

¹Teoremi sulle coppie di Goldbach e le coppie di numeri primi gemelli: connessioni tra Funzione zeta di Riemann, Numeri Primi e Teoria di Stringa.

Michele Nardelli ¹ e Francesco Di Noto

¹Dipartimento di Matematica ed Applicazioni “R.Caccioppoli”
Università degli Studi di Napoli “Federico II” – Polo delle Scienze e delle Tecnologie
Monte S. Angelo, via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

Riassunto.

Scopo del presente lavoro è quello di evidenziare le relazioni matematiche tra teoria di stringa e funzione zeta di Riemann, in maniera specifica tra teoria di stringa, Congettura di Goldbach (Teorema di Goldbach) e Teorema di Goldston-Montgomery. Nella prima parte, quindi nel primo capitolo, vengono esposti alcuni teoremi e dimostrazioni matematiche sulle coppie di Goldbach e le coppie di numeri primi gemelli, e delle proposte di soluzione per alcuni problemi additivi di tipo Goldbach e sugli insiemi sparsi ed intervalli corti. Il linguaggio matematico usato in questa parte del lavoro è di tipo puramente algebrico.

Nella seconda parte, invece, vengono esposti alcuni settori inerenti la teoria di stringa, precisamente le soluzioni cosmologiche da un sistema D3/D7, la soluzione applicata alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB ed alcune soluzioni solitoniche in teoria di campo di stringa. Verrà quindi evidenziato come queste soluzioni di equazioni di teoria di stringa sono ottimamente correlate con i teoremi di Goldbach e di Goldston-Montgomery e, conseguentemente, con la funzione zeta di Riemann.

1. Teoremi sulle coppie di Goldbach e le coppie di numeri gemelli.[1]

Nel lavoro “Teorema sulle coppie di Goldbach e le infinite coppie di numeri primi gemelli: nuove formule rettificate con $c = 1,08366 =$ numero di Legendre” di **Francesco Di Noto e Annarita Tulumello**, viene corretta la formula unica

¹ Presentato a Società dei Naturalisti in Napoli – Nuova Serie – (2006): 1-32

$$G \simeq g \simeq \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \quad (1.1)$$

(per il calcolo del numero di coppie di Goldbach e delle coppie di gemelli fino a $N = 10^n$) con il numero correttore $c = 1,08366$ (già correttore della formula logaritmica $\pi(N) = \frac{N}{\log N}$ nella $\pi(N) = \frac{N}{\log N - 1,08366}$)

La formula (1) si sdoppia così in:

$$G \simeq \frac{10^n}{4 \bullet n^2 \bullet c^3} \quad e \quad g \simeq \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \bullet c \quad (1.2)$$

le quali danno valori di G e di g fino a $N = 10^n$ molto più precisi del valore unico ottenuto con la (1.1).

Infine, notiamo la relazione

$$c^{9k} \simeq 2^k$$

con c abbreviato da 1,08366 in 1,08; e viene proposto di considerare il numero $c = 1,08366 \simeq \sqrt[9]{2}$ come una nuova e utile costante naturale, che viene chiamata costante di Legendre, buona correttrice delle curve che riguardano i numeri primi già considerate ($\pi(N)$, G e g), ma anche le altre:

$$\pi(N) = \frac{n}{\log N} \quad \text{in} \quad \frac{N}{\log N} \bullet c,$$

$$\pi(N) = \frac{10^n}{2n} \quad \text{in} \quad \frac{10^n}{2 \bullet n \bullet c};$$

e possibilmente anche altre curve ancora in futuro; e potrebbe avere benissimo un ruolo anche per la futura dimostrazione della congettura di Riemann, che riguarda collettivamente i numeri primi e la loro regolarità.

La formula per il calcolo statistico approssimativo del numero delle coppie di Goldbach fino a numeri del tipo $N = 10^n$ è del tipo:

$$G_N = \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \quad (1.3)$$

Riguardo all'infinità delle coppie di numeri primi gemelli, la relativa formula è invece:

$$g_N = \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \quad (1.4)$$

Tale formula è la stessa della precedente per il calcolo delle G_N coppie di Goldbach; ma con la differenza che la (1.3) dà valori in lieve eccesso al numero reale di coppie di Goldbach per $N = 10^n$, mentre la seconda li dà in difetto:

$$G_N < \frac{10^n}{4 \bullet n^2} < g_N.$$

Per esempio, per $N = 10^4 = 10.000$, sia la (1.3) che la (1.4), essendo uguali, danno $G = g = 156$ mentre i rispettivi valori reali sono:

G = 118 coppie di Goldbach per N = 10.000

G = 170 coppie di numeri gemelli fino a N = 10.000.

Esiste però numero correttore 1,08366 che, per comodità, viene chiamato “c”, numero correttore di tutte le curve che riguardano collettivamente i numeri primi. Tale numero è stato trovato da Legendre per correggere in meglio i valori dati dalla formula

$$\pi(N) \simeq \frac{N}{\log N}, \text{ così corretta in}$$

$$\pi(N) \simeq \frac{N}{\log(N) - 1,08366}$$

che dà un numero molto prossimo al numero dei numeri primi fino a N. Con questo numero correttore c = 1,08366 è infatti possibile e utile anche a noi correggere la nostra formula, sdoppiandola in due formule simili ma più efficienti:

$$G'_N = \frac{10^n}{4 \bullet n^2 \bullet c^3} \quad (1.5)$$

$$g'_N = \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \bullet c \quad (1.6)$$

Nell’articolo “La distribuzione dei numeri primi” di D.K. Devlin, Davis & Hersch e Jean Dieudonné”, si citano le successioni 4n + 3 e 6n + 5 come progressioni parziali per ottenere numeri primi.

Per esempio:

<u>4 • n + 3</u>	<u>6 • n + 5</u>
4 • 1 + 3 = 7;	6 • 1 + 5 = 11;
4 • 2 + 3 = 11;	6 • 2 + 5 = 17;
4 • 3 + 3 = 15 = 3 • 5;	6 • 3 + 5 = 19;
...	...

Progressioni che, per il nostro Teorema n° 1, diventano (vedi “Metodo” n° 19 – 2003 di Francesco Di Noto e Annarita Tulumello);

<u>6n - 1</u>	<u>6n + 1</u>
6 • 1 - 1 = 5;	6 • 1 + 1 = 7;
6 • 2 - 1 = 11;	6 • 2 + 1 = 13;
6 • 3 - 1 = 17;	6 • 3 + 1 = 19;
...	...

che, oltre ad essere più simmetriche ed eleganti rispetto ad n, rendono chiara la natura dei numeri primi gemelli p e q tali che:

$$p + 2 = q$$

$$(6n - 1) + 2 = (6n + 1)$$

da cui:

$$6n - 1 + 2 = 6n + 1$$

$$6n + 1 = 6n + 1$$

Qualsiasi coppia di numeri gemelli, g' e g'' infatti, condivide lo stesso numero n .

n	g'	N	g''
$6 \bullet 1 - 1 =$	5	$6 \bullet 1 + 1 =$	7
$6 \bullet 2 - 1 =$	11	$6 \bullet 2 + 1 =$	13
$6 \bullet 3 - 1 =$	17	$6 \bullet 3 + 1 =$	19
$6 \bullet 5 - 1 =$	29	$6 \bullet 5 + 1 =$	31
$6 \bullet 10 - 1 =$	59	$6 \bullet 10 + 1 =$	61
...
$6 \bullet 16673 - 1 =$	100037	$6 \bullet 16673 + 1 =$	100039
...

È stato dimostrato, con il teorema n° 1 e altri teoremi sui numeri gemelli, la loro natura e forma $p + 2 = q$, che diventa: $6n \pm 1 = p$ e q , con p e q gemelli per molti valori di n .

Vediamo ora, come il numero G delle coppie di Goldbach e il numero g delle coppie di gemelli fino a $N = 10^n$ possano essere corretti, per ottenere valori di G e di g molto più vicini a quelli reali.

Il fattore di correzione, è lo stesso che corregge $\pi(n)$, (numero dei primi fino a n), e cioè $1,08366 = c$ (correttore collettivo)

$$\pi(n) \rightarrow \frac{n}{\log_n} \rightarrow \frac{n}{\log_n - 1,08366}$$

(sarebbe meglio scrivere $\pi(N)$ e non $\pi(n)$ per non confondere n con l'esponente di $N = 10^n$).

Così, infatti, come $c = 1,08366$ corregge la curva dei numeri primi per ogni numero naturale fino a N , esso, corregge anche almeno le altre due curve riguardanti i numeri primi, e cioè quella del numero G_N delle coppie di Goldbach e quella del numero g_N delle coppie di gemelli fino a $N = 10^n$.

Si è trovato che le formule più corrette sono:

$$G \simeq \frac{10^n}{4 \bullet n^2 \bullet c^3} \quad (1.7)$$

$$g \simeq \frac{10^n}{4 \bullet n^2} \bullet c \quad (1.8)$$

e che danno valori di G e g molto più vicini ai valori reali già noti;

con $c = 1,08366$ e $c^3 = 1,272562$, e con rapporto $\frac{g}{G} \simeq c^4 \simeq 1,3790$, poiché:

$$\frac{g}{G} = \frac{10^n}{4 \cdot n^2} \cdot c \cdot \frac{c^3 \cdot 4n^2}{10^n} = c \cdot c^3 = c^4 = 1,3790.$$

Ponendo $G_{(1)}$ e $g_{(1)}$ i valori calcolati con le (1.3), e $G_{(2)}$ e $g_{(2)}$ i valori calcolati con le (1.7) e la (1.8), G_r e g_r i valori reali noti, costruiamo la tabella 1 per i primi quattro valori di $N = 10^n$ con n da 1 a 4, e di $N = 10^9$ con $n = 9$.

TABELLA 1

N	n	$G_{(1)} = g_{(1)}$ $\frac{10^n}{4n^2}$	$G_{(2)}$ $\frac{10^n}{4 \cdot n^2 c^3}$	$g_{(2)}$ $\frac{10^n}{4n^2} \cdot c$	G_r	g_r
10^1	1	2,5	1,96	2,7	2	1
10^2	2	6,25	4,91	6,7	6	7
10^3	3	27,7	21,82	30	27	33
10^4	4	156,25	<u>122,83</u>	<u>169</u>	<u>118 (1)</u>	<u>170 (2)</u>
...
10^9	9	3086419	2425348	<u>3344628</u>	?	<u>3424506</u>

Ora, dopo aver dimostrato la correzione della formula unica per G e g tramite $c = 1,08366$, e la sua potenza $c^3 = 1,272562$ a denominatore, e il rapporto tra G e g statistico:

$$\frac{g}{G} \geq c^4 = 1,3790, \quad (\text{o con } \frac{c^{n+1} + c^n}{2}, \text{ forse pi\u00f9 precisa})$$

vediamo che con tale numero $c = 1,08366$ sussiste una certa relazione (tutta ancora da approfondire) tra c e le potenze di 2.

Infatti, e anche meglio abbreviando c in 1,083, abbiamo:

$9k$	$2k$	$9k$	$2k$
$c^9 = 1,083^9 = 2,049 \simeq 2^1$		$c^9 = 1,08366^9 = 2,060 \simeq 2^1$	
$c^{18} = 1,083^{18} = 4,20 \simeq 2^2$		$c^{18} = 1,08366^{18} = 4,24 \simeq 2^2$	
$c^{27} = 1,083^{27} = 8,60 \simeq 2^3$		$c^{27} = 1,08366^{27} = 8,75 \simeq 2^3$	
$c^{36} = 1,083^{36} = 17,64 \simeq 2^4$		$c^{36} = 1,08366^{36} = 18,03 \simeq 2^4$	

Con rapporto tra i due esponenti $9k$ di c e k di 2 uguale a 9, infatti $\frac{9k}{k} = 9$

$$\frac{9}{1} = 9; \quad \frac{18}{2} = 9; \quad \frac{27}{3} = 9; \quad \frac{36}{4} = 9$$

I valori di $\simeq 2^n$ sono pi\u00f9 corretti se si dividono per c , e poi fa una media:

infatti per $c = 1,083$; $\frac{1,083^9}{c} = \frac{2,04}{1,08366} = 1,8825$

e la media tra i due valori è

$$\frac{c^9 + c^8}{2} = \frac{2,04 + 1,8825}{2} = 1,96 \simeq 2 = 2^1.$$

E così via, fino a $\frac{c^{9k}}{c}$ per k più alti (e quindi c^{9k-1}).

Ma una maggiore corrispondenza tra c^{9k} e 2^k , contrariamente a quanto si potrebbe aspettare (più decimali uguale più precisione, mentre qui è esattamente il contrario), si ottiene abbreviando ancora c in 1,08, cioè c privato degli ultimi tre decimali.

Infatti:

	$9k$		k^k	
$c^9 = 1,08^9 = 1,9990 \simeq 2 = 2^1$				
$c^{18} = 1,08^{18} = 3,9960 \simeq 4 = 2^2$				
$c^{27} = 1,08^{27} = 7,9880 \simeq 8 = 2^3$				
$c^{36} = 1,08^{36} = 15,968 \simeq 16 = 2^4$				
$c^{45} = 1,08^{45} = 31,92 \simeq 32 = 2^5$				
$c^{54} = 1,08^{54} = 63,809 \simeq 64 = 2^6$				
...

dove il rapporto tra i due esponenti è sempre 9, sebbene la discrepanza tra c^{9k} e 2^k è sempre leggermente crescente, per es. $2^6 - c^{54} = 64 - 63,809 = 0,191 = 2,98\%$ poiché

$$\frac{64}{1000} = 0,064 \text{ e } \frac{0,191}{0,064} \simeq 2,98\%.$$

Possiamo quindi dire, a proposito del numero $c = 1,08366$, che:

$$c \simeq \sqrt[9k]{2^k}$$

con discrepanza $d = 2^k - c^{9k}$ crescente lentamente al crescere di k .

Tale numero corregge, oltre alla formula $\frac{n}{\log_n n - c}$, anche le formule per il calcolo

del numero delle coppie di Goldbach e delle coppie di gemelli fino a $N = 10^n$, tramite

la $\frac{g}{G} \geq c^4 = 1,3790$, (o alla $\frac{g}{G} = \frac{c^{n+1} + c^n}{2}$) ed è collegabile alle k potenze di 2, tali

che $c^{9k} \simeq 2^k$, meglio ancora se si accorcia c da 1,08366 a 1,08.

Possiamo quindi considerare, e proporre, il numero c come costante universale, e che chiameremo costante di Legendre (del primo matematico che l'ha trovata e usata), al pari di altre costanti universali, come:

$$\begin{aligned}\pi &= 3,144159\dots \\ e &= 2,71828 \\ \text{rapporto aureo} &= 1,61803 \\ \sqrt{2} &= 1,41421\end{aligned}$$

ecc. con la differenza che $c = 1,08366$ è un potente correttore della curva logaritmica di $\pi(n)$, delle nostre curve G e g ; e che ha certamente a che fare con 2^k poiché $c^{9k} = 2^k$, e forse anche con tutte le altre curve collettive che riguardano i numeri primi, siano esse già note o ancora da scoprire. Inoltre, c , come vedremo, potrebbe anche avere a che fare con l'ipotesi di Riemann sulla posizione degli zeri della funzione zeta, quest'ultima collegata alle vibrazioni di stringa.

Variazione della formula

$$\pi(N) = \frac{10^n}{2n} \quad \text{in} \quad \frac{10^n}{2nc} \simeq \frac{10^n}{\ln n}$$

Nell'articolo già citato "La distribuzione dei numeri primi", gli Autori riportano una tabella con i valori di 10^n con n a partire da 3, e quindi da 1000; i valori reali di $\pi(n)$ cioè il numero esatto dei numeri primi fino a N , i valori di $\pi(N)$; i valori di $\pi(N)$ stimati con la formula $\frac{n}{1_n - 1,08366}$, e i valori stimati con la formula approssimata

$$\frac{n}{1_n}; \text{ e i valori forniti dalla formula } Li(n).$$

Con la formula $E = \pi(N) \simeq \frac{10^n}{2nc}$ vediamo che otteniamo valori altrettanto precisi, e forse di più, a partire da 10^8 , compresi tra quelli reali e quelli dati dalla

$$\pi(n) = \frac{n}{1_n - 1,08366}$$

Infatti

per $N = 1000$	$\frac{1000}{2 \bullet 3 \bullet c} = \frac{1000}{6 \bullet 1,08366}$	=	153
per $N = 10.000$	$\frac{10.000}{2 \bullet 4 \bullet c} = \frac{10.000}{8,66928}$	=	1153
per $N = 100.000$	$\frac{100.000}{10,08366} = \frac{1000}{6 \bullet 1,08366}$	=	9917
per $N = 10^6$	$\frac{10^6}{12 \bullet c} = \frac{10^6}{13,00392}$	=	76899
per $N = 10^7$	$\frac{10^7}{14 \bullet c} = \frac{10^7}{15,17124}$	=	659.141

$$\text{per } N = 10^8 \quad \frac{10^8}{16 \bullet c} = \frac{10^8}{17,33856} = 5.767.491$$

Paragonando i valori ottenuti, abbiamo

N	$\pi(n)$ Reale	$E = \frac{10^n}{2 \bullet n \bullet c}$	$\frac{N}{l_n N - c}$	$\frac{N}{l_n N}$	Li (N)
10^3	168	> 153 <	172	153	178
10^4	1229	> 1153 <	1231	1086	1246
10^5	9592	< 9917 >	9588	8686	9630
10^6	78498	> 76899 <	78534	72382	78628
10^7	664579	> 659141 <	665138	620420	664918
10^8	5761455	< 5767491 <	5769341	5428681	5762209

Si può anche notare che fino a $N = 10^7$, anche i valori di $\frac{n}{l_n}$, moltiplicati per c e

quindi $\frac{n}{l_n} \bullet c$, danno valori molto vicini a $\pi(N)$.

Infatti, nella apposita tabella seguente riportante i valori delle due formule e i valori reali di $\pi(N)$, abbiamo:

n	$\frac{n}{l_n}$	$\frac{n}{l_n} \bullet c$	$\pi(N)$ reale	Differenza tra le due Formule e $\pi(N)$
3	145	157	168	23; 11
4	1086	1176	1229	143; 53
5	8686	9412	9592	906; 180
6	72382	78437	78498	6116; 61
7	620420	672324	664579	44159; -7749
8	5428681	5882844	5761455	332774; -121389

Mentre i valori di Li (N), sono abbastanza precisi, e non hanno bisogno di alcuna correzione.

Si nota che il rapporto $\frac{\pi(N)}{Li(N)} \rightarrow 1$ al crescere di n e quindi di N. (Teorema dei numeri primi).

Infatti, mentre per $n = 3$, tale rapporto è:

$$n = 3 \quad \frac{168}{178} = 0,9438220;$$

$$n = 4 \quad \frac{1229}{1246} = 0,9864;$$

(inversi):

$$\frac{178}{168} = 1,0596$$

$$\frac{1246}{1229} = 1,0139$$

n = 5	$\frac{9592}{9630} = 0,9961;$	$\frac{9630}{9592} = 1,0040$
n = 6	$\frac{78498}{78628} = 0,9984;$	$\frac{78628}{78498} = 1,0017$
n = 7	$\frac{664579}{664918} = 0,9995;$	$\frac{664918}{664579} = 1,0006$
n = 8	$\frac{5761455}{5762209} = 0,9999;$	$\frac{5762209}{5761455} = 1,0002$

Come si vede, $\frac{\pi(N)}{Li(N)} \rightarrow 1$ limite superiore mentre il suo inverso $\frac{Li(N)}{\pi(N)} \rightarrow 1$ come limite inferiore; il che depone a favore della congettura di Riemann, poiché $\pi(N)$ si avvicina sempre più a $Li(N)$, con il loro rapporto (e il suo inverso) sempre più vicino all'unità.

Forse è anche per questo che tutti gli zeri non banali della funzione zeta di Riemann giacciono sulla linea critica $\frac{1}{2}$, e sono correlabili alle vibrazioni di stringa.

Nota

Naturalmente, lo stesso succede per tutti i rapporti (e loro inversi) tra $\pi(N)$ e tutte le stime più o meno approssimative (le più precise sono com'è noto $Li(n)$ ed $R(n)$) in base al teorema dei numeri primi, il cui enunciato più formale è:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(N)/(N/\log N) = 1.$$

$$n \rightarrow \infty$$

Il teorema risale a Gauss che lo scoprì a quindici anni (intorno al 1792), ma la dimostrazione rigorosa è del 1896, frutto del lavoro indipendente di C.de la Vallè e Jacques Hadamard.

Funzione $R(n)$, o meglio $R(N)$

$$R(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\zeta(k+1)} \cdot \frac{(\log n)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\zeta(k+1)} \cdot \frac{(\log N)^k}{k!}$$

Anche se al posto di $n/\log n$ mettiamo altre stime, la tendenza a 1 del rapporto $\frac{\pi(N)}{\text{stima}}$

o il suo inverso $\frac{\text{stima}}{\pi(N)}$ non cambia; per esempio per $n = 8$, abbiamo

$$\frac{\pi(n)}{n} = \frac{5761455}{5769341} = 0,998633 \rightarrow 1$$

ln - 1,08366

e il suo inverso $\frac{5769341}{5761455} = 1,0011368 \rightarrow 1;$

mentre per valori minori di n , per es. 3:

$$\pi(1000) = \frac{168}{N/IN - 1,0863} = \frac{168}{172} = 0,976 \rightarrow 1$$

e il suo inverso $\frac{172}{168} = 1,023$

i rapporti danno valori più lontani da 1.

Viceversa, per valori altissimi di N tipo 10^{1000} , ovviamente il rapporto inverso tra $\pi(N)$ e qualsiasi sua stima statistica, sarà in pratica indistinguibile da 1 (i decimali verranno fuori dopo un gran numero di zeri dopo la virgola).

Ma anche i termini singoli $\frac{p^x}{p^x - 1}$ della seguente versione della funzione zeta

$\prod = \frac{p^x}{p^x - 1}$ tende a 1 al crescere di p e di x, per esempio

$$\frac{101^2}{101^2 - 1} = \frac{10201}{10200} = 1,0009803921$$

mentre per $\frac{1013^2}{1013^2 - 1} = \frac{1026169}{1026168} = 1,0000009744$

valore molto più vicino a 1 che quello dell'esempio precedente per $p = 101$.

Dividendo per 2 tali rapporti, si ottengono valori molto prossimi a $\frac{1}{2}$: la “linea critica” di Riemann, a sua volta collegata agli zeri non banali della funzione zeta, come già detto in precedenza, a loro volta correlati alle vibrazioni di stringa.

Proposte di soluzione per alcuni problemi additivi di tipo Goldbach e sugli insiemi sparsi e intervalli corti.

I principali problemi additivi di tipo Goldbach, e cioè N pari o dispari come somma di due numeri primi (congettura di Goldbach forte), di tre numeri (congettura debole) o di quattro o più primi, e quindi k primi (estensione di Goldbach a k primi), sono già stati affrontati e risolti da **Francesco Di Noto** e dalla **Prof.ssa Annarita Tulumello**, ed i relativi lavori sono stati già pubblicati sui numeri 20-2004, 21-2005 e 22-2006 della rivista “Metodo”.

Oltre questi problemi, esistono anche i problemi sottrattivi, tipo i numeri primi gemelli q e p con $q - p = 2$, ed i primi qualsiasi q e p con $q - p = d$ numero pari qualsiasi maggiore di 2 (congettura di Chen, la cui dimostrazione si può consultare su “Metodo” n° 22-2006).

Un altro problema del genere è quello di trovare numeri primi vicini ad un primo dato. Sapendo, per esempio, che la somma di due primi gemelli è sempre un multiplo di 12 per una conseguenza del Teorema n° 1 (vedi “Metodo” 19-2003 e 21-2005), per la dimostrazione di Goldbach (metodo delle colonne a + b) si nota che ci sono più numeri primi vicini ad un numero gemello che a qualsiasi altro. Se infatti p è un gemello, $p \pm 1$ è l'altro gemello, e $p \pm 4, p \pm 6, \dots, p \pm d$ possono essere gli altri

numeri primi più vicini; se p è invece non gemello, i numeri primi ad esso più vicini cominciano con $p \pm d$ con $d > 2$, e tali numeri primi sono in conseguenza di meno dei numeri primi vicini ad un primo gemello (ricordiamo che, per la dimostrazione della congettura di Chen, d è infinite volte la differenza tra due numeri primi diversi, così come $d = 2$ è infinite volte la differenza tra altrettante infinite coppie di due numeri primi gemelli). Per esempio, prendiamo i due numeri primi gemelli 29 e 31, la cui somma è $29 + 31 = 60$, poiché $29 + 31$ si può scrivere (in base al Teorema n° 1, anche come $(6n - 1) + (6n + 1) = 6n - 1 + 6n + 1 = 12n$) anche come:

$$6 \times 5 - 1 + 6 \times 5 + 1 = 30 - 1 + 30 + 1 = 29 + 31 = 60 = 12 \times 5;$$

ed una coppia di gemelli è sempre l'ultima coppia di Goldbach per i multipli di 12 (sebbene non tutti i multipli di 12 lo siano, per es. 48 è il primo a non esserlo, poiché $48/2 \pm 1 = 23$ e 25 , con 23 primo e $25 = 5 \times 5 = 5^2 =$ composto). Ma ritorniamo al numero primo 29 per vedere quali sono i numeri primi ad esso più vicini:

$29 \pm 2 = 27$ e 31 primo (e quindi gemello, poiché $d = 2$);
 $29 \pm 4 = 25$ e 33 entrambi non primi;
 $29 \pm 6 =$ 23 e 35 con 23 primo;
 $29 \pm 8 = 21$ e 37 con 37 primo;
 $29 \pm 10 =$ 19 e 39 con 19 primo;
 $29 \pm 12 =$ 17 e 41 con 17 e 41 primi e gemelli;

e quindi con i sei numeri primi più vicini a 29, che sono 31, 23, 37, 19, 17 e 41 entro la distanza $d = 12$.

Con lo stesso sistema, si trova che i numeri primi più vicini a 31 sono 29, 37, 23, 41, 19 e 43 sempre entro la distanza $d = 12$.

Nel caso di numeri primi non gemelli, per esempio 47, i numeri ad esso più vicini sono solo cinque: 43, 41, 53, 37 e 59, già uno in meno rispetto al numero 29, che possiede il gemello 31. Questa differenza aumenta al crescere di p , per esempio i numeri primi più vicini a 101 (gemello di 103) risultano essere cinque: 103, 107, 109, 89 e 113, sempre entro la distanza $d = 12$ (che comunque può essere variata a piacere. Qui si è scelto il numero $d = 12$ per fare un esempio); mentre per il numero 113, che non ha un gemello, i numeri primi più vicini risultano essere solo tre: 109, 107 e 103.

Quindi, per trovare un qualsiasi breve intervallo numerico più ricco di numeri primi rispetto ad altri intervalli della stessa lunghezza (quantificabile in $p \pm d$), occorre che p sia un numero gemello e ovviamente è al centro dell'intervallo numerico scelto, quale che sia p gemello e quale che sia d pari come differenza tra p e i numeri primi più vicini. Ora, poiché i numeri gemelli sono infiniti (vedi "Metodo" n. 21 - 2005) ci sono infiniti intervalli numerici più ricchi di numeri primi rispetto ad analoghi intervalli in cui però p non è un numero primo gemello (non ha importanza se si considera il gemello più piccolo o quello più grande, il risultato non cambia: per esempio per $p = 31$, i sei numeri primi più vicini sono $29 = 31 - 2$ (l'altro gemello),

$37 = 31 + 6$, $23 = 31 - 8$, $41 = 31 + 10$, $19 = 31 - 12$, e $43 = 31 + 12$, così come sei sono i numeri primi più vicini a 29, con la differenza che per $p = 29$ c'è 31 al posto di 29 e 41 al posto di 43 (vedi esempio precedente per $p = 29$)).

Tutto questo spiega, su grande scala, ($p \pm d$, quando p è gemello, è molto più spesso di forma $6n \pm 1$, la forma dei numeri primi, e quindi è più probabile che anche $p \pm d$ sia anch'esso primo come p , cosa che succede più raramente se p non è primo gemello) perché quando N pari è un numero multiplo di 12, e quindi un cosiddetto numero "altamente composto" (avente cioè come fattori primi anche 2, 3 con qualche ripetizione e quindi anche 6 e 12 come fattori composti), esso è somma di due numeri diversi G volte, con G (numero delle coppie di Goldbach per il numero N) circa il doppio del numero G dei numeri pari vicini ad N ma non multipli di 12.

Per esempio, per $p = 101$ (con $N = 2(101 + 1) = 204 = 12 \times 17$), ci sono cinque numeri primi vicini a 101, come è stato detto in precedenza, mentre per $p = 113$, che non è un gemello, esso ha solo tre numeri primi vicini entro la distanza $d = 12$, e $5/3 = 1.66 =$ circa 2, poiché tale rapporto rispecchia il rapporto tra i numeri G di Goldbach per i due $N = 2(101 + 1) = 204$ e $N' = 2(113 + 1) = 228$, che, pur essendo multiplo di 12 (infatti $228 = 12 \times 19$), esso non è la somma di due gemelli, poiché $N/2 \pm 1 = 113$ e $115 = 5 \times 23$ con solo 113 primo ma non gemello.

Quindi, G cresce con apparente irregolarità al crescere di N , ma non scende mai sotto la curva minima G (e quindi non scende mai fino a $G = 0$, che invaliderebbe la soluzione positiva della congettura di Goldbach), né cresce mai sopra la curva massima $2G$, con andamento a "cresta di gallo", mentre la curva dei numeri g (numero delle coppie di gemelli fino a N) ha un andamento più uniforme e regolare.

Quindi, nessuna difficoltà nel trovare numeri primi vicini ad un dato numero. Noi abbiamo considerato p primo e abbiamo usato la soluzione positiva della congettura di Chen, e cioè d pari come infinite volte la differenza tra due numeri primi diversi, ponendo p al centro dell'intervallo $p \pm d$ con d scelto a piacere (abbiamo usato come esempio $d = 12$, ma qualsiasi numero pari va bene lo stesso, tanto più grande quanto più grande sarà ovviamente p).

Tale problema è collegato a Goldbach se si pone $N = 2(p \pm 1)$, dal fatto che se p è gemello esso ha numeri primi vicini per lo stesso motivo per cui $N = 12n$ ha più coppie di Goldbach, circa $2G$, rispetto ai numeri N pari vicini ma non multipli di 12.

Passiamo ora all'altro problema dell'insieme sparso (per esempio i numeri primi) ed un intervallo numerico corto. Per esempio, se vogliamo sapere anche approssimativamente quanti numeri primi ci siano in un dato intervallo corto a piacere (da qualche decina di unità a qualche migliaio o anche più), possiamo procedere in questo modo:

- 1) individuare le potenze di dieci più vicine all'inizio e alla fine dell'intervallo;
- 2) prendere in considerazione le frequenze f dei numeri primi fino a tali potenze n -esime di 10;
- 3) dividere il numero I che esprime l'intervallo numerico (per esempio, se l'intervallo è tra 11.150 e 12.230, I sarà la loro differenza e cioè $I = 12.230 - 11.150 = 1.080$) per la frequenza media dei numeri primi fino a 10.000 (che è 8,1366) e fino a 100.000 (che è 10,4253); facendo la media aritmetica tra le

due frequenze, abbiamo $8,1366 + 10,4253 / 2 = 9,28095$; e $1.080 / 9,28095 = 116,36$ che è un numero molto vicino al numero reale di 110 numeri primi compresi tra 11.150 e 12.230.

Se però da questo numero togliamo metà del numero delle possibili coppie di gemelli, che fanno ottenere un numero calcolato (in questo caso 116) un po' più grande di quello reale (110), otteniamo un nuovo valore calcolato ancora più vicino a quello reale. Poiché il numero delle coppie di gemelli è dato da N diviso il quadrato del suo logaritmo (frequenza), e quindi $g = \text{circa } N / f^2$, nell'intervallo considerato ci saranno grosso modo $I / f^2 = 1.080 / 9,28095^2 = 1.080 / 86,1360 = 12,53$ che diviso per due (poiché uno dei gemelli è già considerato nella stima generale dei numeri primi fino a N) fa 6,265, che sottratto a 116,36 dà un valore di 110,095, vicinissimo al valore reale di 110 numeri primi compresi nell'intervallo considerato. Se l'intervallo invece comprende una potenza di 10 nel suo interno, basterebbe considerare la sola frequenza relativa a questa potenza di 10. Per esempio, per l'intervallo $I = 10.200 - 9.900 = 300$ con 32 numeri primi effettivi nel suddetto intervallo, consideriamo la sola frequenza per 10.000 che è 8,1316, e $300 / 8,1316 = 36,89$, vicino a 32. Ma se togliamo metà dei possibili gemelli $= 300 / 2 \times 8,1316^2 = 2,26$, che sottratto a 36,89 dà 34,63 un valore calcolato ancora più vicino al valore reale di 32.

A volte, però, la metà del numero approssimativo dei gemelli deve essere aggiunta anziché sottratta al numero di numeri primi $\pi(I)$ nell'intervallo considerato. Per esempio, per $I = 8.650 - 8.500 = 150$; frequenza media $8,1 + 10,4 / 2 = 9,25$

$I = 150 / 9,25 = 16,2$. Poiché i numeri primi tra 8.500 e 8.650 sono 18, a 16,2 occorre aggiungere $I / 2f^2 = 150 / 2 \times 85,562 = 0,87$ e avremo $16,2 + 0,87 = 17,07$ numero calcolato molto vicino al valore reale di 18 numeri primi nelle 150 unità dell'intervallo suddetto, e cioè $\pi(150) = 18$. Quindi, la formula più esatta potrebbe essere la seguente:

$$\pi(I) = I / f \pm I / 2f^2,$$

con il segno + quando N è più vicino ma inferiore ad una potenza di 10 (per es. 8.650 è più vicino a 10.000 che a 1.000), mentre il segno -, viceversa, quando N è di poco superiore ad una potenza di 10 (per es. 12.330 è più vicino a 10.000 che a 100.000), ma questa è una cosa che andrà verificata con ulteriori esempi.

Con ciò, anche il problema del numero dei numeri primi compresi in un intervallo numerico corto è così in linea di massima risolto, sia pure in modo eventualmente e ulteriormente perfezionabile. Così come il precedente problema di trovare i numeri primi più vicini ad un dato numero primo p, con la formula $p_v = p \pm d$, con d pari a partire da 2 (che può dare un primo gemello quando il numero $N = 2(p \pm 1) = 12n$ e quindi è un multiplo di 12 (relazione con la nostra soluzione della congettura di Goldbach)). Ne consegue che intorno alla metà di tutti gli N multipli di 12 c'è una maggiore "densità" di numeri primi, che si ripercuote poi su un maggiore numero G di coppie di Goldbach rispetto ai numeri N che non sono

multiplici di 12 (i soli che possono avere l'ultima coppia di Goldbach formata da due numeri gemelli e quindi con differenza minima $d = 2$).

Questi due problemi sembrano legati, specialmente il secondo, alle ipotesi del Nardelli sulle possibili relazioni fisico-matematiche tra vibrazioni delle stringhe e numeri primi, con riferimenti ai teoremi di Goldston e simili su questi argomenti. E quindi, le nostre soluzioni dei due problemi potrebbero essere in qualche modo utilmente collegate alle teorie di stringa considerate dal Nardelli qui di seguito, e da qui poi alle Teorie di Grande Unificazione (GUT) basate sulle teorie di stringa.

2. Soluzioni cosmologiche da un sistema D3/D7.[2] [3] [4] [5]

L'azione completa nella M-teoria consiste di tre parti: un termine di volume, , un termine di correzione quantico, $S_{quantum}$, ed un termine che origina una membrana, S_{M2} . L'azione è allora data dalla somma di queste tre parti:

$$S = S_{bulk} + S_{quantum} + S_{M2} . \quad (2.1)$$

Le parti individuali sono:

$$S_{bulk} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{11}x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{48} G^2 \right] - \frac{1}{12\kappa^2} \int C \wedge G \wedge G , \quad (2.2)$$

dove abbiamo definito $G = dC$, con C che è l'usuale tre-forma della M-teoria, e $\kappa^2 \equiv 8\pi G_N^{(11)}$. Questa è la parte bosonica dell'azione classica della supergravità 11-dimensionale. La principale correzione quantistica all'azione può essere scritta come:

$$S_{quantum} = b_1 T_2 \int d^{11}x \sqrt{-g} \left[J_0 - \frac{1}{2} E_8 \right] - T_2 \int C \wedge X_8 . \quad (2.3)$$

Il coefficiente T_2 è la tensione della membrana. Per il nostro caso, $T_2 = \left(\frac{2\pi^2}{\kappa^2} \right)^{1/3}$, e b_1

è una costante numerica data esplicitamente da $b_1 = (2\pi)^{-4} 3^{-2} 2^{-13}$. L'azione della M2 brana è data da:

$$S_{M2} = -\frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \sqrt{-\gamma} \left[\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu X^M \partial_\nu X^N g_{MN} - 1 + \frac{1}{3} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu X^M \partial_\nu X^N \partial_\rho X^P C_{MNP} \right] , \quad (2.4)$$

dove X^M sono le coordinate di “immersione” della membrana. La metrica del “volume d’universo” $\gamma_{\mu\nu}, \mu, \nu = 0, 1, 2$ è semplicemente il “pull-back” di g_{MN} , la metrica dello spazio-tempo. Il moto di questa M2 brana è ovviamente influenzato dal “background” dei G-flussi.

Classificazione e stabilità delle soluzioni cosmologiche.

La metrica che otteniamo per il tipo IIB è della seguente forma generale :

$$ds^2 = \frac{f_1}{t^\alpha} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2) + \frac{f_2}{t^\beta} dx_3^2 + \frac{f_3}{t^\gamma} g_{mn} dy^m dy^n \quad (2.5)$$

dove $f_i = f_i(y)$ sono alcune funzioni delle coordinate della quadri-varietà e α, β e γ possono essere numeri positivi o negativi. Per arbitrarie $f_i(y)$ e arbitrarie potenze di t , la metrica di tipo IIB può derivare in generale da una metrica di M-teoria della forma

$$ds^2 = e^{2A} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2B} g_{mn} dy^m dy^n + e^{2C} |dz|^2, \quad (2.6)$$

con tre differenti fattori di curvatura A, B e C , dati da:

$$A = \frac{1}{2} \log \frac{f_1 f_2^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{\alpha+\beta}{3}}} + \frac{1}{3} \log \frac{\tau_2}{|\tau|^2}, \quad B = \frac{1}{2} \log \frac{f_3 f_2^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{\gamma+\beta}{3}}} + \frac{1}{3} \log \frac{\tau_2}{|\tau|^2}, \quad C = -\frac{1}{3} \left[\log \frac{f_2}{t^\beta} + \log \frac{\tau_2^2}{|\tau|^2} \right]. \quad (2.7)$$

Per vedere quali sono le possibili scelte per un tale background, occorre trovare la differenza $B - C$. Questa è data da:

$$B - C = \frac{1}{2} \log \frac{f_2 f_3}{t^{\gamma+\beta}} + \log \frac{\tau_2}{|\tau|}. \quad (2.8)$$

Poichè le parti dipendenti inerenti lo spazio ed il tempo della (2.8) possono essere isolate, la (2.8) può annullarsi soltanto se

$$f_2 = f_3^{-1} \cdot \frac{|\tau|}{\tau_2}, \quad \gamma + \beta = 0, \quad (2.9)$$

con α e $f_1(y)$ che rimangono completamente arbitrarie.

Adesso studiamo il seguente caso interessante, dove $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = 0$ $f_1 = f_2$. La 6-varietà interna è indipendente dal tempo. Questo esempio corrisponderebbe ad un esatto background di tipo de-Sitter, e quindi questo produrrebbe un universo in accelerazione con i tre fattori di curvatura dati da:

$$A = \frac{2}{3} \log \frac{f_1}{t^2}, \quad B = \frac{1}{2} \left[\log f_3 + \frac{1}{3} \log \frac{f_1}{t^2} \right], \quad C = -\frac{1}{3} \log \frac{f_1}{t^2}. \quad (2.10)$$

Vediamo che la quadri-varietà interna ha fattori di curvatures dipendenti dal tempo sebbene lo spazio 6-dimensionale di tipo IIB è completamente indipendente dal tempo. Un tale background ha il vantaggio che la dinamica quadri-dimensionale che dipenderebbe sullo spazio interno adesso diviene indipendente dal tempo. Questo caso presuppone che la dipendenza dal tempo ha una forma peculiare, cioè la varietà interna 6D della teoria di tipo IIB è assunta costante, e le direzioni non-compatte corrispondono ad uno spazio di de-Sitter 4D. Usando la (2.10), la corrispondente metrica 11D nello scenario della M-teoria, può allora, in linea di principio, essere inserita nelle equazioni del moto che seguono dalla (2.1).

3. Soluzione applicata alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB.[2] [3] [4] [6]

Consideriamo la seguente azione in $(q+n+2)$ dimensioni, contenente la metrica, $g_{\mu\nu}$, un campo diatonico, ϕ , con un potenziale scalare generale, $V(\phi)$, ed un campo di forza $(q+2)$ -forma, $F_{q+2} = dA_{q+1}$, conformemente accoppiato al dilatone:

$$S = \int_{M_{q+n+2}} d^{q+n+2} x \sqrt{|g|} \left[\alpha R - \beta (\partial\phi)^2 - \frac{\eta}{(q+2)!} e^{-\sigma\phi} F_{q+2}^2 - V(\phi) \right]. \quad (3.1)$$

Qui R è lo scalare di Ricci costruito dalla metrica ed M è una costante. La stabilità richiede che le costanti α, β e η siano positive, infine, $V = \Lambda e^{-\lambda\phi}$ è il potenziale di Liouville, per il quale Wiltshire ed i suoi collaboratori hanno mostrato che le equazioni del moto non ammettono soluzioni di tipo buco nero eccetto per il caso di una costante cosmologica pura negativa, $\lambda = 0$ e $\Lambda < 0$.

La soluzione che cerchiamo può essere realizzata su una tre-sfera S^3 per fornire una soluzione alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB. Questa teoria a 10D contiene un gravitone, un campo scalare e la 3-forma NSNS tra altri campi ed ha un'azione 10 dimensionale, molto simile alla (3.1), fornita da

$$S_{10} = \int d^{10} x \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{4} R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-2\phi} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \right]. \quad (3.2)$$

Abbiamo una configurazione 10 dimensionale data da

$$ds_{10}^2 = \left(\frac{2}{r}\right)^{3/4} \left[-h(r)dt^2 + r^2 dx_{0,5}^2 + \frac{r^2}{h(r)} dr^2 \right] + \left(\frac{r}{2}\right)^{5/4} \left[d\theta^2 + d\psi^2 + d\varphi^2 + \left(d\psi + \cos\theta d\varphi - \frac{Q}{5r^5} dt \right)^2 \right]$$

$$\phi = -\frac{5}{4} \log \frac{r}{2},$$

$$H_3 = -\frac{Q}{r^6} dr \wedge dt \wedge (d\psi + \cos\theta d\varphi) - \frac{g}{\sqrt{2}} \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi. \quad (3.3)$$

Questa soluzione 10-dimensionale descrive NS-5 brane che si intersecano con le stringhe fondamentali nella direzione del tempo.

Adesso effettuiamo la “manipolazione” delle variabili angolari della tre-sfera introducendo le seguenti 1-forme di SU(2) invarianti a sinistra:

$$\sigma_1 = \cos\psi d\theta + \sin\psi \sin\theta d\varphi, \quad \sigma_2 = \sin\psi d\theta - \cos\psi \sin\theta d\varphi, \quad \sigma_3 = d\psi + \cos\theta d\varphi, \quad (3.4)$$

e

$$h_3 = \sigma_3 - \frac{Q}{5} \frac{1}{r^5} dt. \quad (3.5)$$

Poi, eseguiamo il seguente cambio di variabili

$$\frac{r}{2} = \rho^{4/5}, \quad t = \frac{5}{32} \tilde{t}, \quad dx_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} d\tilde{x}_4, \quad dx_5 = \frac{1}{2} dZ, \quad g = \sqrt{2} \tilde{g}, \quad Q = \sqrt{2} 2^7 \tilde{Q}, \quad \sigma_i = \frac{1}{\tilde{g}} \tilde{\sigma}_i. \quad (3.6)$$

É semplice verificare che la soluzione 10-dimensionale (3.3) diviene, dopo questi cambi

$$d\tilde{s}_{10}^2 = \frac{1}{2} \rho^{-1} [d\tilde{s}_6^2] + \frac{\rho}{\tilde{g}^2} \left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\rho^4} d\tilde{t} \right)^2 \right] + \rho dZ^2,$$

$$\phi = -\ln \rho,$$

$$H_3 = -\frac{1}{\tilde{g}^2} \tilde{\sigma}_1 \wedge \tilde{\sigma}_2 \wedge \tilde{h}_3 + \frac{\tilde{Q}}{\sqrt{2}\tilde{g}\rho^5} d\tilde{t} \wedge d\rho \wedge \tilde{h}_3, \quad (3.7)$$

dove definiamo

$$d\tilde{s}_6^2 = -\tilde{h}(\rho) d\tilde{t}^2 + \frac{\rho^2}{\tilde{h}(\rho)} d\rho^2 + \rho^2 d\tilde{x}_{0,4}^2 \quad (3.8)$$

e, dopo aver rimisurato M,

$$\tilde{h} = -\frac{2\tilde{M}}{\rho^2} + \frac{\tilde{g}^2}{32}\rho^2 + \frac{\tilde{Q}^2}{8}\frac{1}{\rho^6}. \quad (3.9)$$

Adesso trasformiamo la soluzione dal riferimento di Einstein a quello di stringa. Questo conduce a

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\rho^{-2}[d\tilde{s}_6^2] + \frac{1}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = -2\ln\rho,$$

$$\bar{H}_3 = H_3. \quad (3.10)$$

Abbiamo una soluzione per la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB con un campo NSNS non banale. Se eseguiamo una trasformazione di S-dualità a questa soluzione, otteniamo ancora una soluzione per la teoria di tipo IIB, ma con una RR 3-forma, F_3 non banale. La trasformazione di S-dualità agisce soltanto sulla metrica e sul dilatone, lasciando invariante la tre-forma. In questo modo siamo condotti alla seguente configurazione, che è S-duale a quella derivata sopra

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}[d\tilde{s}_6^2] + \frac{\rho^2}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + \rho^2 dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = 2\ln\rho,$$

$$F_3 = H_3. \quad (3.11)$$

Riguardo alla T-dualità, nel riferimento di stringa abbiamo

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}[ds_6^2] + \frac{r^2}{g^2}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left(\sigma_3 - \frac{gQ}{4\sqrt{2}}\frac{1}{r^4}dt\right)^2\right] + r^{-2}dZ^2. \quad (3.12)$$

Questa espressione fornisce una soluzione alla supergravità di tipo IIA con RR 4-forma, C_4 eccitata. Procediamo effettuando una trasformazione di T-dualità, che conduce ad una soluzione della teoria di tipo IIB con RR 3-forma, C_3 non banale. La soluzione completa allora diviene

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}[ds_6^2] + \frac{r^2}{g^2}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left(\sigma_3 - \frac{gQ}{4\sqrt{2}}\frac{1}{r^4}dt\right)^2\right] + r^2 dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = 2 \ln r$$

$$C_3 = -\frac{1}{g^2} \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge h_3 - \frac{Q}{\sqrt{2g}} \frac{1}{r^5} dt \wedge dr \wedge h_3. \quad (3.13)$$

Siamo condotti in questo modo, precisamente alla stessa soluzione 10D come è stata trovata in precedenza [vedi formula (3.11)].

4. Connessioni con alcune equazioni riguardanti la funzione zeta di Riemann.[2] [3] [4] [8]

Sono state ottenute delle interessanti connessioni tra alcune soluzioni cosmologiche di un sistema D3/D7, alcune soluzioni riguardanti la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB ed alcune equazioni riguardanti la funzione zeta di Riemann, in modo specifico il teorema di Goldston-Montgomery.

Nel capitolo “Numeri di Goldbach in intervalli corti” dell’articolo di Languasco “La congettura di Goldbach”, è descritto il teorema di Goldston-Montgomery.

Assumiamo l’ipotesi di Riemann. Abbiamo le seguenti implicazioni: se $0 < B_1 \leq B_2 \leq 1$

e $F(X, T) \approx \frac{1}{2\pi} T \log T$ uniformemente per $\frac{X^{B_1}}{\log^3 X} \leq T \leq X^{B_2} \log^3 X$, allora

$$\int_1^x (\psi(1 + \delta)x) - \psi(x) - \delta(x)^2 dx \approx \frac{1}{2} \delta x^2 \log \frac{1}{\delta}, \quad (4.1)$$

uniformemente per $\frac{1}{X^{B_2}} \leq \delta \leq \frac{1}{X^{B_1}}$. Prendiamo il Lemma 3 di questo teorema:

Lemma 3.

Sia $f(t) \geq 0$ una funzione continua definite su $[0, +\infty)$ così che $f(t) \ll \log^2(t+2)$. Se

$$I(k) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin ku}{u} \right)^2 f(u) du = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'(k) \right) k \log \frac{1}{k}, \quad (4.2) \quad \text{allora}$$

$$J(T) = \int_0^T f(t) dt = (1 + \varepsilon') T \log T, \quad (4.3)$$

con $|\varepsilon'|$ piccolo se $|\varepsilon(k)| \leq \varepsilon$ uniformemente per $\frac{1}{T \log T} \leq k \leq \frac{1}{T} \log^2 T$.

Adesso, prendiamo l'equazione (2.10) e precisamente $A = \frac{2}{3} \log \frac{f_1}{t^2}$. Notiamo che dall'equazione (4.3) per $\varepsilon' = -\frac{2}{3}$ e $T = 2$, abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t) dt = (1 + \varepsilon') T \log T = \frac{2}{3} \log 2$. Questo risultato è correlato a $A = \frac{2}{3} \log \frac{f_1}{t^2}$ ponendo $\frac{f_1}{t^2} = 2$, quindi con il Lemma 3 del teorema di Goldston-Montgomery. Allora, abbiamo la seguente relazione interessante

$$A = \frac{2}{3} \log \frac{f_1}{t^2} \Rightarrow \int_0^T f(t) dt = (1 + \varepsilon') T \log T, \quad (4.4)$$

quindi la connessione tra la soluzione cosmologica e l'equazione correlata alla funzione zeta di Riemann.

Adesso, prendiamo le equazioni (3.3) e (3.11) e precisamente $\phi = -\frac{5}{4} \log \frac{r}{2}$ e $\bar{\phi} = 2 \ln \rho$. Notiamo che dall'equazione (4.3) per $\varepsilon' = \frac{3}{2}$ e $T = 1/2$, abbiamo

$$J(T) = \int_0^T f(t) dt = (1 + \varepsilon') T \log T = \frac{5}{4} \log \frac{1}{2}.$$

Inoltre, per $\varepsilon' = 3$ e $T = 1/2$, abbiamo $J(T) = \int_0^T f(t) dt = (1 + \varepsilon') T \log T = 2 \log \frac{1}{2}$.

Questi risultati sono correlati a $\phi = -\frac{5}{4} \log \frac{r}{2}$ ponendo $r = 1$ ed a $\bar{\phi} = 2 \ln \rho$ ponendo $\rho = 1/2$, quindi con il Lemma 3 del teorema di Goldston-Montgomery. Allora, abbiamo le seguenti relazioni interessanti

$$\phi = -\frac{5}{4} \log \frac{r}{2} \Rightarrow -\int_0^T f(t) dt = -[(1 + \varepsilon') T \log T], \quad \bar{\phi} = 2 \ln \rho \Rightarrow \int_0^T f(t) dt = (1 + \varepsilon') T \log T, \quad (4.5)$$

quindi la connessione tra le soluzioni 10-dimensionali ed alcune equazioni correlate alla funzione zeta di Riemann.

5. Su alcune espressioni riguardanti la tesi "Soluzioni solitoniche in teoria di campo di stringa".[2] [7]

Nella tesi “Soluzioni solitoniche in teoria di campo di stringa”, Prof.V.Puletti ha ottenuto funzioni β non lineari per tachioni di stringhe aperte bosoniche, nell’ipotesi di profili tachionici lentamente variabili. In particolare, Puletti ha trovato le soluzioni dell’equazione dei punti fissi conformi del Gruppo di Rinormalizzazione: $\beta^{T_r} = 0$, soluzioni che sono ad azione finita (solitoni), così da essere buone candidate per descrivere configurazioni di brane instabili.

Abbiamo ottenuto interessanti connessioni tra alcune soluzioni di questa tesi ed alcune equazioni inerenti la funzione zeta di Riemann, in particolare il teorema di Goldston-Montgomery, i teoremi del valor medio e il problema di Goldbach in intervalli corti.

L’equazione della funzione di partizione sul disco, che fornisce una teoria di campo non locale effettiva che giace sul contorno, utilizzando il metodo di campo di background nel disco, è:

$$Z(J) = K \int [dX_\mu] e^{-\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{2\pi} \left(\frac{1}{2} X^\mu |i\partial_\tau| X^\mu + T(X) - J \cdot X \right)} \quad (5.1)$$

(la funzione di partizione della stringa di Dirichlet)

Comunque, la funzione di partizione della teoria di contorno sul disco è data in generale da:

$$Z = K \int [dX_\mu] e^{-\left(S_0[X] + \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{2\pi} v[X(\tau)] \right)}. \quad (5.2)$$

Adesso, dalla (5.1) abbiamo:

$$Z(k) = K \int [dX_\mu] e^{-\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{2\pi} \left(\frac{1}{2} X^\mu |i\partial_\tau| X^\mu + T(X) - ik \cdot \dot{X} \right)}, \quad (5.3)$$

che conduce all’espressione finale:

$$Z^{(n)}(k) = K \frac{(-1)^n}{n!} \varepsilon^{-n} \int \prod_{i=1}^n dk_i T(k_i) \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d\tau_i}{2\pi} \right) e^{-\sum_{i=1}^n \frac{k_i^2}{2} G(0) - \sum_{i < j} k_i k_j G(\tau_i - \tau_j)} \delta\left(k - \sum_{i=1}^n k_i\right). \quad (5.4)$$

Adesso, calcoliamo la funzione di partizione al secondo ordine nell’espansione in piccolo derivate del campo tachionico. Dalla (5.4) otteniamo:

$$Z_{(2)}^{(n)}(k) = K \frac{(-1)^n}{n!} \varepsilon^{-n} \int \prod_{i=1}^n dk_i T(k_i) \int \prod_{i=1}^n \frac{d\tau_i}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{k_i^2}{2} G(0) \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{k_j^2}{2} G(0) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2} G(0) \sum_{i<j=1}^n k_i k_j G(\tau_i - \tau_j) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i<j=1}^n k_i k_j G(\tau_i - \tau_j) \sum_{l<m=1}^n k_l k_m G(\tau_l - \tau_m) \} \delta \left(k - \sum_{i=1}^n k_i \right), \quad (5.5) \quad \text{e dal termine}
\end{aligned}$$

sottolineato,

ottendiamo:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^n \left(\frac{d\tau_i}{2\pi} \right) \sum_{i<j=1}^n k_i k_j G(\tau_i - \tau_j) \sum_{l<m=1}^n k_l k_m G(\tau_l - \tau_m). \quad (5.6)$$

Quando gli indici uguali sono $i=l$ oppure $j=m$ oppure $j=l$ oppure $i=m$, gli integrali in $d\tau$ diventano:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i<j=1}^n \sum_{l<m=1}^n (k_i k_j)(k_l k_m) \delta_{il} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau_i}{2\pi} \frac{d\tau_j}{2\pi} G(\tau_i - \tau_j) \int_0^{2\pi} \frac{d\tau_m}{2\pi} G(\tau_i - \tau_m) = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i<j=1}^n \sum_{l<m=1}^n (k_i k_j)(k_l k_m) \delta_{il} \log^2 \frac{c}{4} \quad (5.7) = \\
& = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau_l}{2\pi} \frac{d\tau_m}{2\pi} \frac{d\tau_s}{2\pi} G(\tau_l - \tau_m) G(\tau_s - \tau_m) = \log^2 \frac{c}{4}. \quad (5.7a)
\end{aligned}$$

Dall'integrale $\int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^n \left(\frac{d\tau_i}{2\pi} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2} G(0) \sum_{i<j=1}^n k_i k_j G(\tau_i - \tau_j) = \log \varepsilon \log \frac{c}{4} \sum_{k=1}^n k^2 \log \varepsilon \sum_{i<j=1}^n k_i k_j$ e dalla (5.7), abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\tau_i}{2\pi} \frac{d\tau_j}{2\pi} G(\tau_i - \tau_j) \int_0^{2\pi} \frac{d\tau_l}{2\pi} \frac{d\tau_m}{2\pi} \frac{d\tau_p}{2\pi} G(\tau_l - \tau_m) G(\tau_l - \tau_p) = -\log^3 \frac{c}{4}. \quad (5.7b)$$

Le espressioni fondamentali (5.7a) e (5.7b) sono correlate alle equazioni connesse alla funzione zeta di Riemann, cioè alle equazioni inerenti il teorema di Goldston-Montgomery, i teoremi del valor medio ed il problema di Goldbach in intervalli corti.

Su alcune equazioni inerenti il teorema di Goldston-Montgomery, I teoremi del valor medio e il problema di Goldbach in intervalli corti. [8]

Nel capitolo “Numeri di Goldbach in intervalli corti” dell’articolo di Languasco “La congettura di Goldbach”, è descritto il teorema di Goldston-Montgomery.

Assumiamo l’ipotesi di Riemann. Abbiamo le seguenti implicazioni: Se $0 < B_1 \leq B_2 \leq 1$ e

$F(X, T) \approx \frac{1}{2\pi} T \log T$ uniformemente per $\frac{X^{B_1}}{\log^3 X} \leq T \leq X^{B_2} \log^3 X$, allora

$$\int_1^x (\psi((1+\delta)x)) - \psi(x) - \delta(x)^2 dx \approx \frac{1}{2} \delta X^2 \log \frac{1}{\delta} \quad (5.8),$$

uniformemente per $\frac{1}{X^{B_2}} \leq \delta \leq \frac{1}{X^{B_1}}$. Prendiamo i lemmi (2) e (3) di questo teorema:

Lemma (2). Sia $f(t) \geq 0$ una funzione continua definita su $[0, +\infty)$ così che

$f(t) \ll \log^2(t+2)$. Se $J(T) = \int_0^T f(t) dt = (1 + \varepsilon(T)) T \log T$, allora:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin ku}{u} \right)^2 f(u) du = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'(k) \right) k \log \frac{1}{k} \quad (5.9),$$

con $|\varepsilon'(k)|$ piccolo per $k \rightarrow 0^+$ se $|\varepsilon(T)|$ è uniformemente piccolo per $\frac{1}{k \log^2 k} \leq T \leq \frac{1}{k} \log^2 k$, dove per $k = 5$, abbiamo $\frac{1}{5 \log^2 5} \leq T \leq \frac{1}{5} \log^2 5$.

Lemma (3).

Sia $f(t) \geq 0$ una funzione continua definita su $[0, +\infty)$ tale che $f(t) \ll \log^2(t+2)$. Se

$$I(k) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin ku}{u} \right)^2 f(u) du = \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'(k) \right) k \log \frac{1}{k} \quad (5.9), \text{ allora}$$

$$J(T) = \int_0^T f(t) dt = (1 + \varepsilon') T \log T, \quad (5.10)$$

con $|\varepsilon'|$ piccolo se $|\varepsilon(k)| \leq \varepsilon$ uniformemente per $\frac{1}{T \log T} \leq k \leq \frac{1}{T} \log^2 T$, dove per $T = 5$,

abbiamo $\frac{1}{5 \log 5} \leq k \leq \frac{1}{5} \log^2 5$.

La forma del problema del valor medio è quella del determinare il comportamento di

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt \quad (5.11)$$

(dove ζ è la funzione zeta di Riemann) per $T \rightarrow \infty$, per qualche dato valore di σ .

Abbiamo i seguenti teoremi:

$$1) \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt < AT \min \left(\log T, \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}} \right) \quad (5.12)$$

uniformemente per $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$. Il caso particolare $\sigma = \frac{1}{2}$ di questo teorema è

$$\int_1^T \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt = o(T \log T) \quad (5.13).$$

2) Per $T \rightarrow \infty \quad \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \approx T \log T \quad (5.14).$

3) Sia σ_k il limite più basso dei numeri σ tale che $\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = o(1)$. (5.15)

Allora $\sigma_k \leq \max\left(1 - \frac{1-\alpha}{1+\mu_k(\alpha)}, \frac{1}{2}, \alpha\right)$ per $0 < \alpha < 1$.

4) Per $0 < k \leq 2 \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}} \quad (5.16) \quad \left(\sigma > \frac{1}{2}\right)$

Invece di considerare integrali della forma

$$I(T) = \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \quad (5.17)$$

dove T è grande, adesso considereremo integrali della forma

$$J(\delta) = \int_0^{\infty} |\zeta(\sigma + it)|^{2k} e^{-t/\delta} dt \quad (5.18)$$

dove δ è piccolo. Il comportamento di questi due integrali è molto simile. Se $J(\delta) = o(1/\delta)$, allora

$$I(T) < e \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} e^{-t/T} dt < eJ(1/T) = o(T). \quad (5.19)$$

Viceversa, se $I(T) = o(T)$, allora

$$J(\delta) = \int_0^{\infty} I(t) e^{-t/\delta} dt = [I(t) e^{-t/\delta}]_0^{\infty} + \delta \int_0^{\infty} I(t) e^{-t/\delta} dt = 0 \left(\delta \int_0^{\infty} t e^{-t/\delta} dt \right) = o(1/\delta). \quad (5.20)$$

Il teorema per gli integrali è come segue:

Se $f(t) \geq 0$ per tutti gli t e $\int_0^{\infty} f(t) e^{-t/\delta} dt \approx \frac{1}{\delta}$ (5.21) per $\delta \rightarrow 0$, allora

$$\int_0^T f(t) dt \approx T \quad (5.22) \quad \text{per } T \rightarrow \infty$$

Prima mostriamo che, se $P(x)$ è qualche polinomio, $\int_0^{\infty} f(t) e^{-t/\delta} P(e^{-t/\delta}) dt \approx \frac{1}{\delta} \int_0^1 P(x) dx$. È

sufficiente provare ciò per $P(x) = x^k$. In questo caso il membro di sinistra è

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-(k+1)t/\delta} dt \approx \frac{1}{(k+1)\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^1 x^k dx. \quad \text{Adesso, deduciamo che}$$

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t} g(e^{-\delta t}) dt \approx \frac{1}{\delta} \int_0^1 g(x) dx \quad (5.23)$$

se $g(x)$ è continua, oppure ha una discontinuità della prima specie. Per un dato ε , possiamo costruire polinomi $p(x), P(x)$, tali che $p(x) \leq g(x) \leq P(x)$ e

$$\int_0^1 \{g(x) - p(x)\} dx \leq \varepsilon, \quad \int_0^1 \{P(x) - g(x)\} dx \leq \varepsilon. \quad \text{Allora}$$

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \delta \int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t} g(e^{-\delta t}) dt \leq \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \delta \int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t} P(e^{-\delta t}) dt = \int_0^1 P(x) dx < \int_0^1 g(x) dx + \varepsilon, \quad \text{e ponendo } \varepsilon \rightarrow 0$$

otteniamo $\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \delta \int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t} g(e^{-\delta t}) dt \leq \int_0^1 g(x) dx$. Similmente, ragionando con $p(x)$,

otteniamo

$$\underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \delta \int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t} g(e^{-\delta t}) dt \geq \int_0^1 g(x) dx, \quad \text{da cui segue la (5.23). Adesso sia } g(x) = 0 \quad (0 \leq x < e^{-1}),$$

$$= 1/x \quad (e^{-1} \leq x \leq 1). \quad \text{Allora } \int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t} g(e^{-\delta t}) dt = \int_0^{1/\delta} f(t) dt \quad \text{e} \quad \int_0^1 g(x) dx = \int_{1/e}^1 \frac{dx}{x} = 1. \quad \text{Quindi}$$

$$\int_0^{1/\delta} f(t) dt \approx \frac{1}{\delta}, \quad \text{che è equivalente alla (5.22).}$$

Se $f(t) \geq 0$ per tutti gli t , e, per un dato m positivo,

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-\delta t} dt \approx \frac{1}{\delta} \log^m \frac{1}{\delta}, \quad (5.24)$$

$$\text{allora} \quad \int_0^T f(t) dt \approx T \log^m T. \quad (5.25)$$

La dimostrazione è sostanzialmente la stessa. Abbiamo

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-(k+1)\delta t} dt \approx \frac{1}{(k+1)\delta} \log^m \left\{ \frac{1}{(k+1)\delta} \right\} \approx \frac{1}{(k+1)\delta} \log^m \frac{1}{\delta}, \quad (5.26)$$

ed il ragionamento è simile a quello precedente, con $\frac{1}{\delta}$ sostituito da $\frac{1}{\delta} \log^m \frac{1}{\delta}$. Dalla

(5.26) per $m=3, \delta=4/c$ e $k=\frac{c}{4}-1$, abbiamo:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-(k+1)\delta t} dt \approx \log^3 \frac{c}{4}, \quad (5.26a) \quad \text{mentre, per } m=2, \delta=4/c \text{ e } k=\frac{c}{4}-1, \text{ abbiamo:}$$

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-(k+1)\delta t} dt \approx \log^2 \frac{c}{4}. \quad (5.26b)$$

Nell'articolo "A note on the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals", J.Kaczorowski, A.Perelli e J.Pintz, hanno investigato la dimensione dell'insieme eccezionale per il problema di Goldbach in intervalli corti sotto l'assunzione dell'Ipotesi di Riemann Generalizzata (GRH).

Sia $2 \leq H \leq N$, $L = \log N$ e $Q = \frac{1}{2}\sqrt{H}$, abbiamo per gli archi maggiori le seguenti equazioni:

$$\sum_{a=1}^q * \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |R(\eta, q, a)|^2 d\eta \ll \frac{q}{\phi(q)} \sum_{x(\bmod q)} \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |\psi'(2N, \chi, \eta)|^2 d\eta + \frac{\phi(q)L^4}{qQ}, \quad (5.27)$$

e, assumendo la GRH, per qualche

$$\chi(\bmod q) \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |\psi'(2N, \chi, \eta)|^2 d\eta \ll \frac{NL^2}{qQ}. \quad (5.28)$$

Dalle (5.27) e (5.28), otteniamo:

$$\sum_{a=1}^q * \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |R(\eta, q, a)|^2 d\eta \ll \frac{NL^2}{Q}, \quad (5.29)$$

dove, per $N=5$ e $H=4$, abbiamo

$$\sum_{a=1}^q * \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |R(\eta, q, a)|^2 d\eta \ll 5 \log^2 5. \quad (5.30)$$

Per gli archi minori, abbiamo dalla (5.29) la seguente equazione:

$$\int_{-1/qQ}^{1/qQ} \left| S\left(\frac{a}{q} + \eta\right) \right|^2 d\eta \ll \frac{1}{\phi(q)^2} \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |T(\eta)|^2 d\eta + \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |R(\eta, q, a)|^2 d\eta \ll \frac{N}{\phi(q)^2} + \frac{NL^2}{Q} \ll \frac{N \log^2 P}{P^2} + \frac{NL^2}{Q} \quad (5.31),$$

dove, per $Q=1$, $P < Q$, $P=1/2$ (P è una funzione di H e N), abbiamo:

$$\frac{1}{\phi(q)^2} \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |T(\eta)|^2 d\eta + \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |R(\eta, q, a)|^2 d\eta \ll 20 \log^2 2 + 5 \log^2 5. \quad (5.32)$$

Nell'articolo "On the exceptional set for the $2k$ -twin primes problem" di A.Perelli e J.Pintz, abbiamo il seguente teorema:

Sia k un numero positivo, $0 < \varepsilon < 1/2$ e $A > 0$ siano costanti arbitrarie e $H = N^{1/2+\varepsilon}$. Allora per qualche $0 \leq V \leq N/4$

$$\sum_{K=V}^{V+H} \left| \Psi(N, 2k) - 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \prod_{\substack{p|k \\ p>2}} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) (N-2k) \right|^2 \ll_{\varepsilon, A} HN^2 L^{-A}. \quad (5.33)$$

Abbiamo le seguenti valutazioni:

$$\sum_{K=V}^{V+H} \left| \int_M |S(\alpha)|^2 e(-2k\alpha) d\alpha - 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \prod_{\substack{p|k \\ p>2}} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) (N-2k) \right|^2 \ll HN^2 L^{-A}, \quad (5.34)$$

e

$$\int_{(\xi-1/H, \xi+1/H) \cap m} |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll NL^{-A-1} \quad (5.35)$$

uniformemente per $\xi \in [0, 1]$. Per quanto riguarda la valutazione per gli archi maggiori, abbiamo le seguenti espressioni:

$$\int_M |S(\alpha)|^2 e(-2k\alpha) d\alpha = N \sum_{q \leq L^{B/2}} \frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2} c_q(-2k) + o(NL^{-B/2+1}), \quad (5.36)$$

quindi

$$\sum_{K=V}^{V+H} \left| \int_M |S(\alpha)|^2 e(-2k\alpha) d\alpha - 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \prod_{\substack{p|k \\ p>2}} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) (N-2k) \right|^2 \ll N^2 L^{-B+2} \sum_{k=V}^{V+H} d(2k)^2 + HN^2 L^{-A} \quad (5.37).$$

Dal Teorema 2 del teorema di Brun-Titchmarsh per funzioni moltiplicative, abbiamo che il primo termine nel membro di destra della (5.37) è $\ll HN^2 L^{-A}$ da cui segue la (5.34). Perciò, abbiamo:

$$\sum_{K=V}^{V+H} \left| \int_M |S(\alpha)|^2 e(-2k\alpha) d\alpha - 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \prod_{\substack{p|k \\ p>2}} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) (N-2k) \right|^2 \ll HN^2 L^{-A} + HN^2 L^{-A}, \quad \text{dove}$$

per $A = 2, L = \log N, H = N^{1/2+\varepsilon}, \varepsilon = 0.5, N = 5 \rightarrow H = 5$, abbiamo:

$$\sum_{K=V}^{V+H} \left| \int_M |S(\alpha)|^2 e(-2k\alpha) d\alpha - 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \prod_{\substack{p|k \\ p>2}} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) (N-2k) \right|^2 \ll 250 \log^2 5. \quad (5.38)$$

Per quanto riguarda la valutazione per gli archi minori, abbiamo la seguente espressione:

$$\int_{\xi_{a/q} \setminus \xi'_{a/q}} \left| S\left(\frac{a}{q} + \eta\right) \right|^2 d\eta \ll \frac{L^2}{q^2} \int_{L^B/qN}^{1/qQ} |T(\eta)|^2 d\eta + \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |R(\eta, q, a)|^2 d\eta. \quad (5.39)$$

Abbiamo che il contributo totale del primo integrale nel membro di destra di questa espressione per la quantità in (5.35) è

$$\ll \sum_{q \leq L^{B/2}} \frac{L^2}{q^2} NqL^{-B} + \sum_{L^{B/2} \leq q \leq Q} \frac{L^2}{q^2} N \ll NL^{-A-1}. \quad (5.40)$$

Dalle (5.39)-(5.40) otteniamo

$$\int_{(\xi-1/H, \xi+1/H) \cap m} |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll L \sup_{1 \leq M \leq Q} \sum_{q \in Y_M^\xi} \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |R(\eta, q, a')|^2 d\eta + NL^{-A-1}, \quad (5.41)$$

dove a' indica che $a \pmod{q}$ tale che $I_{a/q}$ interseca $(\xi - \frac{1}{H}, \xi + \frac{1}{H})$. Inoltre, il contributo totale alla (5.41) del termine $O(N^{1/2})$ nell'espressione

$$R(\eta, q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(a) \tau(\bar{\chi}) \Psi'(N, \chi, \eta) + O(N^{1/2}) \quad \text{è}$$

$$\ll L \sum_{q=M}^N \frac{N}{qQ} \ll N^{1/2} L \ll NL^{-A-1}. \quad (5.42) \quad \text{Quindi, otteniamo:}$$

$$\int_{(\xi-1/H, \xi+1/H) \cap m} |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll NL^{-A-1} + NL^{-A-1}, \quad (5.43)$$

dove per $A = 2, N = 5$ e $L = \log N$, abbiamo l'espressione finale:

$$\int_{(\xi-1/H, \xi+1/H) \cap m} |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll 10 \log^3 5. \quad (5.44)$$

Per quanto riguarda le connessioni tra le equazioni della teoria di stringa e le equazioni correlate con la funzione zeta di Riemann, possiamo notare che l'equazione (5.7a) è correlata con il lemma (2), il lemma (3), la (5.26b), la (5.30), la (5.32) e la (5.38); mentre l'equazione (5.7b), è correlata con la (5.26a) e la (5.44). Per esempio, abbiamo:

$$\int_0^\infty f(t) e^{-(k+1)\alpha} dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\tau_l}{2\pi} \frac{d\tau_m}{2\pi} \frac{d\tau_s}{2\pi} G(\tau_l - \tau_m) G(\tau_s - \tau_m), \quad (5.45)$$

e

$$\sum_{a=1}^q \int_{-1/qQ}^{1/qQ} |R(\eta, q, a)|^2 d\eta \Rightarrow \frac{c}{4} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\tau_l}{2\pi} \frac{d\tau_m}{2\pi} \frac{d\tau_s}{2\pi} G(\tau_l - \tau_m) G(\tau_s - \tau_m) \right]. \quad (5.46)$$

Conclusioni.

La formula esplicita che Riemann aveva scoperto utilizzando il paesaggio zeta esprimeva un collegamento diretto fra i numeri primi e gli zeri: essa era intesa come un modo per comprendere i numeri primi attraverso l'analisi degli zeri.

Montgomery non fece altro che ribaltare l'equazione: avrebbe usato le conoscenze sui numeri primi per dedurre il comportamento degli zeri lungo la retta di Riemann.

Tale procedura sembrava indicare che quando si procedeva verso nord lungo la retta di Riemann, gli zeri – a differenza dei numeri primi – tendessero a respingersi.

Montgomery si rese presto conto che, al contrario di quanto accadeva con i numeri primi, ad uno zero non seguivano mai altri zeri in rapida successione. Di fatto, i risultati ottenuti da Montgomery suggerivano la possibilità che gli zeri si distribuissero in maniera totalmente uniforme lungo la retta di Riemann.

Per rappresentare il campo di variazione teorico della distanza fra zeri adiacenti, Montgomery costruì un diagramma che prende il nome di “grafico di correlazione di coppia”. In esso, sull'asse orizzontale è riportata la distanza fra coppie di zeri, mentre l'asse verticale misura il numero di coppie per ogni data distanza.

Successivamente, Montgomery riferì al fisico teorico Freeman Dyson di quello che pensava potesse essere il comportamento degli intervalli che separano coppie di zeri. Non appena menzionò il suo grafico di distribuzione di quegli intervalli, Dyson gli comunicò che era esattamente lo stesso comportamento degli autovalori delle matrici casuali hermitiane. Queste sono entità matematiche usate dai fisici quantistici per predire i livelli energetici nel nucleo di un atomo pesante quando lo si bombarda con neutroni a bassa energia.

Montgomery prendendo una sequenza degli zeri di Riemann e mettendola accanto a quei livelli energetici misurati per via sperimentale, poteva vedere immediatamente una forte correlazione: sia gli intervalli fra gli zeri sia quelli fra i livelli di energia, si susseguivano in maniera molto più ordinata che se fossero stati scelti a caso.

Praticamente, le configurazioni previste da Montgomery nella distribuzione degli zeri erano identiche a quelle che i fisici quantistici stavano scoprendo nei livelli energetici dei nuclei di atomi pesanti. Questo poteva significare che la matematica insita nei livelli quantistici d'energia nei nuclei degli atomi pesanti è la stessa matematica che determina la posizioni degli zeri di Riemann.

Negli anni '20 del novecento i fisici compresero che la matematica che descrive le frequenze del suono emesso da un tamburo poteva essere usata anche per calcolare i caratteristici livelli energetici a cui vibrano gli elettroni in un atomo. In questo senso, atomo e tamburo sono fisicamente equivalenti: forze presenti nell'atomo controllano le vibrazioni delle particelle subatomiche. Nell'atomo gli elettroni vibrano solo in modi ben definiti: quando un elettrone viene eccitato, comincia a vibrare ad una nuova frequenza. Ciascun atomo della tavola periodica ha un proprio caratteristico insieme di frequenze a cui i suoi elettroni prediligono vibrare. Finchè non lo si osserva, sembra che un elettrone possa essere in due posti diversi allo stesso tempo, o che possa vibrare a molte frequenze diverse, a cui corrispondono diversi livelli energetici. Prima che lo osserviamo, un elettrone vibrerà, come un tamburo, in base

ad una combinazione di frequenze diverse, ma all'atto dell'osservazione tutto quello che percepiamo è l'elettrone che vibra ad una singola frequenza. Secondo Montgomery e Odlyzko, gli zeri del paesaggio di Riemann avevano lo stesso aspetto delle frequenze di un tamburo quantistico: gli zeri, cioè, derivavano dai colpi di un tamburo matematico casuale le cui frequenze si comportano come i livelli energetici della fisica quantistica. Odlyzko tracciò il grafico relativo agli zeri di Riemann e lo confrontò con il grafico corrispondente che si otteneva dall'analisi delle frequenze di un tamburo quantistico casuale. Osservando l'andamento dei due grafici si accorse che, se all'inizio c'era una corrispondenza molto buona, ad un certo punto i dati relativi agli zeri di Riemann si discostavano bruscamente dal grafico delle frequenze teoriche dei tamburi quantistici casuali. Il grafico non seguiva più l'andamento statistico delle distanze fra zeri successivi, così come accadeva all'inizio, ma quello delle distanze fra l' n -esimo e l' $(n+1000)$ -esimo zero. Odlyzko si era imbattuto negli effetti prodotti sul paesaggio di Riemann dalla "teoria del caos".

Il termine "caos" si utilizza quando un sistema dinamico è molto sensibile alle condizioni iniziali. Quando una minima variazione nel modo in cui si appronta un esperimento produce una drastica differenza nei risultati che si ottengono, questa è la firma inconfondibile del caos. Una delle manifestazioni della matematica del caos si ha nel gioco del biliardo. Su un normale tavolo da biliardo rettangolare non si manifesta alcun comportamento caotico nella traiettoria seguita dalla biglia. Essa è perfettamente prevedibile, ed un leggero cambiamento nella direzione iniziale del tiro non la altera in maniera sensibile. Ma su un tavolo da biliardo di forma simile a quella di uno stadio le traiettorie delle biglie assumono un aspetto completamente diverso: la fisica di un tavolo da biliardo a forma di stadio è "caotica".

Quando i fisici analizzarono l'andamento statistico dei livelli energetici, scoprirono che esso variava a seconda che il tavolo da biliardo producesse traiettorie caotiche oppure normali. Se gli elettroni erano confinati in un'area rettangolare, in cui tracciavano traiettorie normali, non caotiche, allora i loro livelli energetici si distribuivano in modo casuale. In particolare, i livelli energetici risultavano spesso ravvicinati. Quando, invece, gli elettroni erano confinati in un'area a forma di stadio, in cui le traiettorie sono caotiche, i livelli energetici non erano più casuali. Seguivano difatti un andamento molto più uniforme, in cui non comparivano mai due livelli ravvicinati. I biliardi quantistici caotici producevano lo stesso andamento regolare già osservato da Dyson nei livelli energetici dei nuclei di atomi pesanti e da Montgomery e Odlyzko nell'ubicazione degli zeri di Riemann. Fu il Prof. M. Berry il primo a comprendere che gli scostamenti notati da Odlyzko fra i grafici della varianza degli zeri di Riemann e dei tamburi quantistici casuali indicavano che un sistema quantistico caotico poteva offrire il migliore modello fisico per il comportamento dei numeri primi.

Se il segreto dei numeri primi è davvero un gioco di biliardo quantistico, allora i numeri primi sono rappresentati da traiettorie molto speciali sul tavolo del biliardo. Alcune traiettorie fanno ritornare la biglia al punto di partenza dopo un certo numero di passaggi sul tavolo, dopodichè si ripetono uguali a sè stesse. Sembra che siano proprio queste traiettorie speciali a rappresentare i numeri primi: ad ogni traiettoria

corrisponde un numero primo, e tanto più una traiettoria si estende prima di ripetersi, tanto più è grande il numero primo corrispondente. La nuova svolta impressa da Berry potrebbe portare ad un'unificazione di tre grandi temi scientifici: la fisica quantistica, il caos e i numeri primi. Forse l'ordine che Riemann aveva sperato di scoprire nei numeri primi è descritto dal caos quantistico.

E la teoria di superstringa? E' possibile trovare delle correlazioni tra essa e ciò che abbiamo appena menzionato?

Un elettrone è una particella con spin pari a metà di un numero dispari ($1/2$). Una tale particella viene chiamata "fermione". I "bosoni", invece, sono particelle aventi spin intero ($1,2$). Un esempio di bosone è il fotone, la particella mediatrice della forza elettromagnetica. Tutte le particelle materiali hanno spin pari a quello dell'elettrone. Questo fatto si riassume affermando che le particelle hanno spin $1/2$, dove il valore $1/2$ fornisce, più o meno, una misura di quanto veloce in senso quantomeccanico la particella sta ruotando. Per essere più precisi, spin $1/2$ significa che il "momento angolare" dell'elettrone, dovuto alla rotazione, è pari a $h/2$.

Nel contesto della teoria delle stringhe, lo spin, così come la massa e la carica, è associato ad un particolare modo di vibrazione di una stringa. L'elettrone è quindi rappresentabile da una stringa fermionica il cui modo di vibrazione origina una particella avente spin $1/2$.

Affermare quindi che la funzione zeta di Riemann correla il moto orbitale degli elettroni in un atomo di numero atomico arbitrario, è come dire che la funzione zeta correla il modo di vibrazione di una stringa fermionica in un atomo avente numero atomico arbitrario. La funzione zeta di Riemann, e i teoremi ad essa correlati, sono quindi correlabili ad una stringa fermionica il cui modo di vibrazione origina una particella avente spin $1/2$, quale è appunto l'elettrone.

Da quanto detto è possibile comprendere il motivo fisico per cui sono state ottenute le connessioni tra alcune soluzioni cosmologiche di un sistema $D3/D7$, alcune soluzioni riguardanti la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB e le equazioni inerenti il Teorema di Goldston-Montgomery, correlato ai numeri di Goldbach in intervalli corti e quindi alla funzione zeta di Riemann.

Pertanto il risultato a cui si giunge è il seguente: le configurazioni nella distribuzione degli zeri lungo la retta di Riemann sono correlate ai modi di vibrazioni delle superstringhe in atomi aventi numeri atomici arbitrari.

Per quanto concerne la conclusione matematica a cui si può giungere è che da tale lavoro, con le connessioni trovate tra funzione zeta di Riemann e teoria di stringa, l'ipotesi di Riemann, anche se non ancora dimostrata, ne esce sicuramente rafforzata.

Ringraziamenti.

Ritengo doveroso segnalare che il capitolo 1, è stato elaborato interamente grazie agli studi condotti da **Francesco Di Noto** sul Teorema di Goldbach e sui Numeri Primi Gemelli.

È soltanto il nostro impegno comune, quindi, che ha permesso la stesura del presente lavoro. Desidero quindi ringraziare **Francesco Di Noto** e la docente di Matematica **Annarita Tulumello**, del Gruppo Eratostene di Caltanissetta, per la loro preziosa collaborazione e per la cortesia riguardo l'invio del materiale fornitomi dal **Di Noto**.

Sono grato anche al fisico e matematico **A. Palumbo** per i suoi validi consigli ed utilissime discussioni. Desidero, inoltre, rivolgere un ringraziamento particolare al fisico teorico, **G. Tasinato** per la sua amicizia e disponibilità.

Bibliografia

- [1] Francesco Di Noto - Annarita Tulumello “Teorema sulle coppie di Goldbach e le infinite coppie di numeri gemelli” – Metodo n.21, Giugno 2005.
- [2] Michele Nardelli “New mathematical connections concerning string theory” – Giannini Editore – Settembre 2005.
- [3] Michele Nardelli “New mathematical connections concerning string theory: II” – Ed. “Michelangelo” – Marzo 2006.
- [4] A. Palumbo, M. Nardelli “The theory of string: a candidate for a generalized unification model” – Boll. Soc. Natur. Napoli – Nuova Serie – Vol III (in press).
- [5] P. Chen, K. Dasgupta, K. Narayan, M. Shmakova, M. Zagermann “Brane, Inflation, Solitone and Cosmological Solutions I”; hep-th/0501185.
- [6] C.P.Burgess, C. Nunez, F. Quevedo, I. Zavala C., G. Tasinato “General brane geometries from scalar potentials: gauged supergravities and accelerating universes”; JHEP08 (2003) 056.
- [7] V. Puletti “Soluzioni Solitoniche in Teoria di Campo di Stringa” Tesi di Laurea Specialistica in Fisica – Università degli Studi di Perugia, 2003-2004.
- [8] A. Languasco “La Congettura di Goldbach” Tesi di Dottorato di Ricerca in Matematica. Università degli Studi di Genova, VI ciclo, 1995.

Finito di Stampare nel mese di Luglio 2007
presso DI. VI. Service – Via Miranda, 50 – 80131 Napoli
Tutti i diritti riservati