NOTE SU UNA SOLUZIONE POSITIVA
PER LE DUE CONGETTURE DI GOLDBACH

Michele Nardelli[1,2], Francesco Di Noto, Giovanni Di Maria, Annarita Tulumello

[1] **Dipartimento di Scienze della Terra**
Università degli Studi di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10
80138 Napoli, Italy

[2] **Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"**
Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Polo delle Scienze e delle Tecnologie
Monte S. Angelo, via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

ABSTRACT

In this work, we found a proof (positive solution G(N) > 0) about Goldbach's conjecture; and as a consequence, also about weak Goldbach's conjecture (or "problem of three primes"), path appropriate calculations, formulas and numeric Tables.

At last we mention on a possible relation between a generalized Riemann Hypothesis and weak Goldbach's conjecture, now proved for every odd numbers N $\geq$ 7.

RIASSUNTO

In questo lavoro troviamo una soluzione positiva ($G(N) \geq 1$) della Congettura forte di Goldbach (N pari ≥ 4 come somma di due numeri primi) e di conseguenza anche per la congettura debole di Goldbach (N dispari ≥ 7 come somma di tre numeri primi), che esporremo con l'aiuto di reticoli numerici, tabelle, formule e grafici.

Infine accenneremo ad una possibile connessione tra la la congettura debole di Goldbach e l'ipotesi generalizzata di Riemann, connessione che non esclude una possibile e più semplice e diretta relazione tra congettura forte di Goldbach e ipotesi di Riemann, e quindi una possibile futura dimostrazione dell'ipotesi di Riemann basata in tutto o in parte sulle nostre suddette soluzioni delle due congetture di Goldbach; che quindi non sarebbero così solo fini a se stesse, ma anche tappe iniziali di un possibile percorso matematico verso la dimostrazione dell'ipotesi di Riemann e/o di altre congetture ancora irrisolte sui numeri primi.

D I M O S T R A Z I O N E

Costruendo una tavola di addizione dei numeri dispari fino ad un certo numero dispari, e cancellando le righe e le colonne che iniziano con un numero dispari composto, per esempio 9, 21, 25, 27, ecc. , rimarranno le caselle con i numeri pari che sono somma dei due numeri primi p e q che sono all'inizio della p-esima riga e della q-esima colonna che si incrociano nella casella con un numero pari N = p + q. Si noterà che, estendendo la tavola numerica all'infinito, qualsiasi numero pari maggiore di 4 sarà rappresentato da almeno una casella (anche 4 = 2 + 2), e quindi N sarà somma, almeno una volta, di due numeri primi p e q. Chiameremo G(N) il numero delle coppie di numeri primi, e quindi coppie di Goldbach, che soddisfano la congettura per ogni numero N pari.

Al crescere di N il numero G(N) delle caselle che lo contengono cresce anch'esso, e si può stimare, come già sanno i matematici che hanno studiato il problema, in

$$G(N) \approx \frac{N}{(\ln N)^2} \qquad (1)$$

e così pure per il numero delle coppie di numeri primi gemelli

fino a un qualsiasi numero N.

Noi abbiamo trovato formule simili ma leggermente diverse per il numero G(N) delle coppie di Goldbach per ogni N pari, sia per il numero g(N) delle coppie di numeri gemelli fino ad un numero N grande quando si voglia

$$G(N) \approx \frac{N}{(\ln N)^2} \cdot c \qquad (2)$$

$$g(N) \approx \frac{N}{(\ln N)^2} \cdot c^{4,5} \qquad (3)$$

con c = 1, 08366 = numero correttore di Legendre.

Questo perché,con i logaritmi decimali, il rapporto $\frac{N}{\pi(N)} \approx \text{Log } N$ **e per i numeri di forma** $N = 10^n$ **tale rapporto è circa 2n, ma ancora più preciso è 2nc, che elevato al quadrato nella (1), diventa**

$$G(N) \approx \frac{N}{2^2 \cdot n^2 \cdot c^2} \approx \frac{N}{4 \cdot n^2 \cdot c^2} \qquad (4)$$

che però dà risultati molto più precisi se si scinde in due forme leggermente diverse per G(N) e g(n):

$$G(N) \approx \frac{N}{4 \cdot n^2 \cdot c^3} \qquad (5)$$

$$g(N) \approx \frac{N}{4 \cdot n^2} \cdot c \qquad (6)$$

Trasformando queste formule considerando i logaritmi naturali ln N invece che quelli decimali Log N, si avranno la (2) e la (3), che danno risultati molto vicini a quelli ottenuti con la (5) e la (6), e con ottima approssimazione con i valori reali, soprattutto per N di forma N = 6n +2 (Per N di forma N = 12n i valori reali sono un po' più alti). In ogni caso non si avrà mai G(N) = 0, cioè non esiste un numero N pari che non sia la somma di due numeri primi, unico contro-esempio della congettura di Goldbach, valida così per tutti i numeri pari N $\geq$ 4 e quindi vera.

T A V O L A   DI   A D D I Z I O N E

D E I   N U M E R I   D I S P A R I

	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	…
3	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	…
5	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	…
7	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	…
9	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	…
11	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	…
13	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	…
15	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	…
17	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	…
19	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	…
21	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

I numeri scritti in carattere più piccolo si considerano cancellati,

poiché appartengono a righe e colonne che cominciano con numeri dispari composti, e che quindi non possono formare coppie di Goldbach p e q con p e q = N pari.

Si nota facilmente che un numero N pari si trova in caselle non cancellate all'incrocio di righe e colonne che iniziano da due numeri primi p e q che danno N come somma, con soddisfazione della congettura per ogni casella con N pari = p + q.

Per es. N = 22 si trova in cinque caselle, di cui una sulla diagonale (22 = 11 + 11); delle quattro altre caselle due sono simmetriche, poiché 22 = 3 + 19 = 19 +3, 22 = 5 +17 = 17 + 5, e quindi le vere e proprie coppie di Goldbach per N = 22 sono tre:

22 = 3 + 19
22 = 5 + 17
22 = 11 + 11

Così come per tutti gli altri numeri pari N, che compariranno almeno una volta (G(N) = 1) estendendo la tavola all'infinito; e quindi la congettura di Goldbach è vera, non trovandosi mai G(N) = 0, unico ma inesistente contro esempio , per i motivi che si diranno in seguito (***G(N) cresce con N, sia pure con piccole ma ininfluenti oscillazioni, peraltro per eccesso, per N multipli di 6 e di 12***

rispetto ai numeri vicini $N = 6n \pm 2, \quad 12n \pm 2$).

E costruendo la tavola di addizione dei soli numeri primi, si avrebbe lo stesso risultato:

	3	5	7	11	13	…
3 .	**6**	**8**	**10**	**14**	**16**	**…**
5 .	**8**	**10**	**12**	**16**	**18**	**…**
7 .	**10**	**12**	**14**	**18**	**20**	**…**
11.	**14**	**16**	**18**	**22**	**24**	**…**
13.	**16**	**18**	**20**	**24**	**26**	**…**
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	

Questa tavola di addizione dei soli numeri primi è una riduzione della precedente tavola di addizione dei numeri dispari (primi e composti dispari); ed estendendo anche questa all'infinito, qualsiasi N pari maggiore di 2 apparirà sempre più in 2·G(N) caselle simmetriche, e quindi in G(N) caselle = coppie di Goldbach, e il cui

numero approssimativo leggermente per difetto o per eccesso si può stimare con le formule logaritmiche che si vedranno nelle pagine seguenti.

Poiché la prima tavola è simmetrica rispetto alla diagonale, essendo la somma N = p + q = q + p commutativa, il numero delle caselle non cancellate e che contengono N sono per metà nella parte superiore della tavola, e metà nella parte inferiore, con alcune caselle (con q = p e quindi N = p + p = 2p) esattamente sulla diagonale; quindi metà delle caselle simmetriche si possono eliminare, essendo ininfluenti sulla congettura di Goldbach (N = p + q oppure N = q + p non importa) . N compare in G' caselle, ma noi considereremo le G = G' / 2 caselle, o (G' – 1) / 2 caselle se G' è dispari, caso che si verifica se una casella con N = 2p giace esattamente sulla diagonale, e che è simmetrica di se stessa.

Come si vede nel reticolo,

6 = 3 + 3 in una G' casella sulla diagonale, G(6) = (G'+1) / 2 = 2/2 = 1

8 = 3 +5 = 5 +3 in due G' caselle, G(8) = G' / 2 = 2/2 = 1

10 = 3 + 7 = 7 + 3 in tre G' caselle, G(10) = (G'+ 1) / 2 = 4/2 = 2

… … … … … … …

e così via per qualsiasi numero pari N successivo, G(N) = G' /2 se G' è pari, G(n) = (G'+1) / 2 se G' è dispari, per es., per N =22, G' = 5, e quindi G(22) = (5 +1) / 2 = 6 / 2 = 3, e cioè le tre coppie di numeri primi con somma 22:

22 = 3 + 19

22 = 5 + 17

22 = 11 + 11

Estendendo questa tavola all'infinito, qualsiasi numero pari N sarà in almeno una casella non cancellata, e quindi sarà somma di almeno due numeri primi p e q tali che N = p + q, e più in generale, in G(N) caselle stimate con le formule (2) e (5).

Per esempio, per N = 100, il valore reale (v.r.) di G(100) è 6, cioè il numero pari 100 è la somma di ben sei coppie diverse di numeri primi, come vedremo nelle pagine successive; con la formula (2) otteniamo un risultato di

$$G(100) \approx \frac{100}{(\ln 100)^2} \cdot 1{,}08366 = \frac{100}{4{,}06^2} \cdot 1{,}08366 = 6{,}57 \approx 6 \text{ v.r.}$$

Mentre con i logaritmi decimali avremo, con la formula (5):

$$G(100) \approx \frac{100}{4 \cdot 2^2 \cdot c^3} = \frac{100}{16 \cdot 1{,}2725} = \frac{100}{20.36} = 4{,}91 \approx 6 \text{ v.r.}$$

Quindi la formula corretta (2) basata sui logaritmi naturali è un po' più precisa della (5) basata sui logaritmi decimali, ma entrambe sono più precise della formula unica generale per coppie di Goldbach e di gemelli :

$$G(100) = g(100) \approx \frac{100}{(\ln 100)^2} = 100 / 21{,}16 = 4{,}72$$

Il numero reale g(100) di coppie di gemelli fino a 100 è 8 mentre il valore stimato con la (3) è:

$$g(100) \approx \frac{100}{(\ln 100)^2} \cdot c^{4,5} = \frac{100}{21.16} \cdot 1{,}4355 = 6{,}78 \approx 8 \text{ v.r.}$$

Mentre con la formula (6) si ha l'altra stima:

$$g(100) \approx \frac{100}{4 \cdot 4} \cdot c = 6{,}25 \cdot 1{,}08366 = 6{,}77 \approx 8 \text{ v.r.}$$

quindi con risultati quasi coincidenti in entrambi i casi.

Per N = 1 000 avremo brevemente , con la (5) e con la (6),

$G(1\,000) = 21{,}82 \approx 27$ v.r e $g(1\,000) = 30{,}10 \approx 33$ v.r.

e per N = 10 000 avremo :

G(10 000) = 122,78 ≈ 128 v.r.

g(10 000) = 169,32 ≈ 170 v.r.

valori molto più precisi di quello ottenuto con la formula unica (1)

$$G\,(10\,000) \approx g(10\,000) = \frac{10\,000}{(\ln 10\,000)^2} = \frac{10\,000}{84{,}82} = 117{,}89$$

valore che è chiaramente inferiore ai valori reali 128 e 170;

mentre con la formula unica con i logaritmi decimali si ha

$$G(10\,000) \approx g(10\,000) \approx \frac{10\,000}{4 \cdot 4^2} = \frac{10\,000}{64} = 156{,}\,25$$

valore più elevato del precedente e quasi intermedio tra i due

valori reali G(10 000) = 128 e g(10 000) = 170.

Ma torniamo , dopo questi esempi di calcoli per il numero delle coppie di Goldbach per N e per il numero di coppie di numeri di gemelli fino a N, alla dimostrazione per la sola congettura di Goldbach.

Poiché la tavola di addizione non si può estendere in pratica ad N molto grandi, occorrendo grandissimi fogli di

carta, ne tanto meno all'infinito, si può aggirare il problema per ogni N selezionando e osservando solo le coppie di numeri dispari che riguardano soltanto il numero N, e tra queste coppie, individuare facilmente e contare solo quelle costituite da numeri primi p e q tali che p + q = N e che quindi soddisfano la congettura di Goldbach per quel dato N.

Abbiamo chiamato questo metodo "il metodo delle colonne a e b", con a e b dispari, tali che a + b = N, e poi cancellare o ignorare le coppie in cui è presente un numero dispari composto, il che consiste nel cancellare le caselle di N quando uno dei due numeri a e b non è primo; rimangono le coppie /caselle con entrambi i numeri a = p e b = q con p e q entrambi primi e quindi p + q = N.

a è crescente da 1 a N / 2, e b decrescente da N a N/2,

o a (N/2) ± 1 se N / 2 è pari.

In tal modo, tutte le coppie di numeri hanno come somma N, e naturalmente abbiamo una coppia di Goldbach quando entrambi i numeri a e b sono entrambi primi p e q, con p +q = N.

Faremo tre soli esempi per N = 50, N = 60 ed N = 70, anche per mostrare come ***i multipli di 6, cioè di forma N = 6n, e ancor più***

***di 12, , cioè N = 12n, hanno più coppie di Goldbach rispetto ai numeri vicini   N = 6n ± 2 , 12n ± 2 non divisibili per 3*, come vedremo nella TABELLA 1 finale.**

Per N = 50 = 6 · 8 + 2 = 12 · 4   + 2 = 48 + 2   =   50

a + b = 50

1 + 49 = 50

3 + 47 = 50 = coppia di Goldbach (3 e 47 primi)

5 + 45 = 50

7 + 43 = 50 = coppia di Goldbach (7 e 43 primi)

9 + 41 = 50

11 + 39 = 50

13 + 37 = 50 = coppia di Goldbach (13 e 37 primi)

15 + 35 = 50

17 + 33 = 50

19 + 31 = 50 = coppia di Goldbach (19 e 31 primi)

21 + 29 = 50

23 + 27 = 50

25 + 25 = 50

G(50) = 4 valore reale di coppie di Goldbach per N = 50

Con la formula logaritmica (2) si ha la stima G(50) = 3,5 ≈ 4 = v.r.

Per N = 60 = 6 · 10 = 12 · 5

a + b = 60

1 + 59 = 60

3 + 57 = 60

5 + 55 = 60

7 + 53 = 60 coppia di Goldbach (7 e 53 primi)

9 + 51 = 60

11 + 49 = 60

13 + 47 = 60 coppia di Goldbach (13 e 47 primi)

15 + 45 = 60

17 + 43 = 60 coppia di Goldabch (17 e 43 primi)

19 + 41 = 60 coppia di Goldbach (19 e 41 primi)

21 + 39 = 60

23 + 37 = 60 coppia di Goldbach (23 e 37 primi)

25 + 35 = 60

27 + 33 = 60

29 + 31 = 60 ultima coppia di Goldbach (29 e 31 primi e gemelli, la cui somma è sempre un multiplo di 12, ma non viceversa, come vedremo in seguito).

G(60) = 6 valore reale

con la formula logaritmica (2) otteniamo 3,88 , approssimato per difetto a 6 = v.r.

Per N = 62 = 6 · 10 + 2 = 10 · 6 +2 = 62

a + b = 62

1 + 61 = 62

3 + 59 = 62 coppia di Goldbach (3 e 59)

5 + 57 = 62

7 + 55 = 62

9 + 53 = 62

11 + 51 = 62

13 + 49 = 62

15 + 47 = 62

17 + 45 = 62

19 + 43 = 62 coppia di Goldabch 19 e 43 primi

21 + 41 = 62

23 + 39 = 62

25 + 37 = 62

27 + 35 = 62

29 + 33 = 62

31 + 31 = 62 coppia di Goldbach (31 primo)

G(62) = 3 valore reale;

con la formula logaritmica (2) abbiamo 3,9 ≈ 3 = v.r.

Perché G(60) = 6 mentre G(62) = 3, pur essendo 62 > 60 ?

(Il fenomeno è più evidente per N ancora più grandi); anche per 58, numero pari più vicino e inferiore a 60, G(58) = 4, e per 62,il numero pari più vicino e superiore a 60, G(62) = 3, che è già la meta di G(60) = 6; il fenomeno si ripete a tutte le scale: per le decine, le centinaia, le migliaia di unità ecc., vedi "Andamento ciclico del

numero G(N) delle coppie di Goldbach")

Per il semplice fatto che per N multiplo di 3, molte coppie a + b sono formate da due multipli di 3 (per esempio, per N =60, le coppie 3 e 57, 9 e 51, 15 e 45, 21 e 39, 27 e 33) dando più possibilità agli altri numeri dispari , e quindi con più possibilità di essere entrambi numeri primi, di accoppiarsi tra di loro e quindi di dare origine a più coppie di Goldbach; cosa che non succede per numeri N non divisibili per 3 per i quali i multipli di 3, non primi, si accoppiano con numeri primi e quindi non possono formare coppie di Goldbach , che per definizione debbono essere costituite da due numeri primi; per esempio,

per N = 70, le coppie 9 e 61, 27 e 43, 33 e 37 non sono coppie di Goldbach, poiché i multipli di 3 (e cioè 9, 27 e 33) chiaramente non sono primi.

Si può controllare questo fenomeno (*maggiore numero di G(N) per N multiplo di 6 o di 12*), con un test su Internet che dà, inserendo il numero N, tutte le coppie di primi che soddisfano la congettura di Goldbach per il numero N, anche se con dieci coppie per ogni pagina (vedere TABELLA 1

ed altre tabelle finali), ed anche per numeri molto grandi, tipo $N = 10^{30}$ o, volendo, anche ancora più grandi. Il sito è :

http:// wims/unice.fr/wims/wims/cgi

Quindi, anche se i valori reali di G(N) oscillano leggermente intorno ai valori medi dati dalle formule logaritmiche (2) e (5), essi non raggiungono mai, nemmeno per i numeri N di forma 6n +2 per i quali tali valori sono minori rispetto a quelli relativi ai numeri pari contigui N di forma N = 6n ed N = 12n (vedi TABELLA 1), il valore G(N) = 0, e quindi non daranno mai un contro-esempio della congettura, dimostrando così che essa è vera.

Sono già stati testati tutti i numeri pari fino a $N = 10^{14}$, senza trovare contro-esempi; questi non si possono mai trovare perché G(N) cresce con N, sia pure con le piccole oscillazioni tra un numero pari e il successivo in base alla loro forma 6n, 6n +2 ecc. come prima detto.

Per $N = 10^{14}$, per esempio, con la formula logaritmica (2), avremo:

$$G(10^{14}) \approx \frac{10^{14}}{(\ln 10^{14})^2} \cdot 1{,}08366 = \frac{10^{14}}{32{,}23611913^2} \cdot 1{,}08366$$

$$= \frac{10^{14}}{1\,039{,}17203} = 96\,230\,457\,630$$

che è già approssimato per difetto, come tutti i valori dati dalla (2); almeno 96 miliardi di coppie di Goldbach per $N = 10^{14}$, mentre con la formula (5) abbiamo un valore di 100 236 558 300, valori entrambi molto vicini al valore reale (per sottoporre 10^{14} al test prima indicato e conoscere tutte le circa 96 miliardi di coppie di Goldbach, occorrerebbe stampare tutte le circa 9,6 miliardi di pagine, con 10 coppie di Goldbach per ogni pagina).

I test al computer su numeri molto grandi si basano però sulla ricerca di una sola coppia di Goldbach per ogni N testato.

Anche il suddetto test offre questa opzione, che però è insufficiente a dimostrare la congettura a differenza dell'altra opzione che dà tutte le coppie di Goldbach per ogni N inserito, ed è l'andamento del numero G(N), sia pure leggermente oscillante, ma mai fino a 0, che è effettivamente utile alla dimostrazione.

Per quanto riguarda le oscillazioni di G(N) si veda il paragrafo "Andamento ciclico del numero G(N) delle coppie di Goldbach", del nostro precedente lavoro

"Connessione Goldbach – gemelli – Polignac"

già pubblicato sul sito

http://xoomer.alice.it/stringtheory

con il riassunto "Note sulla connessione Goldbach – gemelli - Polignac" già sull'archivio Solar del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

La connessione tra la nostra soluzione della congettura di Goldbach e la congettura dei numeri gemelli, è che qualsiasi coppia di numeri gemelli, è sempre l'ultima coppia di Goldbach per molti N di forma 12n (tranne la sola prima coppia di gemelli 3 e 5, poiché $3 + 5 = 8$; ma la somma di due gemelli successivi p e q, quantunque grandi è sempre $p + q = 12n = N$).

Questo perché tutti i numeri primi tranne il 2 e il 3 si possono scrivere come $p = 6m \pm 1$, e $q = 6n \pm 1$, e poiché per i numeri gemelli $m = n$, $p = 6n - 1$ e $q = 6n + 1$, la loro somma si può scrivere come $p + q = 6n - 1 + 6n + 1 = 2 \cdot 6n = 12n = N$, mentre la loro differenza come $q - p = 6n + 1 - (6n - 1) = 6n + 1 - 6n + 1 = 1 + 1 = 2$ quali che siano i numeri gemelli p e q tranne che 3 e 5, anche se la loro differenza è ugualmente $5 - 3 = 2$.

La connessione tra la nostra soluzione per la congettura di Goldbach e la congettura di Polignac (la cui soluzione è riportata

nel suddetto nostro lavoro) è invece che, essendo la congettura di Polignac una estensione della congettura dei numeri primi gemelli, (la differenza tra due numeri primi consecutivi = 2n anziché soltanto 2 come nei numeri gemelli), una coppia di Polignac è pure l'ultima coppia di Goldbach per tutti i numeri pari non multipli di 12, ma anche per i rimanenti multipli di 12, per esempio 48 è il primo multiplo di 12 non somma di due primi gemelli; infatti l'ultima coppia di Goldbach per N = 48 è la coppia di Polignac

19 e 29, infatti 19 + 29 = 48, e come differenza abbiamo

D = 29 – 19 = 10 = 2 · 5 , come semidifferenza d = 10 / 2 = 5

che ci permette di trovare 29 e 19 con la relazione $\frac{48}{2} \pm d = p$ **e** q **;**

Per i numeri gemelli, essendo D = 2 e d = 1, abbiamo

$\frac{N}{2} \pm 1 = p$ **e** q **gemelli, per es.** $\frac{60}{2} \pm 1 = 29$ **e 31 gemelli 60 = 12 · 5)**

Sia i numeri primi gemelli sia i numeri primi di una qualsiasi coppia di Polignac sono ovviamente numeri primi consecutivi, essendo i più vicini a $\frac{N}{2}$ **; le altre coppie di Goldbach sono invece formate da due numeri primi non consecutivi, anche se**

essi sono equidistanti da $\frac{N}{2}$, e formano le coppie di Chen,

con differenza D' = 2n ma non consecutivi. Infatti la congettura di Chen afferma : ogni numero pari 2n è infinite volte la differenza tra due numeri primi qualsiasi; e questo vale anche per i numeri consecutivi, gemelli (D = 2) o di Polignac (D = 2n) che formano l'ultima coppia di Goldbach. Le coppie di Goldbach per ogni N pari, tranne l'ultima (gemelli o di Polignac) possono quindi essere identificate anche come coppie di Chen, formate da due numeri primi non consecutivi .

Per altri calcoli e particolari si rimanda al suddetto lavoro "Connessione Goldbach – gemelli – Polignac", che indica come tutte e tre le congetture, e anche quella di Chen, sono vere.

Infine, vediamo che anche la congettura debole di Goldbach è vera, come logica conseguenza della soluzione per la congettura forte: basta aggiungere un qualsiasi numero primo tranne il 2 a qualsiasi numero pari maggiore di 2, per ottenere un qualsiasi numero dispari maggiore di 5, e dimostrando che tutti i numeri dispari maggiori di 5 possono essere scritti come somma di tre primi, e anche più volte.

Vediamo adesso come in base a questa nostra semplice procedura.

Per esempio per N' dispari da 7 a 17:

4 + 3 = 7
6 + 3 = 9
8 + 3 = 11
10 + 3 = 13
12 + 3 = 15
14 + 3 = 17
… … …

Ma anche

4 + 5 = 9
6 + 5 = 11
8 + 5 = 13
10 + 5 = 15
12 + 5 = 17
… … …

e

4 + 7 = 11
6 + 7 = 13
8 + 7 = 15
10 + 7 = 17

… … …

e ancora

4 + 13 = 17

Ora se si sommano i due numeri primi con somma il numero pari iniziale, e il numero primo aggiunto a tale numero pari, avremo

N come somma di tre primi: le somme suddette, infatti, si possono scrivere anche in questo modo, e cioè come somme di tre primi, per tutti i numeri N dispari maggiore di 5, e quindi N'$\geq$ 7 :

2 + 2 + 3 = 7 (= 4 + 3)
3 + 3 + 3 = 9 (= 6 + 3)
3 + 5 + 3 = 11 …

3 + 7 + 3 = 13 (=10 + 3) …
5 + 5 + 3 = 13 "
5 + 7 + 3 = 15 …

3 + 11 + 3 = 17 (=14 + 3)
7 + 7 + 3 = 17 "

… … … …

Si nota quindi come i numeri 13 e 17 sono somma di tre primi, con numero pari iniziale 10 e 14 rispettivamente;

10 e 14 hanno due coppie di Goldbach ciascuno

(10 = 3 +7 = 5 +5; 14 = 3 +11 = 7 + 7, alle quali, aggiungendo 3, si ottiene 13 e 17 come somme di tre primi).

Più in generale, dato P = p + q il numero pari iniziale ed r il numero primo ad esso aggiunto, abbiamo la relazione

P + r = N' dispari,

scrivibile anche come

p + q + 3 = N' dispari,

e quindi come somma di tre primi, quali che siano P, p, q, r tranne il 2, ed il numero N' dispari.

Poiché P può essere somma di G(N) coppie di numeri primi, con ogni primo dispari r > 2 si possono scrivere T(N) = G(N) + r terne (simbolo T, Terne di Goldbach) di numeri primi per ogni numero dispari N' = p + q + r .

Facciamo un esempio con N' = 27, e sottraendo da 27 successivamente tutti i numeri primi maggiori di 2, da 3 a 23 = 27 – 4 (4 = 2 + 2 è il più piccolo numero pari somma di due primi, com'è noto) :

N' r N coppie di Goldbach per i vari N pari = N' - r

27 – 3 = 24 = 5 + 19, 7 + 17, 11 + 13

27 – 5 = 22 = 3 + 19, 5 + 17, 11 + 11

27 – 7 = 20 = 3 + 17, 7 + 13

27 – 11 = 16 = 3 + 13, 5 + 11

27 – 13 = 14 = 3 + 11, 7 + 7

27 – 17 = 10 = 3 + 7, 5 + 5

27 – 19 = 8 = 3 + 5

27 – 23 = 4 = 2 + 2

N' = 27 quindi si può scrivere come somma del numero primo r e i due primi p e q tali che p + q = N = N' – r, e cioè, in pratica:

27 = 3 +5+19,	**3+7+17,**	**3+11+13**	**con r = 3**
27 = 5+3+19 rip.	**5+5+17,**	**5+11+11**	**con r = 5**
27 = 7+3+17 rip.	**7+7+13**		**con r = 7**
27 = 11+3+13 rip.	**11+5+11 rip.**		**con r = 11**
27 = 13 +3+11 rip.	**13+7+7 rip.**		**con r = 13**
27 = 17+3+7 rip.	**17+5+5 rip.**		**con r = 17**
27 = 19 + 3 +5			**con r = 19**
27 = 23 +2+2			**con r = 23**

con 16 possibilità, tra le quali otto ripetizioni (contrassegnate con rip.) che occorre togliere, cosicché rimangono le sole otto terne diverse di tre numeri primi r, p, q, la cui somma è sempre

r + p + q = 27.

La stessa procedura si può applicare naturalmente per tutti i numeri

dispari, trovando sempre più terne al crescere di N', e più terne ancora quando N = N' – r è multiplo di 6 o di 12, che come abbiamo già visto, hanno più coppie di Goldbach rispetto ai numeri vicini ma non sono multipli di 6 o di 12, vedi TABELLA 1.

Per la congettura debole di Goldbach vale quindi la formula approssimativa

$$T(N') = \frac{\sum G(N_i)}{2} \; ; \quad \frac{\sum G(N_i) + 1}{2} \quad \text{se } G(N_i) \text{ è dispari}$$

(per esempio per N' = 17, $\sum G(N_i) = 7$, e $T(17) = \frac{7+1}{2} = 4$)

dove $\sum G(N_i)$ è il numero totale delle coppie di Goldbach di tutti i numeri pari N_i dalle successive differenze N' – r, con r da 3 a N' - 4.

Per N' = 27, $T(27) = \frac{16}{2} = 8$

16 possibilità o terne totali - 8 terne ripetute = 8 terne vere e proprie di numeri primi r, p e q tali che r + p + q = 27

Questa nostra soluzione della congettura debole di Goldbach (basata sulla soluzione della congettura forte) potrebbe essere utile in futuro anche per dimostrare l'ipotesi di Riemann.

Infatti , poiché l'ipotesi generalizzata di Riemann comporta la congettura debole di Goldbach, la nostra soluzione potrebbe interessare l'ipotesi di Riemann tramite la sua generalizzazione.

Nel 1997 …"Deshowillers, Effinger, Te Riele e Zinoviev dimostrarono che l'ipotesi di Riemann generalizzata implica la congettura di Goldbach debole. Questo risultato combina un'affermazione generale che per numeri maggiori di 10^{20} con una ricerca estensiva al computer per casi piccoli" (dalla voce "Congettura debole di Goldbach" su Wikipedia)

Vedi Deshowillers, Effinger, Te Riele, and Zinoviev, " A complete Vinogradov 3 – primes theorem under the Riemann Hypothesis", Electronics Research Announcement of the American Mathematical Society", Vol. 3 pp. 99 – 104 (1907) "

Con la nostra soluzione positiva (G(N)) > 0) per la congettura forte e la conseguente soluzione per la congettura debole ($T(N) = \frac{\sum G(N_i)}{2}$, $T(N) = \frac{\sum G(N_i) +1}{2}$), l'approccio ad una possibile dimostrazione dell'ipotesi generalizzata di Riemann (RHg) potrebbe essere più facile, e poi, di conseguenza anche per l'ipotesi di Riemann classica (RH), tramite il possibile percorso

matematico:

Congettura debole di Goldbach **Ipotesi generalizzata di Riemann**

. ____→__ .

↑

↓

.______←____ .

Inizio

Congettura forte di Goldbach **Ipotesi di Riemann**

Percorso ancora del tutto teorico, ma che non escluderebbe a priori una relazione diretta tra congettura forte di Goldbach e ipotesi di Riemann.

Concludendo, non ci sarebbero solo connessioni tra Goldbach, numeri gemelli e Polignac, ma anche tra Goldbach e Riemann, connessioni che vedremo possibilmente in futuri lavori.

Le due congetture di Goldbach e le nostre soluzioni non sarebbero quindi solo fini a se stesse, ma probabilmente proiettate, in futuro, verso l'ipotesi di Riemann e le sue

generalizzazioni, e quindi potenzialmente anche verso le loro soluzioni definitive (dimostrazioni matematiche), e possibilmente e sperabilmente positive (= verità di GRH ed RH).

Nota 1.

Sull'angolo formato dai valori medi minimi e massimi di G(N) con $N = 6n \pm 2$ e con $N = 6n$ e $12\ n$.

I valori medi di G(N) con N crescente ridispongono, sul piano cartesiano, dentro un angolo con origine in $x = y = 0$, con la linea superiore relativa ai valori più alti di G(N) per gli N multipli di 12 e quindi non pericolosi per la congettura; e la linea inferiore relativa ai valori di G(N) più bassi per $N = 6n \pm 2$; tuttavia, tale linea media inferiore si allontana sempre di più dall'ascissa al crescere di N, e quindi, estendendola all'infinito, non la toccherà mai; si creerebbero due zone libere da valori, una superiore e una inferiore, con limite inferiore l'ascissa x; cosicché non si ha mai

y = G(N) = 0 = unico e teorico contro-esempio della congettura, che però è impossibile a causa di questo angolo che comprende tutti i valori G(N) per tutti gli N pari, e della sottostante zona inferiore libera da valori, e tanto meno da G(N) = 0, che dimostrano insieme la verità della congettura stessa. Vedi la successiva

TABELLA 1 e il GRAFICO 1.

Tale angolo che racchiude tutti i valori crescenti di G(N), seppure leggermente oscillanti tra il lato inferiore e superiore dell'angolo stesso, è molto importante, perchè potrebbe in seguito rispuntare per altre congetture sui numeri primi, e in tal caso potrebbe contribuire in qualche modo a dimostrarle, così come ha fatto per la stessa congettura di Goldbach in questo lavoro, come risulterà ora più evidente dalla TABELLA 1 e dal relativo GRAFICO 1 finale.

T A B E L L A 1 con i valori reali crescenti di G(N)

(tali valori sono stati trovati con il test per Goldbach su Internet, come già accennato)

n	N=6n+2	G(N)	N=6n+4	G(N)	N=6n+6	G(N)	N=6n+8	G(N)	N=6n+10	G(N);	N=6n+12;	G(N)
0	2	-	4	1	6	1	8	1	10	2	12	1
2	14	2	16	2	18	2	20	2	22	3	24	3
4	26	3	28	2	30	3	32	2	34	4	36	4
6	38	2	40	3	42	4	44	3	46	4	48	5
8	50	4	52	3	54	5	56	3	58	4	60	6
10	62	3	64	5	66	6	68	2	70	5	72	6
12	74	5	76	5	78	7	80	4	82	5	84	8
14	86	4	88	4	90	9	92	4	94	5	96	7
16	98	3	100	6	102	8	104	5	106	6	108	8
18	110	6	112	7	114	10	116	6	118	6	120	12
20	122	4	124	5	126	10	128	3	130	7	132	9
22	134	6	136	5	138	8	140	7	142	8	144	11
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	

I valori medi per ogni colonna di G(N), calcolati sommando tutti i valori della colonna e dividendo per 12, sono rispettivamente:

3,8 4 6,08 3,5 4,9 6,6

quindi più alti per i multipli di 6 e di 12, più bassi per gli altri N;

l'angolo sarà formato dalla linea media inferiore con i valori di G(N) per N = 6n +2 (prima colonna di G(N)) e dalla linea media superiore formata dai valori di G(N) per N = 12n (sesta e ultima colonna).

(Vedi GRAFICO 1 finale)

TABELLA 3 con le prime 10 coppie di Goldbach (trovate con il test per Goldbach su Internet) per $N = 10^{14}$ (in tutto tali coppie sono più di 96 miliardi, esattamente circa 96 230 457 630, in base alla stima logaritmica):

100000000000000	=	29	+	99999999999971
100000000000000	=	41	+	99999999999959
100000000000000	=	71	+	99999999999929
100000000000000	=	179	+	99999999999821
100000000000000	=	677	+	99999999999323
100000000000000	=	839	+	99999999999161
100000000000000	=	953	+	99999999999047
100000000000000	=	983	+	99999999999017
100000000000000	=	1499	+	99999999998501
100000000000000	=	1571	+	99999999998429
…		…		….

Il numero $N = 10^{14}$, non essendo divisibile per 3, e quindi nemmeno per 12 non può avere come ultima coppia di Goldbach una coppia di gemelli, ma una coppia di

Polignac p e q, più vicina a $\frac{10^{14}}{2}$ e simmetrica a tale numero,

con una probabile differenza D = q – p ≈ ln (N) ≈ 32,23 ≈ 32

e quindi semidifferenza d = 32 / 2 = 16. cosicché la coppia p e q

sarà vicinissima a p ≈ $\frac{N}{2}$ - 16 e q ≈ $\frac{N}{2}$ + 16.

E, a proposito di coppie di gemelli, poichè il rapporto tra coppie di gemelli fino a N e coppie di Goldbach per N è di circa c^4 = 1,3790

(essendo il rapporto g(N) / G(N) ≈ $\frac{10^n}{4n^2} \cdot c \;/\; \frac{10^n}{4n^2 \cdot c^3} = c^4$)

fino a N = 10^{14} ci saranno circa 132 701 8 01 071 coppie di gemelli.

g(N) ≈ G(N) · 1,3790 ≈ 96 230 457 630 · 1,3790 = 132 701 801 071.

Usando invece le formule logaritmiche (2) e (3), il rapporto g(N) / G(N) è invece $c^{3,5}$ = 1,3247, spesso più preciso,

per esempio per N = 10 000 dà 170/128 = 1,3281 < 1,3790; e usando questo rapporto più preciso, avremo

96 230 457 630 · 1,3247 = 127 476 487 222,

un po' minore del precedente, ma approssimato sicuramente per difetto. Qui la precisione aritmetica è poco importante, poiché l'importante è che g(N) cresce con N, e tende all'infinito; indicando così che anche le coppie di numeri primi gemelli, come i numeri primi, sono infinite sebbene un po' più rare in base alle relative formule logaritmiche (2) e (3), (5) e (6) ; e quindi anche la congettura dei numeri primi gemelli è vera, insieme alle due congetture di Goldbach (forte e debole) oggetto di questo lavoro.

Montgomery e Vaughan affermavano (anni settanta) che ci potrebbero essere numeri pari sufficientemente grandi, seppure rari, che non sono somma di due numeri primi, e quindi sono contro esempi della congettura di Goldbach. Nei loro calcoli ci sarà sicuramente qualche errore, che vedremo con ulteriori lavori; la nostra TABELLA 1 e il nostro grafico parlano chiaro: non ci sono contro esempi, poiché il valore G(N) = 0 (contro esempio per N con G(N) = 0) si trova nella zona libera da valori di G(N), ben al di sotto della linea inferiore (con i valori minimi per N = 6n $\pm$ 2), per cui non potendo verificarsi mai G(N) = 0, non c' è nessun contro esempio che renda impossibile la congettura di Goldbach;

e quindi essa è vera.

Nota 2. Connessioni con la Teoria delle Stringhe.

Abbiamo detto che i multipli di 6, cioè di forma N = 6n, e ancor più di 12, cioè N = 12n, hanno più coppie di Goldbach rispetto ai numeri vicini N = 6n$\pm$2, 12n$\pm$2 non divisibili per 3.

Sia data la relazione che segue, ottenuta dal Nardelli, che prevede la creazione di stringhe fermioniche da quelle bosoniche, attraverso le quali si manifesta poi l'interazione gravitazionale:

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]=$$
$$=\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_V\left(\left|F_2\right|^2\right)\right],\quad \mathbf{(2.1)}$$

dove il segno meno indica la forza di espansione, cioè la costante cosmologica di Einstein.

Se nella geometria euclidea il "rapporto aureo"[1] è celato nelle proprietà del pentagono, nella geometria frattale esso scaturisce da forme più semplici, come il quadrato ed il triangolo equilatero. Infine,

---

[1] Ricordiamo che il rapporto aureo è l'irrazionale $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$, radice positiva dell'equazione di secondo grado $x^2-x-1=0$. Esso è il limite della successione $\left(F_{n+1}/F_n\right)$, essendo $\left(F_n\right)$ la successione dei numeri di Fibonacci.
I numeri di Fibonacci, sono numeri naturali definiti dalla formula ricorsiva $F_0=1, F_1=1, F_{i+2}=F_{i+1}+F_i$, con i = 0,1,… che fornisce la successione 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…, dove quindi ogni termine successivo è dato dalla somma dei due termini precedenti, detta serie di Fibonacci. Quindi, il rapporto aureo è dato dal rapporto tra due termini qualsiasi, successivo e precedente, della serie di Fibonacci.

se il modello della struttura globale dell'Universo detto dell'"inflazione infinita" è corretto, allora l'Universo stesso è un immenso frattale.

Questo che abbiamo detto è correlabile sia al modello di Palombo applicato da Nardelli alla Teoria di Stringa tramite l'equazione (2.1), che all'autosimilarità frattale dei sistemi "Universo" e "Vivente".

Difatti, per l'identità di Ramanujan[2] (B. C. Berndt, R. A. Rankin 1995 – S. Ramanujan 1962) secondo la quale

$$0{,}618033 = 1/\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}, \quad \textbf{(2.2)}$$

e che

$$\pi = 2\Phi - \frac{3}{20}\left[R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right], \quad \textbf{(2.3)}$$

con $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

segue, dalla (2.1):

[2] Nella prima lettera al matematico G. H. Hardy , S. Ramanujan descrive varie asserzioni inerenti R(q), inoltre, nel suo quaderno (25) e nel "quaderno perduto" (27), Ramanujan riporta senza dimostrazioni molte valutazioni e teoremi su R(q). Specialmente il quaderno perduto di Ramanujan contiene un enorme quantità di materiale su R(q), e molti di quei risultati soltanto recentemente sono stati confermati per la prima volta. R(q) viene definita la frazione continua di Rogers-Ramanujan. Tutte le relazioni che contengono R(q) ed il rapporto aureo, sono definite identità di Ramanujan.

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16G}\cdot\frac{1}{2\Phi-\frac{3}{20}\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f\left(-t^{1/5}\right)}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]=\int_0^\infty\frac{R}{\kappa_{11}^2}\cdot 2\Phi-\frac{3}{20}\left[R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right]\cdot$$

$$\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{11}^2}{2\Phi-\frac{3}{20}\left(R(q)+\frac{\sqrt{5}}{1+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^q\frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})}\frac{dt}{t^{4/5}}\right)}\right)2Rg_{10}^2}Tr_\nu\right.$$

$$\left.\left(\left|F_2\right|^2\right)\right].\quad \textbf{(2.4)}$$

Abbiamo quindi tradotto la (2.1) equazione che concerne la Teoria di Stringa, quindi fisica, nella (2.4), equazione che concerne la Teoria dei Numeri, quindi matematica.

È interessante notare che quando una stringa si muove nello spazio-tempo e si divide e si ricombina, un gran numero di identità matematiche devono essere soddisfatte. Queste sono le identità di Ramanujan in funzione modulare. Il diagramma a "loop" KSV (Kikkawa-Sakita-Virasoro) di interazione tra le stringhe può essere descritto usando le funzioni modulari. La "funzione di Ramanujan"

(una funzione modulare ellittica che soddisfa la "simmetria conforme") ha 24 "modalità" (24 + 2 = 26) che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica.

Quando la funzione di Ramanujan è generalizzata, 24 è sostituito da 8 (8 + 2 = 10), quindi, ha 8 "modalità" che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una superstringa.

Evidenziamo, inoltre, le formule di Ramanujan che consentono di calcolare π, direttamente collegate ad equazioni modulari. Abbiamo infatti:

$$\pi = \frac{12}{\sqrt{130}} \log\left[\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{13}\right)}{\sqrt{2}}\right], \quad \textbf{(2.5)} \qquad \textbf{e} \qquad \pi = \frac{24}{\sqrt{142}} \log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)} + \sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]. \quad \textbf{(2.6)}$$

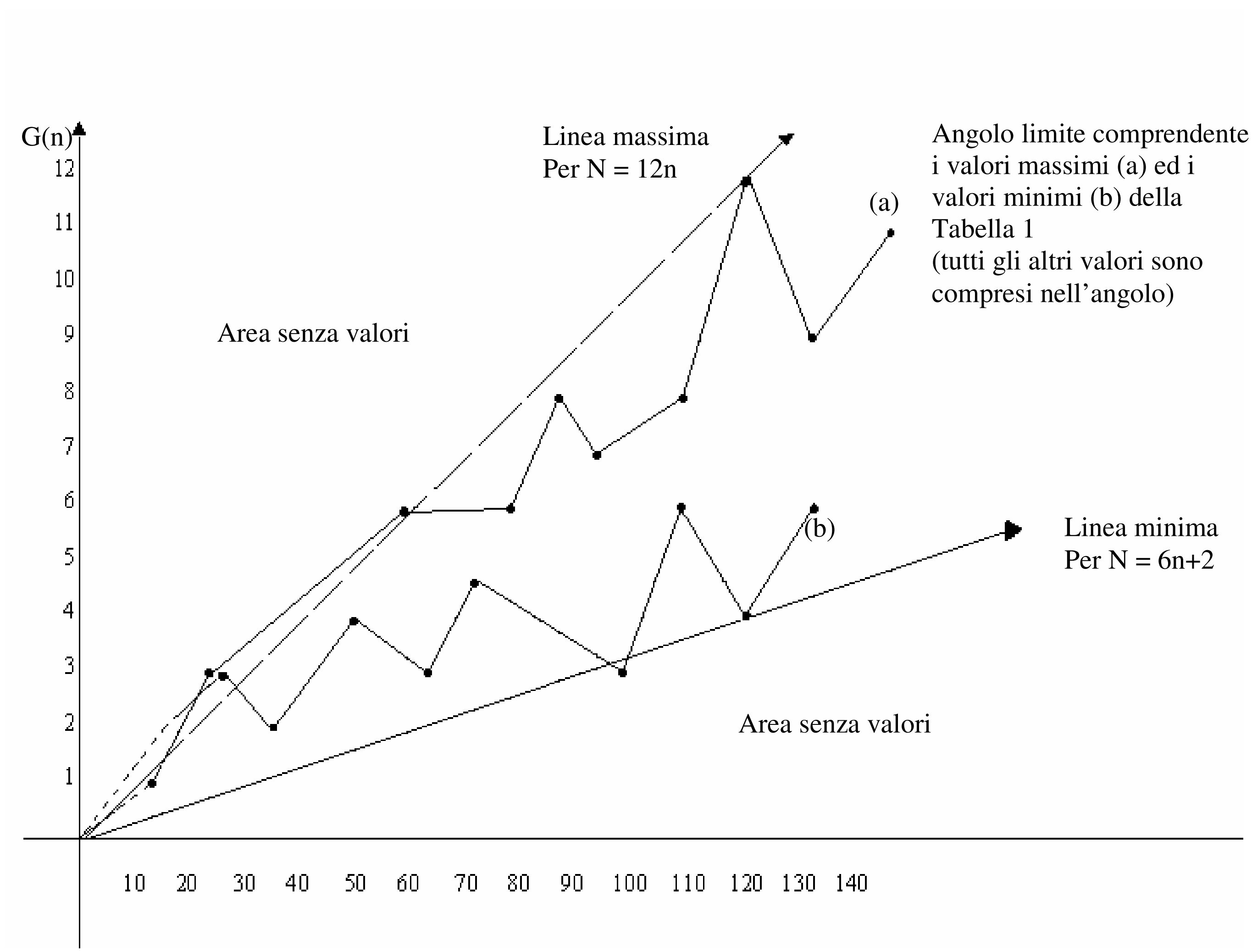
Da esse sono facilmente deducibili i numeri 12 e 24 che sono correlati al fatto che i multipli di 12, quindi N = 12n, hanno più coppie di Goldbach.

È interessante infine notare che tali espressioni, riguardanti π, sono ottimamente connesse con la (2.3) e anche con la (2.4), quindi con il modello Palumbo-Nardelli.

GRAFICO 1

GRAFICO a) minimo $G = 6n+2$
b) massimo $G = 12n$

Da Tabella 1



Bibliografia

M. Nardelli, F. Di Noto e A. Tulumello – "*Sulle possibili relazioni matematiche tra Funzione zeta di Riemann, Numeri Primi, Serie di Fibonacci, Partizioni e Teoria di Stringa*" – CNRSOLAR – 113BC2006 – 07.11.2006

M. Nardelli e F. Di Noto – "*Su alcuni contributi al programma Langlands: ulteriori connessioni tra alcuni fenomeni fisici naturali, Teoria dei Numeri e Teoria di Stringa*" – CNRSOLAR – 124JA2007 – 08.01.2007

M. Nardelli e F. Di Noto – "*Teoria dei Numeri e Teoria di Stringa, ulteriori connessioni: Congettura (Teorema) di Polignac, Teorema di Goldston-Yldirim e relazioni con Goldbach e Numeri Primi Gemelli*" – CNRSOLAR – 130JA2007 – 26.02.2007

F. Di Noto e M. Nardelli – "*Nota sulla "Connessione Goldbach-gemelli-Polignac" e su "Una formula più precisa per una stima logaritmica dell'N° numero primo*" – CNRSOLAR – 162JA2007 – 15.05.2007

Finito di stampare nel mese di Luglio 2007
presso DI. VI. Service – Via Miranda, 50 – 80131 Napoli