multipli di 6 e ancor più di 12, il numero delle coppie di Goldbach è più elevato rispetto ai numeri pari vicini ma di forma diversa ($N = 6n \pm 2$, $12n \pm 2$) per precisi motivi descritti nel capitolo "Andamento ciclico del numero G(N) delle coppie di Goldbach" del lavoro "Connessione Goldbach – gemelli – Polignac") citato all'inizio, e al quale rimandiamo gli interessati.

UNA FORMULA PIU' PRECISA PER UNA STIMA LOGARITMICA DELL' N° NUMERO PRIMO

(Relazione tra i numeri correttori c' e il numero di Legendre $c = 1,08366$, che già corregge la stima di π (N))

(Relazione N° $\simeq \pi(N)$)

La funzione p_j, com'è noto, è la funzione o la formula, peraltro ancora da scoprire, per il calcolo dell'j- esimo numero primo, in altre parole la cosiddetta "formula dei numeri primi".

Poiché, come già lo stesso Legendre dimostrò, non esiste nessuna funzione algebrica razionale che fornisce sempre numeri primi, tale funzione darà sempre risultati più o meno approssimativi, come del resto anche tutte le altre formule per la stima di diversi conteggi riguardanti i numeri primi, per esempio la funzione $\pi(N)$, ma anche, come accenneremo alla fine, del numero di coppie di gemelli fino a N o il numero delle coppie di Goldbach per N pari, specialmente di tipo $N = 10^n$. Una di queste formule per la funzione $\pi(N)$ è dovuta com'è noto, proprio a Legendre (2) e fornisce risultati migliori di quelli dati dalla formula analoga di Gauss (1):

$$\pi(N) = N / \log N \qquad (1)$$

$$\pi(N) = N / (\log N - 1{,}08366) \qquad (2)$$

dove 1,08366 = c è proprio il nostro numero correttore di Legendre, e non solo per le suddette formule, ma ora anche per la nostra proposta di funzione P_j. Per le formule di cui sopra, per esempio,

per N = 10.000:

$$N/\log N = 1086$$

$$N / (\log N - 1{,}08366) = 1230{,}5 \sim 1229$$

$$\pi(N) = 1229$$

per N = 100.000:

$$N/\log N = 8686$$

$$N/(\log N - 1{,}08366) = 9588 \sim 9592$$

$$\pi(N) = 9592$$

Come si può vedere dalle apposite tabelle pubblicate su Internet, i valori ottenuti con la formula di Legendre sono molto più vicini ai valori reali di π (N) che quelli ottenuti dalla più semplice ma meno precisa formula di Gauss (al quale non piaceva il numero di Legendre…).

Ma torniamo alla nostra funzione per il calcolo approssimativo dell' N° numero primo, che chiameremo più semplicemente N anziché N° oppure p_j.

Una delle conseguenze del Teorema dei Numeri Primi (che i matematici indicano più brevemente con TNP) è che N ~ N log N. John Derbyshire nel suo recente e ottimo libro "L'ossessione dei numeri primi"(Bollati Boringhieri Ed.), scrive che (pag.64) :

" …Ora, se il TNP è vero, C = K/log K, e dunque l'N-esimo numero primo è proprio dalle parti di NK: (K/log K), ovvero intorno a N log K. Dal momento che la maggior parte dei numeri primi dell'intervallo è dell'ordine di grandezza di K, posso scambiare tra loro K ed N, e dunque l'N – esimo numero primo è ~ N log N. Tutto questo sembra sospetto, ma in realtà non si tratta di una stima sbagliata, e permette di ottenere via via risultati proporzionalmente migliori sulla base del principio della tilde.
Predice, per esempio, che il trilionesimo numero primo sarà 27 631 021 115 929, in effetti il trilionesimo numero primo è **30 019 171 804 121** con un errore dell'8 per cento.
Gli errori percentuali a mille, un milione e un miliardo sono 13, 10, e 9 "
Ricordiamo che:

10^{12} 27,631… **27 631 021 115 929; 30 019 171 804 121 1,08643005548**

Ora, essendo il numero di Legendre c = 1,08366, moltiplicare un numero qualsiasi per 1,08366 significa aumentarlo dell' 8 per cento circa e quindi correggerlo di un errore per difetto di tale entità, e questo è proprio il nostro caso, sebbene particolare (in generale è un po' diverso, come vedremo in seguito),

Infatti, moltiplicando il numero N stimato (Ns) come trilionesimo numero primo, per il numero di Legendre 1,08366, avremo il numero stimato corretto dell'8 per cento circa, e molto più vicino al numero primo reale sopra menzionato:

$$27\,631\,021\,115\,929 \times 1{,}08366 = 29\,942\,632\,342\,487{,}62014\ \ldots$$

molto più vicino al valore reale, con differenza 76 539 461 634 molto minore della differenza tra i due numeri:

30 019 171 804 121 – 27 631 021 115 929 = 2 388 150 688 192,

e con rapporto tra le due differenze

2 388 150 688 192 / 76 539 461 634 = 31, 2015…

che si ripercuote sulla percentuale di errore, che ora diventa

8 / 31, 20 = 0,25 % e quindi molto minore dell'8% iniziale non corretto tramite il numero di Legendre.

Gli altri errori prima accennati si riducono ora rispettivamente a:

13 - 8 = 5%,   rapporto 13/8 = 1,625 ~ c^6 = 1,6194

10 - 8 = 2%, rapporto   10/8 = 1,25 ~ c^3 = 1,2725

9 - 8 = 1%, rapporto   9/8   = 1,125 ~ c^2 = 1,1743

8 - 8 = 0%, rapporto 8/8   =   1 ~ c^1 =   c = 1,08366

Notiamo facilmente che gli esponenti di c decrescono di una unità al crescere di ogni tre unità   dell'esponente n di $N = 10^n$, infatti abbiamo   in successione:

circa c^4 = 1,3790   per   1 000 = 10^3;

circa c^3 = 1,27   per   1 000 000   = 10^6;

circa c^2 = 1,17   per   1 000 000 000 = 10^9;

circa c^1 = 1,08366   per   1 000 000 000 000 = 10^{12}.

Se tale diminuzione vale per N maggiore di 10^{12} ancora maggiore sarà la diminuzione con il numero correttore c' di tipo

$c^{1/2} = \sqrt{c}$ ~ 1,040… per 10^{15};

$c^{1/4} = \sqrt[4]{c}$ ~ 1,020…, per 10^{18}, e così via per ogni circa tre unita in più dell'esponente n di $N = 10^n$. Il numero correttore diminuisce lentamente avvicinandosi sempre più a 1, e quindi con sempre minore differenza tra valore stimato e valore reale, e quindi tendente a 0 (e il rapporto tendente a 1).

Come abbiamo visto, tale rapporto è già c = 1,08366 (in realtà si avvicina a 1,08642…) per N = 10^{12} = trilionesimo numero primo.

Per valori intermedi, per esempio, 10^{10} = decimiliardesimo numero primo, il numero correttore è leggermente inferiore, e proporzionalmente, a quello valido per l'esponente multiplo di 3 di 10^{3n} inferiore, in questo caso per 10^9, il cui numero correttore è 1,1689 e quindi per N =10^{10} sarà leggermente inferiore a 1,1689 , e comunque compreso tra 1,08366 e 1,1689 (al crescere di n, il numero correttore diminuisce, ma sempre più lentamente).

Se l'errore percentuale decresce con il crescere di N ~ N log N, esso decresce ancora più rapidamente al crescere di N ~ (N log N)×c' con c' = numero correttore basato su una potenza positiva (fino a N = 10^{12}) o frazionaria di c = 1,08366, e quindi c' ~ $c^{1/k}$ con k crescente di due unità per ogni tre unità di n, a partire da n =12, poiché a partire da 10^{12+3} = 10^{15}, si ha l'inversione di c da ~ 1.08366 a c' = $\sqrt{c}$ ~ 1,040, probabile numero correttore c' per N = 10^{15}.

Il numero $c = 1,08366$ serve anche a calcolare con buona precisione il logaritmo di $N = 10^n$, che è sempre un po' superiore a $2n$, infatti per $N = 10^{12}$ è di circa 27,631 (da cui la stima del trilionesimo numero primo vista nelle pagine precedente) e $12 \times 2 = 24 < 27$, ma $2nc = 24 \times 1,08366 = 26,00784$, molto più vicino al valore reale $\log N = \log 10^{12} = 27,631$.

Ecco quindi come il numero di Legendre $c = 1,08366$, forma, con le sue potenze positive e frazionarie, i vari numeri correttori c'.

Succede, quindi, qualcosa come per la differenza tra $\pi(N)$ e $Li(N)$ nel Teorema dei numeri primi (TNP), quando i due numeri si sorpassano infinite volte e il loro rapporto tende a 1 al crescere di N.

Questo potrebbe avere qualche relazione, oltre che con il TNP, anche con l'ipotesi di Riemann (RH), ammesso che la nostra ipotesi che il numero correttore c', dipendente in parte dal numero di Legendre c = 1.08366 , diminuisca sempre più ad ogni incremento di unità dell'esponente n di $N = 10^n$, sia fondata; ipotesi qui solo proposta ma ancora da verificare con relativi calcoli con computer o supercomputer per altri N maggiori di 10^{12}. In realtà il numero correttore decresce da $1,260869 \ldots \sim c^3$ per N° = 10, a $1,1756\ldots \sim c^2$ per N° = 100, a $1,08643 \sim c^1 = c = 1,08366$ per $N° = 10^{12} =$ 1 000 000 000 000 = trilionesimo numero primo, in modo tale che $N° \sim N \times \ln N \times c'$ è vicinissimo all' N° numero primo reale, con piccolissime percentuali di errore; e anche molto più piccole delle percentuali di errori citate da Derbyshire (13, 10, 9, e 8 per cento), per cui è possibile considerare parzialmente vera la nostra ipotesi, che è solo da migliorare con gli ulteriori accorgimenti del caso.

Il numero $c = 1,08366$ corregge peraltro anche le stime dei valori del numero $G = 10^n/4n^2 c^3$ delle coppie di Goldbach per $N = 10^n$ e del numero $g = (10^n/ 4n^2)c$ delle coppie di gemelli fino a $N = 10^n$, (vedere sito collegato della rivista METODO, numero 21 del 2005, al quale rimandiamo).

Numero correttore di Legendre, quindi, molto importante per correggere con buona approssimazione diverse stime riguardanti i numeri primi; ma, chissà perché, non era molto gradito al noto e grande matematico tedesco Friederich Gauss, considerato il padre della moderna teoria sui numeri primi, per i suoi notevoli e importanti contributi al loro studio.

TABELLA 1

Valori successivi di $c^m = 1{,}08366^m$

c^1	$= c = 1{,}08366$	$\sim c' = 1{,}08643\ldots$	per	$N° = 10^{12}$
c^1	$= c = 1{,}08366$	$\sim c' = 1{,}100297$	per	$N° = 10^{9}$
$c^{1,5}$	$= 1{,}128\ldots$	$\sim c' = 1{,}128913$	per	$N° = 10^{5}$
$c^{1,5}$	$=1{,}128\ldots$	$\sim c' = 1{,}137085\ldots$	per	$N° = 10^{4}$
$c^{1,5}$	$= 1{,}128\ldots$	$\sim c' = 1{,}146518\ldots$	per	$N° = 10^{3}$
c^2	$= 1{,}174318$	$\sim c' = 1{,}174766\ldots$	per	$N° = 10^{2}$
c^3	$= 1{,}272562$	$\sim c' = 1{,}260869\ldots$	per	$N°= 10^{1}$;

$c^{1,5}$ significa qui una media tra $c^2 = 1{,}17$ e $c^1 = 1{,}08$.

Radici di c probabili numeri correttori per N maggiori di N^12

$c^{1/2}$	$=$	$1{,}04098\ldots$	$\sim c'$ per $N = 10^{15}$
$c^{1/4}$	$=$	$1{,}02028\ldots$	$\sim c'$ per $N = 10^{18}$
$c^{1/8}$	$=$	$1{,}01009\ldots$	$\sim c'$ per $N = 10^{21}$
$c^{1/16}$	$=$	$1{,}0050\ldots$	$\sim c'$ per $N = 10^{24}$
…	…	…	… …

Rimane da stabilire se tale numero correttore c' sarà sempre maggiore di 1, e quindi l - N° numero primo reale sarà sempre maggiore di quello stimato, o se, per N° molto grandi, c' potrebbe anche essere minore di 1 e quindi il valore reale di N° sarà minore di N° stimato, e se tale "sorpasso" si potrebbe verificare infinite volte, come già succede tra Li (N) e π(N) (vedi Teorema dei Numeri Primi).

Per valori di N° intermedi, ovviamente, il numero correttore c' ad essi relativo sarà simile a quello più vicino, o uguale a quest'ultimo stesso, relativo alla potenza di 10 più vicina. Per esempio se vogliamo stimare il valore del N° = 9800° numero primo (valore reale 102 317), possiamo ottenerlo moltiplicandolo per il suo logaritmo ln N° naturale e poi per il numero c' correttore più vicino, ottenendo:

N° = 9800 $\times$ 9,190137 $\times$1,137085 = 102 409, molto vicino

al valore reale 102 317, con una differenza di sole 92 unità;

(con il solo calcolo N $\times$ Ln N° avremmo ottenuto

9 800 $\times$ 9,190137 = 90 063, con una differenza di

102 317 – 90 063 = 12 254, circa il 11,97~ 12% dell'intero N , contro circa lo 0,0089% ottenuto usando il numero correttore più vicino = 1,137085; infatti 92/1023,17 = 0,00899 ~ 9 millesimi di errore;

quindi la stima con il nostro numero correttore è molto più precisa, e tanto più precisa quanto più N° è vicino ad una potenza di 10, come 9 800 è vicino a 10 000.

Se invece vorremmo stimare il 10 000° numero primo, dovremmo moltiplicare 10 000 per ln10000 e poi per 1,137085, ottenendo $10\,000 \times 9{,}21034037\ldots \times 1{,}137085 = N = 104\,729$, con differenza $104\,729 - 102\,317 = 2\,412 = 2{,}35\,\%$ in eccesso sul valore reale 102 317 (ulteriormente riducibile usando un maggior numero di cifre decimali del logaritmo e del numero correttore c'), mentre non usando il numero correttore, si otterrebbe N° = $10\,000 \times 9{,}21034037 = 92\,103$, con differenza $102\,317 - 92\,103 = 10\,214 \sim 9{,}9843\,\%$ per difetto sul valore reale 102 317.

Un altro esempio si può fare con il N° = 500° numero primo (valore reale 3 571), moltiplicando N° = 500 per il suo ln 500 = 6,214608098 e poi per il numero correttore per 1a potenza di 10 successiva (10^3= 1000, con c' = 1,146518) ottenendo

$N = 500 \times 6{,}2146080098 \times 1{,}146518 = 3\,562$, con differenza $3571 - 3562 = 9$, con $9/35{,}71 = 0{,}252\,\%$ di errore.

Il numero primo precedente a 3 571 precedente è 3559, e la stima 3562 è compresa proprio tra 3559 (499° numero primo) e 3571, sebbene più vicina a 3559, pur se il 500° numero primo sia 3 571; in questo caso, forse più fortunato di altri, la stima del 500° primo si colloca proprio tra il 499° e il 500° primo, quindi con un'ottima precisione (la precisione assoluta non è stata ancora raggiunta, né lo sarà mai, per via della dimostrazione di Legendre sull'inesistenza di una funzione razionale che dia la serie infinita di numeri primi, con qualche formula si ottiene solo una serie limitata di numeri primi, il record attuale è di 23 numeri primi consecutivi). Ma ora la nostra formula

$$N \sim N° \times \ln N \times c'$$

ci sembra la migliore in circolazione: ulteriori ricerche calcoleranno il numero correttore c' per N° di forma 10^n molto maggiori di 10^{12}, (c' tendente a 1 per N° molto elevati, per esempio 10^{21} e ancora più grandi) e magari si troveranno ulteriori possibili perfezionamenti della suddetta formula, già la migliore in circolazione, che si sappia, sull'argomento, noto (come dicevamo all'inizio) anche come funzione pj: già presente, com'è noto, nella nota formula della funzione zeta di Riemann:

$$\prod_p \frac{1}{\left(1 - p_j^{-s}\right)}$$

E l'ipotesi di Riemann è, ricordiamo, uno dei famosi sette problemi del millennio (anzi sei, perché la congettura di Poincarè è stata di recente dimostrata dal matematico Perelman ed esplicata da due matematici cinesi).

TABELLE PER LA STIMA DI DIVERSI NUMERI PRIMI

con la formula $N \sim N° \times \ln N° \times c'$, *con risultati* N' *molto più precisi che con la nota ma più semplice e meno precisa formula* $N' = N° \times \ln N°$

Si può considerare il numero N° anche come la stima del numero dei numeri primi fino a N, e quindi $N° \sim \pi(N)$, e calcolabile con la formula inversa $N° \sim \pi(N) \sim N/(\ln N / c') \sim \dfrac{N}{\ln N} \times c'$, per esempio:

$$1229 = \pi(10\,000) / \ln 10000 \times 1{,}137.. \sim \frac{10\,000}{9{,}210} \times 1{,}137 = 1\,234{,}52$$

con una discrepanza di 1234 – 1229 = 5 unità dal valore reale 1229.

Con la formula di Gauss corretta con il numero correttore fisso di Legendre c = 1,08366, e cioè $\pi(N) \sim \dfrac{N}{\ln N - 1{,}08366}$

avremmo ottenuto $\dfrac{1\,0000}{8,1266}$ = 1230,52 ~ 1231 con discrepanza 2,

mentre con la nostra formula avevamo ottenuto 1234,52 con

discrepanza 1234 – 1229 = 5, anche questa molto piccola.

TABELLA I $\pi(N) \sim N°$ con N°da 1 a 10

(c'= 1,26… specifico per $10^1 = 10$)
(due cifre decimali sono sufficienti)

N°~ π(N)	N = N°primo (valore reale)	lnN°	N°× lnN°	N°×lnN×c' Stima N' ~ N	Discrepanza N – N'
1	2	0	0	0	2 – 0 = 2
2	3	0,69	1,38	1,74~2	3 – 2 = 1
3	5	1,098	3,29	4,15~4	5 – 4 = 1
4	7	1,38	5,54	6,98~7	7 – 7 = 0
5	11	1,60	8,04	10,13~10	11 – 10 = 1
6	13	1,79	10,75	13,54~14	13 – 14 = - 1
7	17	1,94	13,62	17,16~17	17 – 17 = 0
8	19	2,07	16,63	20,96 ~21	19 – 21 = -2
9	23	2,19	19,77	24,91~25	23 – 25 = -2
10	29	2,30	23,02	29,01~29	29 – 29 = 0
…	…	….	…	….	….

Viceversa, per ritornare da 29 (N) a 10 ($\pi(N) \sim N°$), bisogna dividere 29 per il suo logaritmo 3,36, ottenendo 8,63, e moltiplicando questo valore per c'= 1,26…(specifico per N° = $10^1 = 10$), ottenendo 10,87~ 10, applicando la formula inversa

$$N° \sim \pi(N) \sim N/(\ln N/c')\pi \sim N/\ln N \sim \frac{N}{\ln N} \times 1{,}26.$$

TABELLA II per la stima del N° numero primo (per N° = decine di unità, e con c' = 1,1747 specifico per N° = 10^2 = 100

N°	N = N° numero (valore reale)	ln N°	N°×lnN°	N°×lnN°×c' Stima N' ~N	Discrepanza N – N'
10	29	2,302	23,02	27,04 ~ 27	29 – 27 = 2
20	71	2,99	59,91	70,38 ~ 70	71 – 70 = 1
30	113	3,40	102,03	~ 120	113 – 120 = -7
40	173	3,68	147,55	~ 173	173 – 173 = 0
50	229	3,91	195,60	~ 230	229 – 230 = -1
60	281	4,09	245,66	~ 288	281 – 289= -8
70	349	4,24	297,39	~ 349	349 – 349 = 0
80	409	4,38	350,56	~ 412	409 – 412 = 3
90	463	4,49	404,98	~ 476	463 – 476=-13
100	541	4,60	460	~ 541	541 – 541 = 0
…	…	…	…	…	….

Tabella III per la stima del N° numero primo (per N° = centinaia di unità, e con c' = 1,1465 specifico per N° = 10^3 = 1000

……………………………………………………………………………..

100	541	4,60	460	~527	541 – 527 = 14

(qui solo per N° = 100 si è usato c'=1,1465, anziché il più preciso

1,1747, vedi tabella precedente)

200	1 223	5,29	1 214,90	~1 215	1223 – 1215= 8
300	1 987	5,70	1 711,13	~1 962	1987 – 1962 =25
400	2 741	5,99	2 396,58	~2 748	2741 –2748 =-7
500	3 571	6,21	3 107,30	~3 563	3571 – 3563 = 8
600	4 409	6,39	3 838,15	~4 400	4409 – 4400 = 9
700	5 279	6,55	4 585,75	~5 258	5279 – 5258 =21
800	6 133	6,68	5 347,68	~ 6 131	6133 – 6131 = 2
900	6 997	6,80	6 122,15	~7 019	6997 –7019 =-22
1 000	7 919	6,90	6 907,75	~7 920	7919 –7920 = -1
…	…	…	…	…	… …

Anche qui, per tornare da N = 7 919 a $\pi(7919)$ =1 000 ,

occorre dividere 7 919 per il suo logaritmo naturale 8,977… diviso per

il numero correttore 1,146518 ottenendo:

7919/7,829811843 = 1 011, 39… ~1 000 , mentre con la più semplice

formula N/ln N avremo 7919/8,977… = 882,14, molto più lontano da

1 000, rispetto a 1 011 ottenuto con la nostra formula corretta con c'.

Viceversa, ponendo N° = π (N= 10^n), si possono trovare nuovi numeri correttori c’, compresi proporzionalmente tra quelli indicati

nella TABELLA 1 dove N° erano invece le potenze di 10, e dati dal

rapporto $10^n / \pi(10^n)$.

Per esempio, con la nuova Tabella (a):

N°	lnN°	N° lnN°	c’ = N/(N° lnN°)
168	5,1239	860,8259485	1000/860,8259… = 1,161675019
1 229	7,1139	8743,052059	10 000/8743,05 = 1,14376535
9 592	9,1686	87946,02361	100 000/87946,02 = 1,13707112
78 498	11,2708	884737,4898	1 000 000/884737,4= 1,130278883
664 579	13,4069	8909950,201	10^7/8909950,201 = 1,122340729
5 761 455	15,5667	89686845,03	10^8/ 89686845,03 = 1,114990721
50 847 534		17,744342	90 225 3897,55
10^9 / 902253897,55 = 1,1083354…			
455 052 511		19,935923	907 1891 820,25
10^{10} / 9071 891820,25 = 1,1023059…			
4 118 054 813		22,138646	911 681 157 713,36
10^{11} / 91168115771,36 = 1,0968747…			
37 607 912 018		24,350480	915 770 709 436,06
10^{12} / 915 770 709 436,06 = 1,0919763…			
346 065 536 839		26,569894	9 194 924 630 865,32
10^{13} / 9 194 924 630 865,32 = 1,0875564…			
3 204 941 750 802		28,795715	92 288 589 247 695,41
10^{14} / 92 288 589 247 695,41 = 1,0835575…			
29; 844 570 422 669		31,027024	925 988 202 773 841,20
10^{15} / 925 988 202 773 841,20 = 1,0799273…			
…	…	…	… …
24; 739 954 287 740 860		37,747195	933 863 878 790 440 351,88
10^{18} / 933 863 878 790 440 351,88 = 1,0708198…			
…	…	…	…. ….

Come si vede, i numeri correttori c’ cosi calcolati sono molto vicini ai numeri correttori della TABELLA 1 per N° = 10^n, e utili a calcolare N quando N° è molto vicino ai valori di N° della Tabella (a) di cui sopra. Ovviamente, anche questi numeri correttori c' decrescono al crescere di N°, e tendono a 1 per N° ancora molto più grandi .

(Per il numero di Legendre c = 1,08366,notiamo brevemente che esso si avvicina a 1,08355 in prossimità di $\pi(10^{14})$)

Per esempio, se si vuole stimare il 24 739 954 287 740 860° numero primo, occorre moltiplicare questo numero per il suo logaritmo naturale 37,747195…, e poi per i1 numero correttore 1,0708198, e si ottiene un numero molto vicino a 10^{18} = 999 999 931 913 603 579…, con una differenza di 68 086 396 421, corrispondenti, come errore, a circa 68 miliardesimi di 10^{18}, mentre senza la correzione con il numero correttore specifico 1,0708198, tale differenza sarebbe stata di

10^{18} – 933 863 878 790 440 351 = 66 136 121 209 559 649

pari a 6 613 612,1209559649 miliardesimi, e quindi con errore molto maggiore (97 259 volte superiore, uguale al rapporto 6 613 612 / 68) del precedente, di soli 68 miliardesimi, ma che potrebbe essere ulteriormente ridotto usando tutte le cifre decimali sia del logaritmo naturale di $\pi(10^{18})$, sia del numero correttore 1,0708198……

Con altri esempi si trova che con la nostra formula completa di numero correttore $N \sim N° \times \ln° \times c'$, l'errore percentuale si riduce di circa qualche decina di volte o anche di più rispetto alla formula senza numero correttore $N \sim N° \times \ln N°$.

Per numeri N° intermedi tra l'uno e l'altro, ovviamente anche il numero correttore c' è intermedio tra i rispettivi valori di c', e leggermente decrescente al crescere di N° = ennesimo numero primo.

Per esempio, il N° = 2 616° numero primo è N= 23 537, e con la nostra formula $N \sim N° \times \ln N° \times c'$

otteniamo $N \sim 2616 \times 7,869401 \times 1,128913 = 23\ 240$,

(il numero correttore esatto è N/N' = 1,0127796901… vicino a 1,128913… specifico per $N = 10^5$)

con una discrepanza di 23 537 – 23 240 = 297 unità, molto meno di quella ottenuta con la più semplice ma meno precisa formula

$N \sim N° \times \ln N° = 2\ 616 \times 7,869401 = 20\ 586$, con discrepanza

23 537 – 20 586 = 2 951 e cioè 2951 / 297 = 9,93 volte più grande

(1,26% di errore sul valore reale 23 537 contro il 12,71% rispettivamente)

Questa formula più precisa, per quanto ulteriormente perfezionabile, non potrà però mai raggiungere la perfezione assoluta poiché, come abbiamo visto nella nostra soluzione della congettura di Polignac, ci sono intervalli numerici più rarefatti di numeri primi, rispetto a quelli adiacenti di uguale lunghezza ma più densi di numeri primi (per es. tra 10 000 000 e 10 000 100 con due soli numeri primi distanti tra loro di 60 unità, contro una media locale di 15 unità, e l'intervallo precedente tra 9 999 900 e 10 000 000, con ben nove numeri primi, tra cui due coppie ravvicinate di gemelli), e qualsiasi calcolo di N ~ N° numero primo che cadrebbe tra questi due numeri primi (per l'esattezza 10 000 019 e 10 000 079) avrebbe una maggiore discrepanza rispetto ad altri calcoli di N°, anche vicini; insomma non si troverebbe mai esattamente l'N° numero primo cercato, anche se ci si andrebbe più o meno vicino, forse più vicino che con altre formule note per tale tipo di calcolo.

La strada è comunque aperta per eventuali e possibili perfezionamenti parziali, soprattutto dal punto di vista informatico, per elaborare appositi software che tengano conto dei numeri correttori c' e dei relativi due grafici allegati, sufficienti per calcolare sempre in modo approssimativo ma comunque con buona precisione, fino al N° = 10^{12} numero primo; e per quelli successivi, si potrebbe fare uso di numeri correttori stimati (tramite $\pi(N) \sim N/\ln N - 1{,}08366$), il rapporto

$$c' \sim N/ N° \ln N°$$

sarà molto prossimo a c' reale, sempre decrescente e tendente a 1 per $N = 10^n$ sempre più grande.

Si pregano i ricercatori che leggeranno questo lavoro di segnalarci cortesemente eventuali errori di calcolo, possibili software derivati, altri eventuali possibili usi della nostra formula e soprattutto di suoi eventuali e ulteriori perfezionamenti, riguardanti anche la funzione zeta di Riemann e sue varianti.

Le fonti dei numeri usati sono tratti da Internet ("Primepages" di Chris Caldwell) e dal libro di J. Derbyshire "L'ossessione dei numeri primi", Bollati Boringhieri ed..

GRUPPO ERATOSTENE