Imre Toth I PARADOSSI DI ZENONE NEL PARMENIDE DI PLATONE

ISTITUTO ITALIANO PER GLI STUDI FILOSOFICI

Imre Toth

I paradossi di Zenone nel Parmenide di Platone

L'OFFICINA TIPOGRAFICA

In questa collana vengono pubblicati i risultati di ricerche, seminari, convegni o corsi di lezioni su momenti e problemi della storia del pensiero promossi dall'Istituto Italiano per gli Studi Filosofici.

Momenti e problemi della storia del pensiero

7

ISTITUTO ITALIANO PER GLI STUDI FILOSOFICI

Imre Toth

I paradossi di Zenone nel Parmenide di Platone

L'OFFICINA TIPOGRAFICA

Grazie,
alle mie tre – o quattro – *Grazie*

Prefazione

Al centro del presente lavoro c'è il *Parmenide* di Platone. L'investigazione ermeneutica che ne propongo è differente dalle esegesi classiche. Per quanto ne so, è la prima volta che si fa il tentativo di offrire un'interpretazione di questo testo misterioso nel contesto della ricerca geometrica della sua epoca. In effetti, il testo del dialogo diviene trasparente se si parte dall'ipotesi che la dialettica della sua argomentazione sia stata suscitata e determinata dalla presa di coscienza dell'irrazionale, che la presenza delle grandezze incommensurabili ineluttabilmente trascina nell'universo del Logos, della ragione geometrica.

Niente di piú comune d'una coppia di grandezze incommensurabili: la diagonale del quadrato ne offre un esempio tanto banale quanto insipido. Ma, una volta accertata l'esistenza della diagonale, si pone la questione se una lunghezza, una misura possa essere ad essa assegnata o no. In realtà la sua lunghezza non può essere che una *misura incommensurabile*, il suo Logos sarà forzatamente una *ragione irrazionale*, il suo nome proprio, una *parola ineffabile*.

L'interrogazione concerne manifestamente lo statuto ontologico di ciò che si chiama spontaneamente la lunghezza della diagonale: è possibile, è ammissibile assegnare il valore ontico dell'essere ad una misura incommensurabile, o piuttosto bisogna necessariamente negare la sua esistenza ed assegnare ad ogni ragione irrazionale il valore ontico del non essere? Le due risposte si rilevano ugualmente accettabili, ma esse conducono entrambe a difficoltà d'una struttura inattesa. In effetti, la negazione della commensurabilità implica l'esistenza di un insieme infinito di segmenti commensurabili, aventi dunque una *ragione* razionale, e che si distinguono tutti dalla diagonale incommensurabile e irrazionale per *difetto* o *eccesso*. Platone designa questi segmenti con l'espressione plastica di *diagonale effabile*, il loro insieme infinito è l'opposto all'unica forma ideale della diagonale ineffabile. La regola, elementare, della loro generazione era ben conosciuta dai Pitagorici: l'insieme infinito di questi *logoi*, può essere prodotto indifferentemente se si assegna il valore ontico dell'*essere* o quello del *non essere* alla misura incommensurabile della diagonale. Questa è unica secondo il numero, un *Uno* immutabile, avente un luogo puntuale fisso e indivisibile e proprietà concrete accessibili alla conoscenza, anche se le si assegna il valore ontico del non essere: *il non essere è dunque conoscibile e in un modo o nell'altro siamo costretti ad attribuirgli l'essere.* L'insieme delle diagonali effabili rappresenta una diade infinita di *logoi* – parole aventi una ragione – una diade del difetto e dell'eccesso, del piú piccolo e del piú grande, degli altri e dei differenti in rapporto all'unico *Uno* – la forma ideale della diagonale incommensurabile.

I due termini, ognuno infinito e aperto, della diade, l'uno generato dalla serie crescente, l'altro dalla serie decrescente di *logoi*, rappresentati dai valori della *diagonale effabile*, possono anche essere interpretati come grandezze diacroniche, delle *età* crescenti del tempo positivo e dell'invecchiamento normale, orientato dal passato verso il futuro, o delle età decrescenti del ringiovanimento continuo del tempo negativo, dunque regressivo, orientato dal futuro al passato, come il caso dell'inseguimento del piú Vecchio e del piú Giovane ampiamente discusso nel *Parmenide*. La coetaneità del Vecchio e del Giovane è un *Uno* unico rappresentante l'Uguale, l'uguaglianza in età del piú Giovane e del piú Vecchio, in rapporto alla moltitudine infinita degli Altri, costituente l'insieme dell'Ineguale. Tra i due, l'Uno e la diade indefinita degli Altri, sussiste una strana relazione che Platone chiama *fantasma d'uguaglianza*, e che Aristotele chiamerà piú tardi l'*egualizzazione dell'ineguale*. Questa età incommensurabile, l'Uno transfinito della coetaneità irrazionale, resta per sempre inaccessibile al piú Giovane cosí come al piú Vecchio durante il loro movimento diacronico: l'uguaglianza in età è irrealizzabile, e sembra essere l'evidenza stessa che il valore ontico assegnato alla misura dell'età eguale debba per forza essere identico al *non-essere*. La stessa conclusione sembra tuttavia difficilmente accettabile quando sia interpretata in termini spaziali. In effetti, essa significa, che la diagonale del quadrato è una grandezza priva di lunghezza, una conclusione che sembra essere piú assurda che evidente. Al contrario, è assegnare il valore ontico dell'*essere* alla lunghezza incommensurabile che s'impone, in questo caso, come un'evidenza. In funzione dell'interpretazione della *misura* in termini spaziali o temporali la banalità cede il posto al paradosso. L'alternativa eleatica: *essere* o *non essere* è indecidibile. Non vi è modo inferenziale che possa decidere se una ragione *irrazionale* possa esistere o no, se è il *non-essere* o piuttosto l'*essere* che bisogna assegnare alla *misura incommensurabile*.

La tortura dell'essere e del non essere, a cui l'investigazione delle relazioni paradossali del Molteplice e dell'Uno ha incitato Platone – e che lo Straniero di Elea evocherà piú tardi come una *tortura adeguata* dell'ontologia eleatica – trova la propria giustificazione teorica e la propria motivazione storica quando essa sia esaminata nella prospettiva di questo evento singolare e decisivo, – decisivo non solo per lo sviluppo ulteriore delle scienze matematiche ma soprattutto per lo sbocciare libero del pensiero –, la presa di coscienza della *ragione irrazionale* generata dallo *esprit de géométrie* – l'irreversibile *conjunctio magna* del sapere matematico e della speculazione filosofica.

Introduzione *

Posizione del problema

> ... he explained to them about the vulnerable point of Achilles, the Greek hero, a point his auditors at once seized as he...
>
> J. Joyce, *Ulysses*, 1986: 523

Il *corpus aristotelicum* viene ritenuto la fonte piú antica dei *logoi* di Zenone contro il movimento. Essi sono menzionati *en passant* anche nella prima parte del *Parmenide* di Platone (129E1, 136B5).

Il mio proposito è però di dimostrare che la seconda parte del dialogo è dedicata in prevalenza proprio a quelle questioni ontologiche e logiche che si presentano anche come conseguenza degli argomenti di Zenone.

Platone adduce un unico esempio: il piú giovane non può mai diventare eguale in età al piú vecchio (Parm., 140E-142A, 151E-157B). È mia intenzione mostrare che l'apparente trivialità dell'argomento platonico in realtà nasconde in sé i paradossi della *dicotomia* (Arist., phys. 187a7, 207b11, 239b19) e del *cosiddetto Achille* (239b14).

* Il presente lavoro è stato compiuto nell'ambito del progetto di ricerca della Volkswagenstiftung Hannover: *Antike in der Moderne.* La prima parte del lavoro è stata presentata come relazione al convegno *Israel Colloquium for the History, Philosophy and Sociology of Science*, aprile 1985, sotto il titolo: *Mathematics and Philosophy in Greek Antiquity: Zeno's Paradoxes Reinterpreted* – la seconda parte al convegno *Federigo Enriques, filosofo e scienziato*, Bologna, dicembre 1986 e all'Università di Oxford, maggio 1987. La traduzione in italiano del testo tedesco è stata eseguita da Antonio Moretto.

A tal fine è necessario, per prima cosa, un ulteriore esame degli argomenti di Zenone.

I modelli standard

Nella letteratura la *dicotomia* normalmente viene presentata ricorrendo a due *modelli standard*. Viene dato un segmento XY. X denota la posizione di partenza e Y il traguardo, il *telos* del movimento. Al segmento viene associata una *lunghezza* – ad es. $XY = 1$. Premessa dell'argomento è il postulato: per raggiungere il *telos*, il mobile *deve prima* giungere alla *metà* H(1) dell'*intero* XY.

Nel I *modello* si suppone che il mobile sia giunto in H(1), e che successivamente raggiunga anche *tutte le metà*:

$$H(1),\ H(2),\ H(3), \ldots,\ H(n),\ H(n+1), \ldots \text{ ecc.}$$

Nel passo n-esimo viene raggiunta H(n), dopo che è stato attraversato il segmento $\Delta(n)$, e sino al traguardo rimane da percorrere il resto R(n). I simboli Δ e R stanno qui per i predicati cinetici *apolettico*, Δ, ed *ipolettico*, R – che vengono presi in prestito dal linguaggio dell'atletica: « lasciar dietro di sé nella corsa », e « rimanere da percorrere nella corsa ». XY è l'*intero*:

$$W(1) = [X(1),\ H(1),\ Y(1)],$$

diviso dicotomicamente da H(1), e congruente al primo resto assegnato ed indiviso:

$$R(0) = [X(0),\ Y(0)].$$

Nel II *modello* si fa valere che nell'argomento di Zenone non si affermi categoricamente l'arrivo del mobile in H(1). Conseguentemente si può fare, e viene fatta, l'assunzione categorica: il mobile *non* è giunto in H(1). La premessa della *dicotomia* vale anche in questo caso: per giungere in H(1*), il mobile deve aver già raggiunto *prima* una posizione intermedia tra la posizione di partenza X(0) e H(1*). Questa posizione viene allora contrassegnata con H(2*), ecc.; denotiamo con H(n*) la metà *non raggiunta*.

L'opposizione tra i modelli appare evidente.

Il I modello è *progressivo*, il suo tipo d'ordine è ω, e dà luogo ad una H-successione di luoghi della *presenza*, e ad una successione monotona crescente di somme parziali

$$\Sigma(n) = \Delta(1) + \Delta(2) + \ldots + \Delta(n).$$

Il II modello è *retrogressivo*, il suo tipo d'ordine è $^*\omega$, e genera una H(n*)-successione dell'*assenza*: invece di somme

$$\Sigma(n) < \Sigma(n+1) < \ldots < R(o),$$

sorge una successione monotona decrescente di resti non percorsi:

$$R(o^*) > R(1^*) > \ldots > R(n^*) > \ldots > o.$$

Il II modello si presenta maggiormente adeguato alla conclusione – il *teorema* di Zenone: « non c'è alcun movimento » (μὴ κῖνεισθαι; Arist., phys. 239b11-12). Il movimento non potrebbe mai avere inizio in X: *Dio non avrebbe mai potuto creare il mondo* [1].

Al contrario il I modello sembra permettere soltanto una conclusione piú debole: il movimento potrebbe aver luogo certamente *prima* del *telos*, perfino *sino* al *telos* escludendo soltanto l'*arrivo* in Y: *numquam ad finem horæ pervenire poterit* [2]. Entrambi i modelli si ritrovano in Aristotele e Simplicio [3]. L'argomento di Zenone non contiene niente che permetta una decisione in risposta alla domanda se sia il I modello quello che espone il senso, ritenuto originario e presunto corretto, della *dicotomia*, o se invece lo sia il II. Per questo motivo solitamente ci si accontenta di imputare a Zenone l'ambiguità dell'argomento.

[1] SAADIA GAON, *The Book of Beliefs and Opinions* I 1.36; trad. S. Rosenblatt, New Haven 1976.

[2] B. SPINOZA, Epist. XII: in *Opera*, Heidelberg 1924, vol. IV 58.

[3] Il tipo ω in Aristotele, phys. 203b24-25, 204b9-10, 207b91-5, 239b12-13, 263a7-10; SIMPLICIO, in *Aristotelis physicorum libros quattuor posteriores commentaria*, ed. H. Diels, Berlin 1895: 1014; il tipo $^*\omega$ in Arist., phys. 236a13-15, 26-28, b9-16, 237b21-22; SIMPLICIO, *op. cit.*: 1013.

Critica delle interpretazioni standard

Entrambi i modelli sono consistenti con l'argomento di Zenone. Però contengono entrambi delle assunzioni superflue che talora inducono ad interpretazioni errate.

1. *Relatività del movimento* - L'affermazione che c'è una differenza tra il I modello ed il II è falsa. Il *telos* T è un punto fisso, *contenuto in tutti* i R(n), $T \in R(n)$ – esso è l'intersezione:

$$T = \bigcap R(n),$$

per *tutti* gli n. Nel I modello T è identico a Y:

$$Y = \bigcap R(n),$$

e si ha:

$$R(o) = [X, T].$$

Nel II modello T è identico ad X:

$$X = \bigcap R(n^*),$$

e si ha:

$$R(o^*) = [T, Y];$$

(cfr. Arist., metaph. 1022a7-8). In entrambi i modelli si giunge al *resto* R(n) e soltanto ad esso. I modelli I e II sono identici a meno di una simmetria. È superfluo prendere una decisione: il movimento è relativo. Nella proposizione di Zenone non è contenuta alcuna ambiguità. Nel suo *La relatività del movimento nell'antica Grecia*[4] Federigo Enriques fa notare che l'idea della relatività del movimento fu tematizzata per la prima volta da Zenone (nell'aporia dello *stadio*).

2. *Presupposizione della traslazione* - Nel I modello si presuppone esplicitamente che venga effettuato il movi-

[4] Periodico di matematica, 1921: 87, cfr. anche *La polemica eleatica*, ibid., 1923: 85; e F. ENRIQUES et G. DE SANTILLANA, *Pythagoriciens et Éléates*, Paris 1936, 39, 49-50.

mento tra H(n) e H(n+1). Questo fatto si verifica per l'*Achille*, non per la *dicotomia*.

3. *Ricorsività* - Nel I modello la *presenza* del mobile si mostra come la proprietà che viene trasmessa, in modo ricorrente e *causale*, da H(n) a H(n+1).

Nel II modello viene solamente mutato il vocabolo *n-presenza* con *n*-assenza*. H(n+1) o H(n+1)* diviene un *telos* e definisce un'altra ω-successione di metà $H^n(k)$. Se T è mantenuto come *telos*, allora otteniamo dapprima una dicotomia di tipo ω^2, poi, successivamente, dicotomie di tipo ω^ω ... Se si ammette (modello I) che, con l'eccezione di T, tutti gli H(n) siano raggiunti, allora – per ogni *telos* $H^n(k)$ – la conclusione di Aristotele è tacitamente ammessa, e ci si chiede che cosa giustifichi l'esclusione di T. Se non si ammette l'arrivo in H(n), allora il ragionamento si riduce al II modello – ma se e soltanto se la verità della conclusione zenoniana è tacitamente ammessa tra le premesse.

In ambedue i casi il ragionamento standard è circolare.

Il circolo si evita se H(n+1) è *telos*, e non si ammette nessuna metà $H^n(k)$ tra H(n) e H(n+1). In questo caso il mobile raggiunge H(n+1) da H(n) con un unico salto.

Un salto *mortale* per la *dicotomia*.

Infatti l'esistenza di un *telos* fisso T, preesistente, diventa superflua per lo svolgimento del movimento in salti successivi: la *dicotomia* si riduce all'*Achille* – la cui premessa definisce il movimento come una traslazione che procede per salti – una riduzione che di sicuro non ha inquietato nessuno dei suoi interpreti. Ma poiché nella *dicotomia* non viene presupposta nessuna traslazione tra H(n) e H(n+1), la *presenza* o *assenza* non può essere alcun predicato che si eredita mediante la ricorrenza. La proprietà ricorsiva dell'argomento è il predicato W: « essere un *intero dicotomico* – diviso dicotomicamente in due semiinteri, Δ e R, mediante H ».

4. Viene presupposta in entrambi i modelli *l'esistenza del tempo*: *positivo* nel I modello, *negativo* nel II modello. A tal riguardo Enriques ha mostrato sin dal 1921 l'indi-

pendenza della dicotomia e dell'*Achille* « da ogni considerazione del tempo » (op. cit.: 86).

5. Entrambe le interpretazioni impiegano senza riserve *concetti metrici* come distanza, lunghezza, misura, come pure velocità.

Del pari vengono presupposte:

6. l'*invarianza dell'orientazione* e

7. la *costanza della velocità.*

Questi concetti sono tutti consistenti con la premessa dell'argomento di Zenone – tuttavia non possono essere derivati da questa. La loro introduzione richiede ulteriori assunzioni, che per lo sviluppo dell'argomento sono superflue; piuttosto essi possono esercitare una azione frenante per la comprensione della sua portata.

Le tre osservazioni seguenti riguardano alcuni specifici aspetti delle interpretazioni standard.

8. Il *cosiddetto Achille* viene sempre presentato, a partire da Aristotele, come lo stesso argomento usato nel I modello della *dicotomia* (ὁ αὐτὸς λόγος τῳ διχοτομεῖν; phys. 239b18-19).

L'interpretazione di Aristotele è errata: l'argomento dell'*Achille* non è lo stesso della *dicotomia.*

Nella *dicotomia* l'esistenzta del *telos* viene presupposta; H(n) è una *differenza*: T-R(n).

Nell'*Achille* non viene dato, presupposto o implicato nessun *telos*, nessuna *metà*, nessun *intero*, tanto meno nessuna *bisezione* o differenza. L'*Achille* viene costruito soltanto con una *addizione* ricorsiva.

La *dicotomia* implica l'infinito *per divisione* (διαιρέσει) o *per sottrazione* (ἀφαιρέσει): l'*Achille* l'infinito per *addizione* (προσθέσει - αὐξήσει; Arist., phys. 204a5-7, 206a15-16, 208a21-22).

9. *Divisibilità infinita* - Tutte le interpretazioni sono concordi nel richiamare l'attenzione sul fatto che la condizione necessaria per la *dicotomia* è la divisibilità infinita di una data grandezza.

Ciò non va contestato.

Tuttavia sono anche concordi nell'assumere che la *divisibilità infinita* della *dicotomia* sia una *divisibilità forte* o *binaria*: « tra *due* dati punti, X, Y, giace sempre un *terzo* punto, M ». L'insieme infinito dei punti *tra* X e Y è allora *connesso*, συνεχής (Arist., phys. 185b10-11, 227a10-15), e *ovunque denso*.

L'analisi del testo di Zenone conduce ad un altro risultato. L'infinita dicotomia della *dicotomia* definisce una divisibilità *debole* o *ternaria*, e produce un insieme di punti che è ovunque *discontinuo*: il *discontinuo di Cantor*, la cui presenza nascosta nel testo della *dicotomia* gli antichi non avrebbero mai potuto presagire.

La divisibilità binaria viene impiegata nell'argomento zenoniano della *moltitudine* [5] (πολλά) e conduce ad un sistema non-standard di grandezze infinitesime, con una struttura cosiddetta *non-archimedea*.

Gli antichi avevano già fatto esperienza della minacciosa presenza delle *grandezze non-standard* [6]. Il paradossale sistema di grandezze può venir evitato se e soltanto se la teoria delle *grandezze* (μεγέθη) viene dotata di un assioma formulato da Eudosso. Il sistema di grandezze non-archimedeo è non-eudossiano.

L'interpretazione condivisa senza riserve, che l'*infinita divisione* della *dicotomia* fosse identica alla divisione binaria conduceva, sia in Aristotele, sia nella letteratura di commento, ad una confusione, difficile da sciogliere, tra gli argomenti della *moltitudine* e della *dicotomia*.

Platone propone invece nel suo *Parmenide* (164C-165D) una esauriente interpretazione, tanto irreprensibile quanto affascinante, dell'aporia della *moltitudine*.

10. *Lacune nella dimostrazione* - In nessuna interpretazione c'è un cenno di spiegazione sul modo in cui la conclusione di Zenone possa venire *dimostrata* come un teorema. Il teorema di Zenone è in contraddizione formale con l'asserzione di Aristotele. Questo è il dato di fatto. Però né l'una affermazione, né l'affermazione ad essa opposta, e pertanto nemmeno la contraddizione stessa, pos-

[5] Cfr. SIMPLICIO, *In Aristotelis physicorum libros quattuor priores commentaria*, ed. H. Diels, Berlin 1882: 139; 140, 141.

[6] De lin. insec. 970b13-14; EUCLIDE, elem. iii 16.

sono venir dedotte per inferenza dalle premesse esplicite dell'argomento. Il I modello non esclude l'arrivo, il II non esclude la partenza.

L'analisi del testo mostra che la conclusione di Aristotele, opposta a quella di Zenone, richiede un assioma con cui si afferma l'eseguibilità di un passaggio dal dominio del finito:

$$0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots,$$

nel dominio transfinito dell'infinito attuale.

Questo ragionamento fu introdotto da Cantor, il quale lo ha chiamato *il secondo principio di generazione*, SPG, e caratterizzato come *una generazione dialettica di nuovi concetti, liberamente creati*[7].

Il simbolo del *tipo* d'ordine, ω, dei numeri finiti:

$$0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots,$$

diviene il segno del primo *numero* transfinito, ω – il successore immediato della *totalità dei finiti*:

$$\{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

Il tipo d'ordine della successione transfinita:

$$\{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots; \omega\},$$

è $\omega+1$. SPG asserisce l'esistenza del successore transfinito ω, per un ragionamento di *ricorsione transfinita*, RT, da ω a $\omega+1$.

La dimostrazione del teorema di Zenone richiede l'affermazione dell'assioma non-SPG, equivalente a non-RT, con cui si asserisce l'impossibilità di un passaggio al transfinito.

Ciò presuppone per prima cosa la formulazione della proposizione RT che viene negata.

In effetti l'assioma RT viene utilizzato da Zenone nell'aporia del *luogo* (Arist., phys. 209a23-24; anche Platone, Parm., 138B): se è dato un *luogo*, ad es. il *luogo vuoto*,

[7] *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Berlin 1932: 148, 194.

$\emptyset$, è contenuto nel *luogo* $\{\emptyset\}$, e cosí via all'infinito, – allora anche un insieme ω di *luoghi*,

$$\{\ldots\ \{\{\emptyset\}\}\ldots\},$$

dovrebbe essere contenuto simultaneamente (ἅμα; phys. 211b25) in un *luogo* transfinito, $\omega+1$; però un simile *luogo* non può esistere. Per poter asserire l'impossibilità del luogo transfinito, il medesimo deve prima venir definito, e la sua definizione richiede proprio l'esecuzione di quel ragionamento transfinito, RT, la cui possibilità viene negata.

La proposizione RT è stata formulata da Zenone come uno ἀδύνατον [8] e tuttavia conservata nella coscienza, in questo stato del ripudio – dell'essere negativo. L'aporia del *luogo* si mostrerà in seguito come un luogo dello spirito, dove, prima di Georg Cantor, la ricorsione transfinita si è trovata nello stato della *coscienza infelice*. L'assioma di Zenone è la negazione della ricorsione transfinita; l'assioma di Cantor è la negazione della negazione di Zenone. « La proposizione di Spinoza, *omnis determinatio est negatio*, ha per me una indiscutibile validità » – osserva Cantor [9].

La fenomenologia dello spirito, che ha innalzato l'*Eigentlich-unendliche* di Cantor dal non essere all'essere, mostra la stessa struttura della fenomenologia dello spirito geometrico che aveva prodotto la moltitudine infinita degli universi non euclidei: la *geometria non-geometrica* (γεωμετρικόν πος ἀγεωμέτρητον) costruita su una *arche* la cui geometricità è pervertita (φαύλως ἔχειν; Arist., anal. poster. 77b16-27), fu sviluppata fin dall'*Accademia* con la coscienza della sua falsità e del suo non essere – sino a che Gauß, Bolyai e Lobačevsky sostituirono il valore logico della *falsità* con quello della *verità*, il valore ontologico del *non essere* con quello dell'*essere*, la geometria cattiva non-geometrica con quella buona non-euclidea: « Le contre vient avant el pour ».

Tanto meno è appropriata la concezione che la dimostrazione di Zenone condurrebbe immediatamente *ad ab-*

[8] Cfr. SIMPLICIO, *op. cit.*: 534.

[9] *Op. cit.*: 175, 212.

surdum l'ipotesi del movimento, mediante l'assioma logico di non-contraddizione.

L'assioma decisivo per il procedimento argomentativo di Zenone è la proposizione del *terzo escluso*, la cui origine è possibile che risieda nella dimostrazione, condotta con l'aiuto di una infinita *antanairesis*, dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato con il lato.

Questa proposizione del *terzo escluso* è stata applicata per la prima volta negli argomenti di Zenone per una dimostrazione apagogica nel campo dell'infinità.

Questa scoperta è stata pubblicata già nel 1919 da Enriques nel suo *Sul procedimento di riduzione all'assurdo*[10]: « Non è privo d'importanza riconoscere come, in tal guisa, *le origini della logica si riattaccano alle origini del calcolo infinitesimale* (...) la logica stessa, come teoria del ragionamento per assurdo. Infatti il legame di siffatto tipo d'argomentazione coll'analisi dell'infinito non è contingente, ma tiene a cause profonde che giova mettere in luce ». Purtroppo le sue parole rimasero inascoltate nel campo della filologia zenoniana.

[10] Bollettino della Mathesis 1919: 9; *corsivo* di Enriques. Cfr. anche ENRIQUES-SANTILLANA, *op. cit.*: 1936: 52-53.

Parte prima

La dicotomia e il suo linguaggio

> Yo sé un laberinto griego que es una linea unica recta. En esa linea se han perdido tantos filósofos que...
>
> J.L. Borges, *Obras completas*
> Buenos Aires 1974: 507

Invece di interpretare l'interpretazione di Aristotele e dei suoi interpreti, il presente lavoro si concentra sul testo di Zenone.

Il testo – soltanto il testo di Zenone come oggetto verbale – viene qui sottoposto ad una analisi linguistica. La lingua di Joyce è la lingua dell'*Ulysses*. La lingua di Zenone è la lingua del suo argomento: il suo *logos* parla in termini di luogo e di posizione, *topos* e *situs*. Tanto nel senso etimologico quanto nel senso teoretico del vocabolo, la lingua dell'argomento è una *topo-logia*. Il suo testo è metafisico, il suo pretesto è matematico.

Il vocabolario della dicotomia

In Aristotele la dicotomia ha il seguente testo (phys. 239b12-14): « ciò che si sta muovendo (τὸ φερόμενον) verso (πρός) il traguardo (τὸ τέλος) deve (δεῖν) prima (διὰ τὸ πρότερον) giungere (ἀφικέσθαι) alla metà (εἰς τὸ ἥμισυ) ». Estrema sobrietà, ricchezza di contenuto, incisività dell'affermazione, concentrazione drammatica e tensione del contenuto di idee: lo stile di Zenone è laconico come quello di Esopo. *Maxima e minimis*: nessuna parola è superflua.

La favola di Zenone si riduce ai seguenti vocaboli:

(1) due sostantivi: *traguardo*, τέλος (T) e metà, ἥμισυ (H);

(2) un verbo sostantivato, *quello che si sta muovendo*, τὸ φερόμενον (Φ); ed il verbo *giungere*, ἀφικέσθαι;

(3) l'avverbio πρότερον, *prima*, e la preposizione πρός, *verso*, che esprimono relazioni d'ordine; infine

(4) il verbo modale *deve*, δεῖν.

Non sono richieste ulteriori aggiunte. Tutto il resto si lascia dedurre dall'argomento. Una personalità provocatrice, elitaria, mistificatrice, persino un certo *dandysmo* intellettuale, non potevano non venire riconosciuti al *bello e elegante Zenone* (Plat., Parm. 127B).

L'implicazione di Zenone

La premessa della *dicotomia* è un'implicazione ($\rightarrow$). *Se* Φ tocca il *segno* T mediante l'arrivo al *telos*, e associa a T un determinato *ora*, νῦν, Ω, *allora* Φ *deve* prima aver toccato la *metà* H(n), associandole il corrispondente ora ν(n); Ω *implica* ν(n), per *tutti* gli n.

Nella dicotomia si dimostra l'esistenza di una successione infinita di metà H(n), generate ricorsivamente:

$$T \rightarrow H(n).$$

L'indice n = 1, 2, 3, ... si riferisce al *segno*[1] di un luogo τ (τόπος). Anche T è il segno di un luogo. Il dominio ontico della *dicotomia* consiste dell'insieme dei luoghi:

$$\tau = \{H(n)\} \cup T.$$

[1] Σημεῖον; il termine preplatonico στιγμή, *punto*, che occorre anche in Aristotele, è assente in Zenone e in tutti i testi classici della matematica greca. La prima parola – λόγος ἐν ἀρχῇ – del creatore della geometria è σημεῖον: «*Segno* è ciò che non ha parti». *Am Anfang ist das Zeichen* – diceva Hilbert. Tutti i traduttori di Euclide furono i suoi traditori.

La verità dell'implicazione diacronica $\Omega \rightarrow \nu(n)$ è inconsistente in un unico caso: arrivo in T, esistenza di Ω, *e* non-arrivo in H(n), non esistenza di $\nu(n)$ – a partire da un determinato n finito. L'assunzione dell'arrivo al *telos* con un ultimo salto è in contraddizione formale con la premessa dell'argomento, ed è pertanto esclusa *a priori*. La successione H delle metà, è *infinita*.

Se in qualche dominio ontico questo *non* si verifica, allora questo dominio *non* soddisfa alla premessa dell'argomento. Conseguentemente non può *nemmeno* essere un *modello* per la dicotomia.

I tentativi di confutare Zenone ricorrendo al tempo quantificato e discreto, e ad un numero finito di passi, sono esempi scolastici della *ignoratio elenchi*.

« *Quello che si sta muovendo* » *e la sua funzione*

La parola movimento, κίνησις, non compare nelle premesse della *dicotomia*. La parola κίνησις – ed Aristotele[2] richiama ripetutamente l'attenzione su ciò – comprende ogni sorta di processo, numerazione, misurazione, trapasso dal non-essere all'essere ecc. Il movimento è in senso *assoluto e semplicemente un unico* (ἁπλῶς... μία; phys. 227b21).

Ma nel parlare discorsivo *sul* movimento (λεγόμεν... περὶ τὴν κίνησιν) sono necessarie tre cose (τρία ἐστι τὸν ἀριθμόν):

(1) un *che cosa* (ὅ);

(2) un *dove*, un « medium » *in cui* (ἐν ᾧ), ad es. *nel luogo* (ἐν τόπῳ);

(3) ed un *quando* (ὅτε; Arist., phys. 227b23-29, 262a2-4).

Il parlare sul movimento richiede pertanto una *terna*. Due *oggetti*: (2), (3) – un *dominio* (o *sorgente*) ed un *codominio* (o *bersaglio*) – e tra di loro: (1) – una *freccia* (→). La *freccia* è portatrice di una *funzione*, vale a dire:

[2] Cat: 15a13-b16; phys. 261a32-36; de anima 406a12-13; cfr. anche Plat., Parm. 162C.

associare, o far corrispondere, ad ogni elemento del dominio *uno ed un solo* elemento del codominio. La terna è ordinata. La *freccia* è costantemente orientata *dal* dominio *verso* il codominio: da un punto di vista ontologico il dominio è il *proteron* ed il codominio è lo *hysteron*. Dominio e codominio, oggetto ed immagine sono chiamati da Platone παράδειγμα, paradigma, e εἰκών, rappresentazione; ed il *proteron*, il paradigma, era la stessa *Forma* (Arist., met. 991a19-26; Plat., Parm. 132D).

Mediante la freccia vengono prodotte *coppie ordinate*. Ogni coppia è composta da un elemento del dominio e dall'elemento del codominio ad esso corrispondente.

La funzione della *freccia* può venir considerata anche come atto di generazione acronica: il dominio genera, mediante la freccia, il codominio. La freccia, che associa ad un numero il suo successore, è stata considerata come *genesis* sin dai Pitagorici (Plat., Fedone 103A, 106 D; Arist., met. 1091a28).

Il medesimo dominio ontico può venire dato anche in due esemplari: una volta come dominio, e l'altra come codominio. Ma anche se dominio e codominio sono due regioni dell'essere distinte, non è tuttavia esclusa una inversione dei ruoli: il dominio diventa codominio, e viceversa; in tal caso si inverte il senso della freccia (funzione inversa).

Per Aristotele il tempo (χρόνος) è il *proteron*, la variabile indipendente a cui viene riferito il movimento: *chiaramente* un *numero della continuità* (χρόνος ἀριθμὸς κινήσεως... συνεχοῦς φανερόν; 219b1-2, 220a25-26). L'insieme ν del tempo è il dominio: *tutto si muove nel tempo* (ἐν χρόνῳ πᾶν κινεῖται; 227b26). L'insieme topico τ del movimento è il codominio. Il vocabolo *toccare*, ἅψις, sistematicamente adoperato da Aristotele, è una espressione estremamente pregnante per l'operazione della *produzione di coppie* di *ora* e *qui*. La produzione della coppia ordinata $\langle \nu, \tau \rangle$ è *funzione* di quello che si sta muovendo (τὸ κινούμενον; phys. 240a2), della *freccia* aristotelica, che denotiamo con:

$$\chi\colon \nu \rightarrow \tau.$$

Quello che si sta muovendo, il Φ della *dicotomia*, ha la funzione inversa, ossia di generare la coppia *inversamente ordinata* $<\tau, \nu>$:

$$\Phi: \tau \rightarrow \nu.$$

Dominio della funzione di Zenone Φ è il dominio ontico del *topos*: $\tau = \{H(\nu)\} \cap T$, ed il suo codominio è l'insieme diacronico di *ora*: $\nu = \{\nu(n)\} \cup \Omega$.

Ma che cos'è quello che si sta muovendo – un pezzo d'oro? *Uomo o dio*? Oppure il *pensiero*? – (τῆς διανοίας κίνησις; Arist., phys. 227b25, 262a3; de lin. insec. 968a25-969b1). *Che cosa* o *chi* esso sia, la sua funzione naturale, Φ, viene esercitata, la sua esistenza viene provata, solo se esso ad ogni luogo, H(n) e anche T, ad ogni *grandezza* di un dominio metrico, associa un *ora*, un numero, una misura, un *logos*, ed in questo modo soltanto sorge il codominio del tempo, del numero del *logos* o della misura. In contrapposizione ad Aristotele, G. Cantor [3] sottolineava che il tempo non è la misura del movimento, bensí viceversa il movimento è la misura del tempo.

Dualità tra logico e ontologico

Alla *rappresentazione*:

$$\text{dominio} \rightarrow \text{codominio},$$

nell'ambito ontologico corrisponde una *implicazione* in quello logico: il codominio *implica* il dominio. Con riferimento alla dimensione logica il codominio è *premessa*, pertanto un *proteron* – il dominio è *conseguenza*, pertanto uno *hysteron*. Le corrispondenti frecce della *rappresentazione*, « $\rightarrow$ », rispettivamente della *implicazione*, « $\rightarrow$ », sono orientate l'una inversamente all'altra. La relazione d'ordine *proteron-hysteron* comporta la struttura d'ordine: *prima di* - *dopo di*, di un tempo eterno che sussiste in sé acroni-

[3] *Op. cit.*: 192.

camente (Plat., Tim. 37C-38A). Al passato acronico del dominio corrisponde il futuro logico della conseguenza acronica; al futuro ontologico del codominio corrisponde il passato logico della premessa. Oppure: al tempo acronico positivo del dominio *ontico* corrisponde un tempo *inverso*, negativo, in quello del dominio *logico*. La dimensione ontologica e quella logica dell'essere sono nella relazione reciproca di *dualità*. Questa dualità è stata segnalata già da Aristotele (phys. 199b34-200b8).

Il dominio ontico della dicotomia

Il codominio ν implica il dominio τ: l'implicazione riguarda il predicato ontologico dell'essere. Da ciò segue che l'implicazione: $\Omega \rightarrow \nu(n)$, che viene postulata per il codominio ν, vale anche nel dominio τ della *dicotomia*:

$$[\Omega \rightarrow \nu(n)] \rightarrow [T \rightarrow H(n)].$$

Però l'implicazione è irreversibile. Questo significa per prima cosa che il dominio topologico dei luoghi τ – pertanto anche l'implicazione $T \rightarrow H(n)$ – possono sussistere indipendenti, *assolutamente* in sé e per sé, e che tutte le conseguenze dell'implicazione $T \rightarrow H(n)$ possono venir derivate anche senza l'assunzione del tempo: $\nu = \{\nu(n)\} \cup \Omega$.

Le implicazioni $\Omega \rightarrow \nu(n)$ e $T \rightarrow H(n)$ si distinguono in due aspetti. *Primo*: la relazione d'ordine binaria, *prima di - dopo di* (διὰ τὸ πρότερον), è valida soltanto per il dominio diacronico:

$$\nu(1) < \nu(2) < \dots \nu(n) < \nu(n+1) < \dots < \Omega.$$

Invece, nel dominio topico non ha nessuna importanza che *tutte* le H stiano prima o dopo di T, oppure siano distribuite attorno a T in una retta o in un piano: variazioni regolari e irregolari dell'orientazione (cfr. Arist., phys. 228b24: κεκλασμένης; 261b33: ἀνακάμπτει; 264a14-20: diaylon) sono pure consistenti con l'argomento di Zenone.

Secondo: a differenza di Ω, l'esistenza di T è già garantita, sin dalla premessa, mediante un assioma.

Anche l'implicazione: $T \rightarrow H(n)$, è irreversibile. Questo fatto ha rilevanti conseguenze: l'esistenza di T non è derivabile dall'esistenza di $H = \{H(n)\}$, la quale è *assoluta*. Essa è consistente tanto con l'esistenza di T, quanto con la sua non-esistenza: per questo motivo è indispensabile che l'esistenza di T venga affermata con un assioma nella premessa della *dicotomia*.

La metà dicotomica

Poiché la sua esistenza è *assoluta*, la metà dicotomica H deve essa pure venir caratterizzata e definita indipendentemente dal *telos* T. L'implicazione: $T \rightarrow H$, è *assolutamente vera*, vale a dire indipendentemente dall'essere o dal non-essere di T.

Ogni metà $H(\tau)$ implica immediatamente l'esistenza di un *intero*[4], $W(\tau)$, che viene diviso da $H(\tau)$ in due *semiinteri*. La parola *semiintero* deve venir intesa in senso puramente topologico, come semispazio, semipiano, semiretta. L'*intero* $W(\tau)$ può essere un segmento, ma anche una retta o una semiretta. « Essere un *intero dicotomico* » è una *proprietà* che viene definita per mezzo di un insieme $W = \{R, \Delta\}$, coppia non ordinata di due elementi, i predicati cinetici R e Δ. Un determinato oggetto W è la *concatenazione* dei suoi semiinteri: $W = \Delta \& R$. La coppia dei semiinteri è *necessariamente ordinata*. W è:

$$<\Delta, R>, \textit{ oppure } <R, \Delta>.$$

Tutte queste proprietà sono del pari indipendenti dalla natura dell'insieme degli indici $\{\tau\}$, ed il carattere di τ deve venire stabilito a parte con un assioma. In questo caso assumiamo come assioma che:

[4] « "ΟΛΟΣ, Anglice *Whole* », cfr. CORNELII SCHREVELII, Lexicon Manuale Græco-Latinum & Latino-Græcum, ed. XIV, London 1787.

$$\tau = 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$$

Da ciò segue:

$$R(n) = W(n+1),$$

vale a dire R(n) viene nuovamente diviso da H(n+1), ed in questo modo viene trasformato nell'intero W(n+1). R(n) è nuovamente un intero W, vale a dire W(n+1) = succ. W(n). Il predicato ricorsivo della dicotomia è « W ». La proprietà W viene ereditata sempre e soltanto dal semiintero R.

Anche la proprietà H può venir definita per mezzo dei predicati Δ e R. Però H è il segno della bisezione. W(n) è *quello che viene diviso*, e la sua divisione mediante H(n) ha luogo *levando* e *togliendo* Δ(n) da W(n) – ἀφαιρεῖν (phys. 187b26-27) e ἀναιρεῖν (phys. 238-27-28) – un verbo che traduce tutti i significati del tedesco *aufheben*: abrogare, elevare, conservare.

Il semiintero ricorsivo Δ fu chiamato dai Pitagorici *gnomone* [5], esso viene tolto da un quadrato, ed il resto è ancora un quadrato (*fig. 4*); se Δ viene tolto dalla diagonale il resto è ancora una diagonale (segmento, ἀποτομή, elem. x 73) – che viene conservata come W(n+1). La *dicotomia* è una *aphairesis* e *anairesis* di Δ(n) da W(n), che viene determinata da H(n).

H viene definito mediante una coppia ordinata: H = $<\Delta, W>$. Questo ordinamento di *sottraendo* e *minuendo* è necessariamente unico, *non invertibile*, e vale *assolutamente* per l'intero assegnato W indipendentemente dall'ordinamento dei suoi semiinteri. H(n) è *assoluta* perché viene definita per entrambi i modelli di W(n) mediante la coppia ordinata non invertibile, $<\Delta, W>$.

Il semiintero Δ è contenuto in W come parte propria dell'intero: $W \supset \Delta$. Nel caso in cui venga attribuita una *grandezza* o *misura* a W(n), Δ(n) e R(n), allora l'unicità di H(n) è equivalente all'unicità del rapporto dicotomico

[5] Γνώμων. Cfr. Arist., cat. 15a30, phys. 203a13-15. Κατὰ γνώμωνος φύσιν, in: Philolaos, Frg. 11; cfr. anche Theon, expositio, 37-40.

delle parti, vale a dire all'indipendenza del *logos* [Δ : W] dalla *anairesis* dicotomica dell'ordinamento, o dell'ordinamento inverso, dei semiinteri Δ(n) e R(n) di W(n). La relazione topologica dell'*essere contenuto*:

$$W(n) \supset \Delta(n),$$

viene allora tradotta in termini *metrici*: « l'intero è *piú grande* della parte »:

$$W(n) > \Delta(n).$$

L'assioma elem. i Ax.8 è condizione *sine qua non* per conseguire la conclusione di Zenone nelle interpretazioni metriche [6].

Orientazione

La definizione assoluta di H per mezzo di $<\Delta, W>$ permette la traduzione, parimenti assoluta, del vocabolo πρός, *verso*, in termini di coppia ordinata.

Il movimento può aver luogo solo lungo Δ(n), fino ad H(n) incluso. In Δ(n) esso è costantemente diretto verso H(n) – estremo di Δ(n) – implicitamente verso R(n). Pertanto il predicato *orientazione* può venire attribuito anche al singolo segno H, e venire rappresentato come un *vettore* associato ad H(n).

Se in R(n) è contenuto un *telos*, allora H(n) è diretta necessariamente ed invariabilmente verso T (πρός τὸ τέλος). Il segno topologico H(n), della bisezione di W(n), è contrassegnato come *metà dicotomica* mediante la proprietà dell'*orientazione*. Per questo motivo H(n) si distingue da

[6] Secondo una tesi stupefacente di Arpád Szabó (*Anfänge der griechischen Mathematik*, München-Wien 1969: 394-408) l'assioma 8 è incompatibile con l'argomento di Zenone, e non trova nessuna applicazione negli *Elementi*, perché la sua unica motivazione consisterebbe nella confutazione di Zenone. Infatti l'assioma 8 gioca il ruolo principale in tutti i teoremi rilevanti del libro xii (prop. 2, 5, 10-12, 18) come fondamento del cosiddetto *metodo di esaustione* di Eudosso.

ogni altro segno cui pure può venire attribuita presenza passata oppure futura. Non si può assegnare un *logos*:

$$\lambda(n) = [\Delta(n) : W(n)],$$

né allo *start*, né al *telos*. Se c'è il movimento, allora l'espressione *metà dicotomica* H(n) traduce il concetto metrico di *velocità*, riferito all'intervallo finito $\Delta(n)$.

Il *movimento*, che nella *dicotomia* è oggetto di confutazione, viene definito come uno stato dell'*essere in movimento* (Arist., phys. 231b29-232a17), vale a dire come *presenza orientata* – vettore di velocità acronica – in un luogo H.

Questo significa: avere una *orientazione* è una proprietà *assoluta* di H(n) – pertanto anche di W(n) – che T esista o meno. Soltanto la specificità dell'orientazione – diretta:

$$W = \langle \Delta, R \rangle,$$

oppure inversa:

$$W = \langle R, \Delta \rangle,$$

rimane indecisa; rimase *escluso* per $W = \Delta \& R = R \& \Delta$ soltanto il *terzo* caso, ossia il non aver alcuna orientazione.

Nel caso di un movimento concreto, l'orientazione diretta o inversa viene decisa ad ogni passo dal mobile stesso. Questa decisione può venire assegnata all'argomento solo mediante un assioma supplementare, che postula per ogni W(n) la specifica orientazione, diretta o inversa, di Δ e R. Per lo svolgimento dell'argomento tutto ciò è superfluo. La metà dicotomica *assolutamente* determinata: $H = \langle \Delta, W \rangle$, è già sufficiente – oltre ad essere necessaria.

Oggetto dell'argomento non è tuttavia un determinato modello di W, bensí la *proprietà* W, la totalità indistinta di tutti i modelli: l'*universo* stesso W. L'*esser orientato* – anche la sua trasmissione da W(n) a W(n+1) – è in sé consistente anche con un numero finito di salti, però la finitezza è esclusa dalla premessa dell'argomento. Ma la sola infinitezza non è sufficiente per la caratterizzazione dell'insieme $\{H(n)\}$; poiché essa può essere contenuta come parte propria in un insieme piú ricco, o – nel caso metrico – limitata (da minorante e maggiorante) oppure no. Tutte e due le specie di infinità sono consistenti con l'infinità della H-successione. Deve essere di volta in volta stabilito, con un ulteriore assioma, se ha luogo l'uno o l'altro caso.

È compatibile con l'argomento anche un movimento di rotolamento o di traslazione, che scorra in $\Delta(n)$, da $A(n)$ – luogo di partenza – sino a $H(n)$, in un unico e connesso fluire, e sia συνεχής nel senso di Aristotele. L'*unicità* di $H(n)$ in un arbitrario $W(n)$ esclude soltanto l'associazione del predicato H ad un altro luogo eventualmente toccato all'interno del semiintero $\Delta(n)$.

Una delle piú importanti considerazioni legate all'argomento di Zenone consiste tuttavia proprio in questo: per la caratterizzazione del movimento è sempre sufficiente una ω-successione di metà dicotomiche ricorsivamente numerabili, tali che tra $H(n)$ e $H(n+1)$ non sia compresa nessuna H.

L'affermazione nella premessa dell'argomento dell'esistenza di un *telos* ha due immediate conseguenze.

In primo luogo:

(a) l'esistenza di T

e

(b) $T \in R(n)$

implica la ricorsività infinita delle successioni $H(n)$ e $W(n)$.

In secondo luogo, se il *telos* è contenuto in un primo resto, ad es. $R(0) = W(1)$, ossia $T \in R(0)$, allora:

$$T \in R(n) \text{ implica } T \in R(n+1),$$

e tutti i resti che si succedono:

$$R(0),\ R(1), \ldots,\ R(n),\ R(n+1), \ldots$$

pertanto tutti i $W(n)$, sono racchiusi l'uno nell'altro:

$$W(1) \supset W(2) \supset \ \ldots \ \supset W(n) \supset W(n+1) \supset \ \ldots;$$

perciò anche la successione:

$$H(1),\ H(2), \ldots,\ H(n),\ H(n+1), \ldots,$$

è contenuta come sottoinsieme proprio in un insieme chiuso dai due estremi X e Y, che definiscono $R(0) = W(1)$, nessuno dei quali è una metà H. Nel caso metrico X e Y sono maggioranti e minoranti.

Il carattere *assoluto della anairesis* $W(n+1) = W(n) - \Delta(n)$ conserva tuttavia, anche nel caso in cui si postula l'esistenza di T, la sua significanza assiomatica – analogamente a quanto accade per i teoremi della *geometria assoluta* nella geometria euclidea.

Poiché $\Delta(n)$ è un vettore applicato che termina in H(n), all'altro suo estremo può venire associato anche il predicato cinetico *partenza*, come *arche*, A(n), del movimento in W(n):

$$\Delta(n) = [A(n),\ H(n)]$$

essendo A(n) identica con X(n) o Y(n).

Se l'orientazione dei semiinteri Δ e R rimane invariata in W(n) e $W(n+1)$, allora $A(n+1)$ non è alcuna

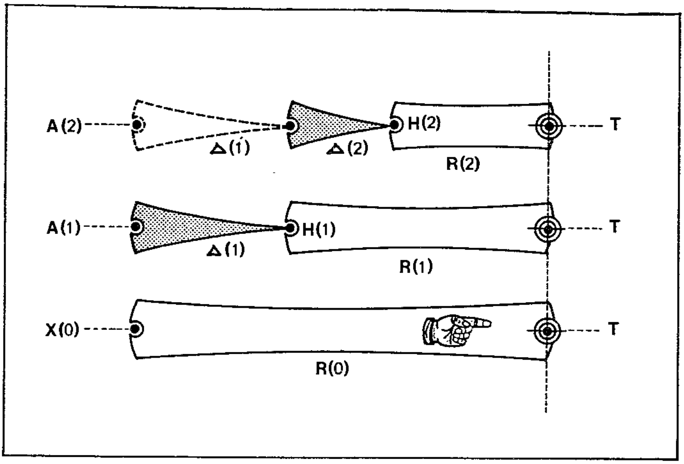

Fig. 1 - *Dicotomia* con orientazione costante di tipo $\omega+1$.

metà, ma è coincidente con H(n): $\Delta(n)$ e $\Delta(n+1)$ sono connessi in H(n), divenuto A(n+1). Il dominio ontico della dicotomia è del tipo $\omega+1$ (*fig. 1*) oppure $1+{}^*\omega$.

Se si inverte l'orientazione dei semiinteri, allora A(n+1) non è coincidente con H(n), bensí con uno degli estremi di W(n), ossia con X(n), *oppure* con Y(n). H oscilla intorno a T e – se si fa l'assunzione che un *telos* sia contenuto in R(n) – H(n+1) è il *successore* immediato di H(n) con riferimento alla proprietà della *metà dicotomica*, però, non lo è con riferimento alla proprietà della *presenza*, poiché $\Delta(n)$ e $\Delta(n+1)$ non sono connessi.

In questo caso la *dicotomia* può venire sostituita con due dicotomie simultanee (*fig. 2*). Ad es. una di esse genera la successione $\Delta(p)$, con gli indici pari:

$$p = 0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots;$$

l'altra la successione $\Delta(d)$, con gli indici dispari:

$$d = 1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots;$$

esse sono entrambe connesse, orientate verso lo stesso *telos* T, una secondo il tipo d'ordine ω, l'altra secondo ${}^*\omega$. Il *telos* T è una *sezione*, che separa l'una dall'altra le due successioni H(p) e H(d), e non appartiene né ad $\{H(p)\}$, né ad $\{H(d)\}$. Il tipo d'ordine dell'insieme topico $H(d) \cup T \cup H(p)$ è: $\omega+1+{}^*\omega$.

L'assunzione di una posizione di partenza, A(n), per W(n), sebbene consistente con l'argomento, tuttavia non è né presupposta né implicata da questo. Ai fini dell'argomento non è necessario assumere che il mobile sia partito da qualche posto. È rilevante soltanto accertare che, ovunque esso sia, il mobile può trovarsi nello *stato di movimento* in una sola posizione, in H(n) – ed in tal caso, se T esiste, è necessariamente orientato *verso* T.

Quello che si sta muovendo si trova sempre in H(n) – *nel mezzo del cammin*. Davanti ad esso si trova sempre lo stesso ω-subuniverso – *una selva oscura* – che lo separa dal *telos*, dalla compiutezza. Il *resto topologico* del movimento in direzione del *telos* rimane – per *tutti* gli H(n) –

invariabilmente la stessa ω-successione:

$$H(n+1),\ H\ (n+2), \ldots,\ H(n+k),\ H(n+k+1), \ldots,$$

di metà non raggiunte.

Ci troviamo di fronte ad un paradosso o ad una trivialità?

La dicotomia: Cantor e Spinoza

La ω-successione H(n) è certamente il risultato di un ragionamento ricorsivo, però il *movimento del pensiero* che si sviluppa nell'argomento, è *finale*, è attratto e determinato eticamente da uno *scopo*, il traguardo finale: la perfezione, la completezza, τὸ τέλος (cfr. Arist., an. post. 85b29-30).

La polifonia semantica del vocabolo *telos* – traguardo; posto davanti, verso il quale è orientata la *praxis*; conclusione; fine; compiutezza; adempimento; completezza – permette un impiego generale del medesimo senza riguardo alla specie concreta del processo. Esso svolge un ruolo decisivo nell'aporia *del piú giovane e del piú vecchio* nel

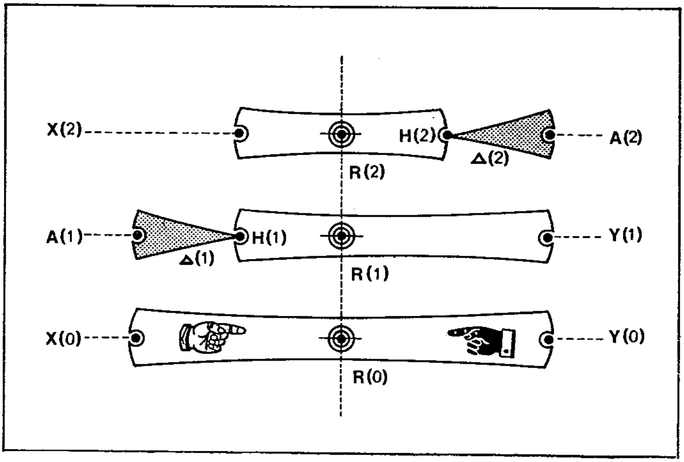

Fig. 2 - *Dicotomia* oscillante di tipo $\omega+1+{}^*\omega$.

Parmenide (153C), ed anche nella filosofia politica di Platone dove si tratta del *processo di generazione della giusta misura* ai fini della *distinzione del bene e del male* (Polit., 283A-286E; 259BC).

La *arche* dell'argomento è uno *eschaton*: il *telos*, il traguardo. Nella *dicotomia* è proprio l'esistenza del *telos*, nel luogo transfinito $\omega + 1$, ciò che implica l'esistenza dell'intera ω-successione, ma non viceversa.

L'avvicinamento all'uno perfetto, al *telos*, mediante la successione dei molti ed imperfetti, la quale converge verso di esso, è determinata dalla *coscienza della preesistenza* di questo *telos* – dal lato prioritario della perfezione, dell'ultimo ed estrema, dello *eschaton* (metaph. 1021b29-30): ogni metà dicotomica è indipendente dalle altre – è orientata mediante una freccia in direzione del *telos* transfinito. All'insieme delle metà è associato un unico *telos*.

Questa determinazione – ha scritto Georg Cantor[7] – è « la ferma sicurezza e certezza nei riguardi dell'essere dell'assoluto ». Il procedimento ricorsivo dell'argomento di Zenone è una escatologia. Il suo meccanismo non è la genesi di tipo causale della generazione, al modo in cui ha scritto Aristotele nel *de generatione animalium* – ma è piuttosto la convergenza, di cui ha parlato Spinoza, autore prediletto da Cantor, nell'ultima parte della sua *Etica*: *De potentia intellectus seu de libertate humana* (cfr. Prop. 36, scholium).

La quaterna dicotomica

Poiché nella *dicotomia* viene presupposta l'esistenza di T, l'intero implicato da H espone costantemente la relazione ternaria *fra*: $W = [X, H, Y] = [Y, H, X]$; (μεταξὺ τρισίν; Arist., phys. 226b26).

Fra è un termine primitivo, implicito, del vocabolario di Zenone. Per determinare oltre a ciò H come specifica

[7] *Op. cit.*: 176.

metà dicotomica, vennero prese in prestito dal linguaggio dell'atletica le parole straniere Δ e R. Però l'argomento di Zenone permette la traduzione delle parole straniere Δ e R mediante il termine *fra* della lingua madre della dicotomia.

In effetti dall'argomento di Zenone non deriva l'esistenza di A(n) cioè di una partenza. Tuttavia dal medesimo argomento segue necessariamente che, per raggiungere la metà H(n), *ciò che si sta muovendo* verso la metà H(n) deve *prima* aver già raggiunto una posizione. Il II modello della dicotomia si fonda su questa irreprensibile implicazione.

Questa posizione – al pari di H – non può essere alcuna posizione di partenza, bensí soltanto un *segno intermedio*. Però, a causa dell'unicità di H, è evidente che questo segno intermedio non può essere alcuna *metà*, neppure la *metà* di un eventuale passo precedente. L'asserzione « H(n) *implica* una posizione intermedia già raggiunta » si differenzia dalla proposizione zenoniana: T→H(n), soltanto per il fatto che il segno T viene sostituito con H e H con un altro segno, ad es. M, Μέσον, *medio*: H(n)→M(n).

Il *medio* M, al pari *della* metà H, è il segno di una bisezione. Però una bisezione di Δ(n) e non di W(n): H è il segno della *dicotomia* di W, M è il segno della *mesotomia* (Platone, Pol. 265A4) di Δ. La premessa esplicita dell'argomento è:

[T→H] *implica* [H→M],

« la *dicotomia* di W implica la *mesotomia* di Δ ». Vale a dire:

{T→[X,H,Y]} *e*
[X, H, Y]→{[X, M, H, Y] *oppure* [X, M, H, Y]}.

In altri termini: « se sono dati tre segni, X, H, Y, allora esiste anche un quarto segno M, compreso tra X e H, *oppure* tra H e Y ».

Questo è l'assioma della *divisibilità ternaria*, o *debole*, la quale conduce ad un insieme *denso in sé*. L'*intero* W si rivela in questo modo come una *quaterna*:

$$W \text{ è } [X, M, H, Y] = <\Delta, R> \text{ \textit{oppure}}$$
$$W \text{ è } [X, H, M, Y] = <R, \Delta>,$$

due esemplari enantiomorfi di un'unica quaterna assoluta, l'insieme {M, H, X, Y}.

Ogni esemplare W(n) della quaterna dicotomica dispone di una dissimmetria, ovvero orientazione, immanente e assoluta. Come ipostasi della quaderna assoluta, ogni quaterna – pertanto ogni dicotomia – concreta è un universo chiuso il quale sussiste in sé e per sé, senza avere bisogno di un *iperuranio*, di un eventuale spazio di immersione e di un sistema di riferimento esterno, e cosí pure è indipendente dall'esistenza o dalla non esistenza dell'esemplare opposto.

La *metà* dicotomica H divide la quaterna W in due semiinteri, dei quali uno è una *terna* mesotomica: [X, M, H] oppure [H, M, Y], e l'altro: [H, Y] oppure [X, H], *non* è una terna – e la proprietà W viene ereditata di volta in volta da quella parte che *non* è una terna.

Dal momento che H e M – la *dicotomia* di W e la *mesotomia* di Δ – determinano assieme una *tricotomia* definita mediante l'implicazione: T→H e H→M, la ricorsività della proprietà W è soggetta alla seguente proposizione dell'*excluded middle*: « la parte media [H, M] oppure [M, H] di W è esclusa dalla ricorsione ».

Solo le parti estreme: [X, H] oppure [H, Y], ereditano la proprietà W, di essere quaterna dicotomica.

Quaterne dicotomiche presso i pitagorici

Il primo esempio di una quaterna dicotomica fu scoperto dai pitagorici nella divisione dell'ottava *do-maggiore* della tonalità *lidica*:

$$R(o) = [do, Do].$$

All'*unicità* del logos dicotomico corrisponde il teorema dell'unicità della divisione armonica: l'ottava, l'*intero* (τὸ διὰ πασῶν) può venir diviso in un'unica maniera in due intervalli sinfoni. Questi sono di volta in volta una quinta, Δ:

[do, sol] oppure [fa, Do],

ed una quarta, R:

[sol, Do] oppure [do, fa].

Il segno della dicotomia armonica, H, è *sol*, cioè:

W = [do, sol, Do];

oppure *fa*, cioè:

W = [do, fa, Do].

Il segno della *mesotomia*, M (*fa* oppure *sol*) rimane muto, e si trova nella quinta: [do, fa, sol] oppure [fa, sol, Do]. La *composizione* dei *logoi* corrisponde ad una *composizione* (σύνθεσις) sinfonica: Δ&R oppure R&Δ, produce ogni volta la stessa ottava, W (*fig. 3*). L'espressione: *qua-*

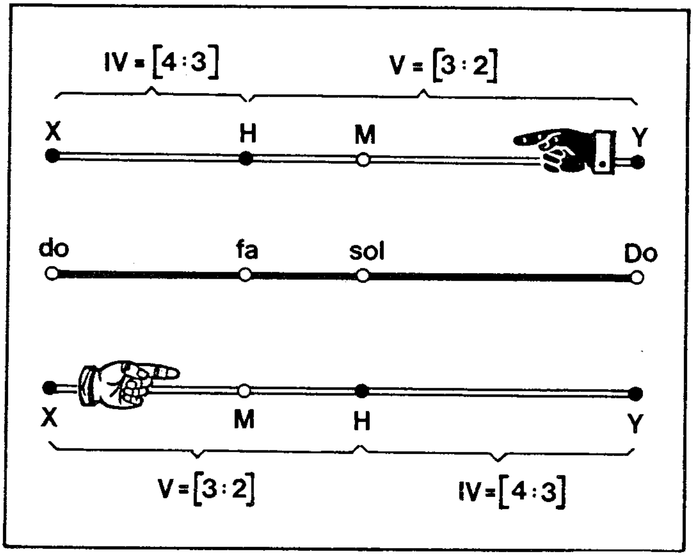

Fig. 3 - Divisione dell'ottava in intervalli sinfoni.

terna, occorre esplicitamente in Platone, Rep. 546B7: « tre intervalli definiti da quattro termini » – in un famoso contesto, forse indecifrabile ma certamente in connessione criptica con l'ottava musicale.

Il secondo esempio è la *antanairesis* della diagonale $\delta(0) = R(0)$ del quadrato $Q(0)$ e del lato $\sigma(0) = 1$. Essa rappresenta un modello isomorfo alla *dicotomia* di Zenone, *generando* un infinito per *divisione e sottrazione* – una *dicotomia* che procede per quaderne concordemente orientate. La diagonale $\delta(0)$ e generalmente ogni diagonale $\delta(n-1)$ rappresenta un resto $R(n-1)$. Il resto $R(n-1)$ viene diviso dicotomicamente da $H(n)$, e viene transformato nell'intero dicotomico $W(n) = \Delta(n) \& R(n)$. Il semiintero $R(n)$ è il nuovo resto e rappresenta la diagonale del quadrato $Q(n)$. Il gnomone, che viene tolto, è il semiintero $\Delta(n) = 2\sigma(n)$. Ovviamente, il segmento $\Delta(n)$ è la concatenazione di due segmenti parziali uguali: $\Delta(n) = \sigma(n) \& \sigma(n)$. La sua bisezione ha luogo nel *medio* mesotomico $M(n)$. Ogni intero è una quaterna dicotomica: $W(n) = [X, M, H, Y]$. L'antaneiresis (*fig. 4*) è un *movimento* ricorsivo, diretto verso il *telos*, identico all'estremo Y della diagonale $\delta(0)$ del quadrato $Q(0)$. Chiaramente $R(n)$ converge a zero: $\delta(n) \rightarrow 0$, nonostante rimane, per ogni n, una grandezza finita: $\delta(n) > 0$. I teoremi su cui si basa la dimostrazione si trovano in Euclide, elem. ii 9, 10 [8].

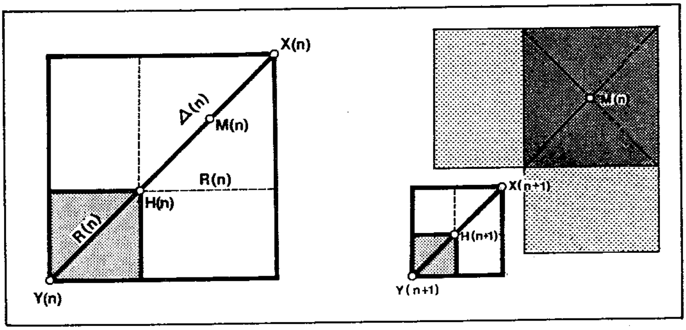

Fig. 4 - *Antanairesis* della diagonale e del lato del quadrato.

[8] Cfr. I. Toth, *Le problème de la mesure dans la perspective*

L'intero $W(n)$ è la diagonale $\delta(n-1)$ del quadrato $Q(n-1)$, parimenti è il resto $R(n)$ la diagonale $\delta(n)$ del quadrato successivo $Q(n)$. Ma il gnomone, il semiintero: $\Delta(n) = 2\sigma(n)$, può venir considerato anche come la diagonale di un quadrato, denotato con $Q^*(n)$. Chiaramente, il lato di $Q^*(n)$ è la diagonale $\delta(n)$ del quadrato $Q(n)$. Il rapporto delle estensioni: $[Q : Q^*]$, è uguale con il logos $[1 : 2]$. Piú significativo della relazione metrica in sé banale: $[Q : Q^*] = [1 : 2]$, è il fatto che $Q(n)$ e $Q^*(n)$ si trovano in una relazione non-metrica di *dualità*: la diagonale dell'uno, Q, è costituita dal lato δ dell'altro, Q^*; la diagonale 2σ di Q^* consiste di due lati di Q. La diagonale $\delta(n-1)$ di $Q(n-1)$ è la concatenazione delle diagonali $\delta(n)$ e $2\sigma(n)$ dei quadrati duali $Q(n)$ e $Q^*(n)$.

La proprietà trasmessa per ricorsione della *antanairesis* della diagonale del quadrato è quella di essere una *quaterna dicotomica* $W(n)$: la metà $H(n)$ divide dicotomicamente la diagonale $\delta(n-1) = R(n-1)$ in due diagonali, $R(n)$ e $\Delta(n)$, duali; $M(n)$ è il segno della diagonale duale. Anche vale che $H(n)$ definisce una partizione del quadrato $Q(n-1)$ in due quadrati reciprocamente duali $Q(n)$ e $Q^*(n)$, congiunti in $H(n)$. Il medio mesotomico $M(n)$ è il centro del quadrato duale $Q^*(n)$. La recursione finita da n ad $n+1$ può venir rappresentata come la congiunzione simbolica:

$$Q(n) = Q^*(n+1) \& Q(n+1),$$

di due quadrati duali. La proprietà ereditaria che viene trasmessa è di « essere un quadrato Q », ed ogni Q genera un Q. Nel processo della generazione dicotomica il quadrato duale Q^* gioca sempre il ruolo della mediazione.

L'argomento della *dicotomia* è equivalente alla dimostrazione della proposizione: « la diagonale $\delta(n)$ *non* è commensurabile con il lato $\sigma(n)$ ».

La *commensurabilità* è una proprietà assegnata a una

de l'être et du non-être. Zénon et Platon, Eudoxe et Dedekind: une généalogie philosophico-mathématique; in: Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique. Hommage à Jules Vuillemin; ed. R. Rashed, Paris 1991.

coppia di grandezze. Se la proprietà esiste, allora necessariamente esiste anche una *terza* grandezza $\varkappa$, la *misura comune*, e viceversa. Se $\varkappa$ esiste, essa può essere *generata* da una antanairesis finita: esiste un *ultimo* resto: $R(n) = \varkappa$; (elem. I-3); il processo *non* è una dicotomia zenoniana.

« Ma se non è possibile all'antanairesis di essere infinita »: οὐ ἐνδέχεται τὴν ἀνταναίρεσιν ἄπειρον εἶναι [9] – allora la coppia è commensurabile. Se l'antanairesis non è finita allora *non è possibile generare* (μὴ ἐνδέχεται... γενέσθαι; elem. X def. 1) una misura comune: non esiste un ultimo resto. Per ogni n:

$$R(n)>0, \text{ e } R(n)\rightarrow 0.$$

Ciò implica necessariamente l'inesistenza di $\varkappa$. Alla coppia $t = \{\sigma, \delta\}$ deve essere assegnata la proprietà positiva in sé della *non commensurabilità*. Poiché il processo non ha fine, $\delta(n)$ *non* è *misurabile* con $\sigma(n)$: μὴ σύμμετρον (Plat., Teet. 147D; Parm. 140C; Meno 84A); una relazione di commensurabilità non può aver luogo, « il processo di misura non è eseguibile, né piú né meno » (μετρεῖν... μήτε σφόδρα μήτε ἠρέμα δυνατά; Plat., Legg. 820A). L'espressione μετρητὰ πρὸς ἄλληλα (Legg. 819E) – *misurare reciprocamente* – e la sua negazione (Legg. 820C) – si addicono al processo di antanairesis tanto quanto il verbo *generare* la misura, impiegato anche in elem. x def. 1,2.

La dimostrazione antanairetica dell'incommensurabilità *fa uso dell'assioma del terzo escluso*: l'antanairesis è finita, oppure non è finita (cfr. elem. x 1-2). L'oggetto del teorema, la non-esistenza della misura comune, si dimostra direttamente: l'antanairesis non è finita.

La verità del teorema è indipendente da RT, esso rimane sempre vero se la verità viene attribuita alla proposizione RT o alla sua negazione, non-RT, in questo senso la dimostrazione è *assoluta*, cosí come la verità dei teoremi elem. i 1-28 è indipendente dalla verità o dalla falsità di

[9] Cfr. EUDEMO ap. SIMPLICIO, *In Aristotelis physicorum libros quattuor posteriores commentaria*, ed. H. Diels, Berlin 1895: 1237.

E, il postulato euclideo delle parallele – oppure non-E, il postulato di Lobačevsky.

La dimostrazione classica – della quale non si trova traccia in nessuna testimonianza prima di Aristotele (anal. pr. 41a24-29) – è elegantissima, non fa uso dell'infinito né del terzo escluso. Però essa non è valida nella geometria assoluta: tra le sue ipotesi si trova nascosto il postulato euclideo E. L'antanairesis [10] – finita oppure infinita è, invece, *assoluta* anche *geometricamente*; essa è eseguibile anche con quadrati non euclidei.

In *tutti* i quadrati euclidei sussiste la stessa relazione d'incommensurabilità. Ma in un universo non euclideo – vale a dire: « se è impossibile al triangolo di avere la somma degli angoli uguale a 2R » esistono « anche quadrati con diagonale commensurabile » (Arist., de cælo 281b5-7).

Per dimostrare la incommensurabilità è sufficiente mostrare che il processo della misurazione, diretto verso la diagonale in quanto *telos* assegnato, non è eseguibile, che un $\varkappa$ non è *generabile* (μεδέν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι; elem. X def. 1). La *antanairesis* è isomorfa allo svolgimento delle premesse dell'argomento.

Una annotazione critica (peraltro non giustificata e contenente errori) di questa dimostrazione zenonica dell'incommensurabilità si trova in anal. pr. 65b16-19 [11].

La lingua ternaria della dicotomia e il discontinuo di Cantor

Per poter conoscere, denotare, identificare e distinguere l'una dall'altra *tutte* le quaterne della dicotomia, è conveniente usare, in luogo di X(n), Y(n), H(n) e M(n), una *lingua ternaria*, per la sua maggiore semplicità.

[10] Un esame generale di questo metodo si trova in D.H. FOWLER, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford 1987: 31-105, 294-371.

[11] Cfr. S. MARACCHIA, *Aristotele e l'incommensurabilità*; in: Arch. Hist. Ex. Sc., 1980: 201-28.

Il suo alfabeto consiste di tre *lettere*: 1, 2 e 0. Mediante combinazione delle lettere si formano *parole ternarie*.

Il numero n+1 delle lettere definisce il *rango*-n della parola. Le lettere sono parole di rango-0.

Aggiungendo la lettera 0 alla fine di una parola di rango-n si ottiene una parola di rango-(n+1), che sta in relazione di *sinonimia* con la precedente parola di rango-n. Ogni parola è il suo sinonimo di rango-0.

Lettere e parole sono ordinate secondo la numerazione ternaria.

La coppia [0, 1] è una *espressione* della lingua e si chiama *sottounità* ternaria di rango-0.

La regola sintattica per la onomaturgia delle parole che esprimono il predicato *fra* è ricorsiva: « *fra* 0 e 1 non vi è alcuna parola di rango-0 ». Però « *fra* 00 e 10 – suoi sinonimi di rango-1 – si trovano le due parole intermedie di rango-1, 01 e 02 ».

La *sottounità* [0, 1], di rango-0, è sinonima di [00, 10], *unità* ternaria di rango-1; [00, 10] è perciò implicitamente una *quaterna* di rango-1:

[00, 01, 02, 10]

una *espressione* della lingua ternaria.

L'*unità* ternaria di rango-1 consiste di tre *sottounità* ternarie di rango-1: [01, 02] è la sottounità *media*, e [00, 01] e [02, 10] sono le sottounità *estreme* di rango-1.

La sottounità media è definita in ogni unità da due parole ternarie, che terminano con 1 e con 2.

L'espressione: W = [X, H, Y], dell'*intero dicotomico* può venire tradotta con l'espressione *terna* di una unità ternaria. W(1) è:

$$[00, 01, 10] = \langle R, \Delta \rangle \text{ oppure}$$
$$[00, 02, 10] = \langle \Delta, R \rangle.$$

La parola H(1) viene tradotta nella lingua ternaria mediante 01 nella prima terna, e mediante 02 nella seconda.

L'espressione ternaria: « *sottounità estrema* di una *uni-*

tà di rango-n », traduce l'espressione R(n); la proposizione « il *semiintero* (di una *unità*), il quale consiste di *due* sottounità », traduce l'espressione Δ(n).

Ogni *terna* implica l'esistenza di una quaterna, vale a dire di una *unità* intera, completa. Per questo motivo ogni terna implica la terna a lei complementare: [00, 01, 10] $\rightarrow$ [00, 02, 10], e viceversa. La parola interna 01 oppure 02, *esplicita* nella *premessa*, traduce il segno H della *dicotomia*, e la parola interna, *tacitamente* implicata, che viene *esplicitata* nella *conseguenza*, traduce il segno M della *mesotomia*.

La regola sintattica, « ogni terna implica una quaterna », traduce l'assioma generale della divisibilità *debole*: « *fra* due segni sonori di una terna si trova sempre un quarto segno muto ».

La regola di ricorsività della *dicotomia*: « ogni R(n) è W(n+1) », viene tradotta dalla seguente espressione sintattica della lingua ternaria: « ogni sottounità estrema di rango-n è una unità di rango-(n+1) », e « solo le sottounità estreme di rango-n sono sostituibili mediante unità ternarie di rango-(n+1) ».

La sottounità media non dispone nella lingua ternaria di alcuna unità sinonima di rango-(n+1): essa è il *excluded middle* della lingua ternaria.

Se esiste un *telos*, esso può essere contenuto solo in una delle sottounità estreme.

L'orientazione della terna può venire dedotta dalla *desinenza grammaticale* della parola intermedia la quale traduce H(n): se la sua lettera finale è 2, la terna W è orientata da sinistra verso destra; se la lettera finale è 1, la unità W è orientata da destra verso sinistra. Al posto di 1 e 2 potremmo dire, ad es., anche *maschile* e *femminile*. Il terzo caso, 0, rappresenta il *neutro*.

La lingua ternaria permette lo svolgimento dell'argomento con completa generalità e purezza concettuale, senza che ci si debba preoccupare del comportamento della traiettoria, senza ricorrere a termini del linguaggio cinetico, senza la rappresentazione intuitiva di un movimento.

La disgiunzione logica:

$$W = <\Delta, R> \textit{ vel } <R, \Delta>,$$

contiene la *coercizione* di scegliere *almeno* una delle due orientazioni. Però, sia esso *uomo oppure dio* (phys. 262a3), è impossibile che un mobile si muova simultaneamente secondo due orientazioni opposte. Tuttavia questa limitazione non è né implicita, né presupposta, dall'argomento; è richiesto soltanto il terzo *escluso*, la disgiunzione logica: $<\Delta, R>$ *vel* $<R, \Delta>$.

Però se il mobile è *quello che sta pensando se stesso* nell'ipostasi di *quello che si sta muovendo*, allora niente si oppone a che si scelgano simultaneamente entrambe le orientazioni $<\Delta, R>$ e $<R, \Delta>$. Si pongono entrambe le sottounità estreme di rango-n come effettive unità ternarie di rango-(n+1) – allo stesso modo con cui viene posta la verità della geometria euclidea e della geometria non euclidea, la effettiva realtà simultanea dei loro universi. Come *testo* l'argomento è *assolutamente* vero e *unico*, sempre lo stesso, valido nello stesso tempo per *tutti* i modelli.

Viceversa: lo svolgimento dell'argomento conduce necessariamente ad una lingua ternaria.

Se quello che si sta muovendo è *il piú veloce*, il *pensiero* che numera (de lin. insec. 968a25-b3), allora esso può pensare il suo *theorema* eleatico solo nei termini della lingua madre di Zenone: nel dialetto sud-italico, *non ovunque denso* ma soltanto *denso in sé*, di una lingua ternaria.

Il divieto dicotomico che riguarda la sottounità *excluded middle* distingue l'idioma eleatico dalla lingua principale ternaria, ovunque densa, la quale non è soggetta a questa limitazione sintattica.

Le parole interne delle sottounità medie appartengono al lessico della lingua ternaria principale, però *non* sono *pronunciabili* (ἄρρητον) per il *native speaker* del dialetto eleatico. Ogni sottounità media, ad es.: [01, 02], è tuttavia una *espressione* della lingua di Zenone che può venire intesa nel seguente modo: *fra* due parole interne con desinenza 1 e 2 di una unità *zenoniana* giace il tacere, l'ineffabile, il niente: salti, discontiniutà nel dominio ontico della lingua di Zenone, nell'universo di tutte le *dicotomie.*

Ogni parola della lingua di Zenone è anche un *telos* di un determinato modello della *dicotomia.* Però la premessa della *dicotomia* definisce e postula l'esistenza di un *telos* per *tutti* i possibili modelli, indipendentemente dal fatto che il nome proprio del suo luogo sia registrato nel vocabolario di qualche lingua, oppure no. Ogni intero contiene un semiintero che può venire tolto via, e ciò che rimane è ancora un intero.

Tuttavia *la statua di Hermes,* T, non è contenuta *in potenza* nella successione dei cubi di marmo contenuti l'uno nell'altro, nel modo in cui credeva Aristotele (phys. 190b7-8, met. 1002a21-23, 1017b5-9); è però contenuta se e soltanto se in precedenza è stata postulata come un *telos* in un *assioma* da parte di Policlete, o Cantor-Dedekind.

Ciò significa tuttavia che il dominio ontico di tutti i possibili modelli concreti della *dicotomia* consiste di tutte le possibili successioni di metà dicotomiche, le quali sono ogni volta chiuse mediante un *telos* verso il quale convergono. Siamo in presenza di un insieme *perfetto,* τέλειος, al quale spetta il predicato della completezza e della chiusura, τελειότης (cfr. τελειότης μεγέθος, Arist., phys. 261a36, 226a31, 207a14-15; anche Plat., Parm. 157E: ἓν ὅλον τέλειον).

Il testo lineare dell'argomento di Zenone, sviluppato esplicitamente, è completo, perfetto, chiuso – anche infinitamente divisibile. Tuttavia dispone solo della proprietà della divisione *debole*: nel testo, tra due parole di una *terna* di parole sonore, giace sempre una *quarta* parola muta ma esprimibile – o nel suo semiintero destro, o in quello sinistro – però *non sempre* tra *due* date parole sonore del testo giace una *terza* parola muta: fra 01 e 02 giace un vuoto, privo di parola.

L'universo zenoniano del dominio dicotomico è sí *perfetto,* tuttavia è ovunque discreto, ovunque interrotto da salti. Fra *due* salti qualunque giace ancora almeno un salto, pertanto anche un insieme ovunque denso di salti.

Il dominio dell'argomento di Zenone non è συνεχής, un connesso, e neppure un continuo privo di lacune.

La potenza dell'insieme perfetto, la metagalassia di tutte le possibili *dicotomie*, non è numerabile. Se viene accettata come vera la cosiddetta *ipotesi del continuo* di Cantor, allora la potenza del dominio dicotomico, Aleph-uno, è identica alla potenza del continuo di tutti i numeri reali. Tuttavia questo insieme – il dominio ontico e linguistico della *dicotomia* – non è alcun continuo, bensí un insieme perfetto, ovunque discreto, il *discontinuo di Cantor* (*fig. 5*).

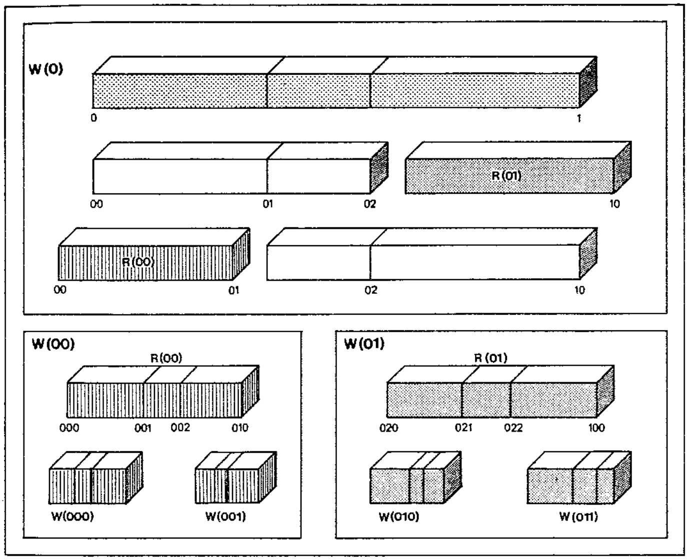

Fig. 5 - Discontinuo di Cantor.

Un discontinuo di Cantor è il dominio dei segni necessario e sufficiente per lo svolgimento di *tutte* le dicotomie.

Non ha importanza che queste dicotomie vengano svolte una alla volta, una dopo l'altra, come modelli didattici concreti, oppure tutte simultaneamente. L'argomento si basa sempre su di un unico testo, il quale consiste soltanto degli astratti simboli del *telos* T, della *metà* H(n), e delle espressioni derivate dal termine *fra* – senza alcuna ulteriore indicazione concreta.

Se il dominio è un continuo privo di lacune, perfetto – la qual cosa è sufficiente, ma non necessaria – allora anche il movimento che ha luogo in corrispondenza è un movimento senz'altro continuo. Però se il dominio non è privo di lacune, non è perfetto, e tuttavia è un aristotelico συνεχής – allora è possibile un movimento liscio che non consiste di una successione di singoli salti discontinui. A dire il vero qui non possono aver luogo *tutte* le possibili dicotomie aventi un *telos* assicurato.

Se però l'universo di tutti i possibili modelli – il dominio naturale della *dicotomia* – è il discontinuo di Cantor, allora anche il movimento – nel caso in cui abbia luogo un movimento – può svolgersi soltanto mediante una successione infinita di salti discontinui.

Parte seconda

Il cosiddetto Achille

What relation existed between their ages?
J. Joyce, *Ulysses*, 1986: 555-56

Il testo del *cosiddetto Achille* consta delle tre seguenti proposizoni:

(1) nella corsa il piú lento non può mai venir raggiunto dal piú veloce; poiché

(2) l'inseguitore deve prima necessariamente giungere nel punto da cui il fuggitivo è già partito, e

(3) in questo modo il piú lento mantiene costantemente un certo vantaggio (Arist. phys. 239b15-18).

Il testo ricorda l'*inseguimento di Ettore* nell'*Iliade* xxii 131-360.

Scopo dell'esercitazione letteraria di Omero è il raggiungimento dell'inseguito per ucciderlo. Però l'inseguimento soggiace alla magia di una perfida dea. Pallade Atena accorda ad Ettore il suo aiuto: non è possibile che Achille, A, lo raggiunga, ma è del pari impossibile che Ettore, H, si liberi da Achille. Un sogno cattivo ("Ὡς δ'ἐν ὀνείρωι; xxii 199-201) e premonitore, un incubo, sognato da un poeta cieco nel suo sogno. Un giudizio del padre degli dei decide ciò che è indeciso. Ettore, tradito, si desta alla realtà del sogno omerico in cui è immerso. Achille lo raggiunge e lo uccide (xxii 168-366).

L'*inseguimento di Ettore* (Id. xxii 199-201), Ἕκτορος δίωξις è stato presentato da Aristotele nella sua *Poetica* (1460a13-b26) come un esempio del meraviglioso, dell'assurdo (θαυμαστόν, ἄλογον, 1460a12-13) – ma anche della menzogna poetica, che possiede valore artistico e che pertanto è anche *vera*: *mentir le vrai*. Nota bene: la *licentia poetica* è prerogativa del buon poeta; in un cattivo poeta diventa intollerabile (1460a36-b1).

Simplicio si è assunto la responsabilità di sostituire ad Ettore la *tartaruga*. La tragedia metafisica di Achille è divenuta una *tragicomedia* [1], dando origine ad uno degli episodi *kitsch* che hanno avuto maggior successo nella letteratura filosofica.

Anche Zenone si lascia ispirare da una *déesse raison* – la sua. Per la dea eleatica del *logos* la verità del *pensare* è coestensiva con la realtà dell'essere. Le parole che Amleto, parimenti ispirato dal parmenideo ἔστιν ἢ οὐκ ἔστιν (Parm. Frg. 8.16), dice ad Ofelia (iii 264) sul suo *dream of passion* – il brano teatrale da lui recitato nell'*Amleto* di Shakesepare – queste stesse parole potrebbero esprimere anche la filosofia di Zenone. Verità e realtà spettano certamente al dramma nel dramma, *L'assassinio di Gonzago* – al sogno nel sogno, all'*Inseguimento di Ettore*: « The story is extant and writ' in choice Italian ».

La diade inseguitore-inseguito

La prima proposizione del citato testo di Aristotele contiene il *Teorema* di Zenone – la conclusione dell'argomento.

Il *telos* dell'argomento, è di stabilire il teorema – proposizione (1) – per mezzo di una *dimostrazione*. Le proposizioni (2) e (3) forniscono congiuntamente la premessa dell'argomento, la quale è *necessaria*, ma *non sufficiente*, per la dimostrazione del teorema.

Diversamente dalla lingua parlata, A e H sono rappresentati con il genere *neutro* dei corrispondenti sostantivi sia nell'*Achille* di Zenone, sia nel *Parmenide* di Platone: *ciò che è* piú lento, l'inseguito – τὸ βραδύτερον, τὸ φεῦγον; *ciò che è* piú veloce, l'inseguitore – τὸ τάχιστον, τὸ διῶκον; *ciò che è* piú vecchio, τὸ πρεσβύτερον, e *ciò che è* piú

[1] Τραγῳδίᾳ - κωμῳδίᾳ; *op. cit.*: 1014-15.

giovane, τὸ νεώτερον. È evidente che in entrambe le interpretazioni si tratta soltanto degli astratti predicati A e H, dell'*esser piú vecchio* e dell'*esser piú giovane*, o dell'*esser inseguitore* e dell'*esser inseguito*, e non delle persone che sono piú vecchie o piú giovani, inseguitrici o inseguite.

Nella proposizione (2) viene dapprima definita l'esistenza della proprietà Z, *inseguimento*, δίωξις, per mezzo di una coppia non ordinata di due elementi, o *diade* (σύνδυο; Parm. 143D):

$$Z = \{A, H\}$$

che sono i predicati esplicitamente introdotti, ossia i *segni* A e H.

Le lettere A e H possono venir lette come *Achille* ed *Ettore* (come nell'*Iliade* e in Simplicio, in phys. 1014), ed anche come *inseguitore* e *fuggitivo*, *il piú veloce* ed *il piú lento* – dove soltanto gli ultimi due termini posseggono una connotazione *metrica* determinata: misura del tratto spaziale percorso.

Però anche altre *interpretazioni*, del pari metriche, sono consistenti con l'argomento: A può venire intesa anche come l'età del piú giovane, e H del piú vecchio – misura del segmento temporale percorso, come nel *Parmenide* di Platone; oppure anche A come l'età di Stephen Dedalus e H come l'età di Leopold Bloom nell'*Odissea* irlandese di James Joyce. Nell'interpretazione standard l'inseguimento avviene lungo una traiettoria spaziale. $A(\nu)$ e $H(\nu)$ designano di volta in volta il τόπος, il luogo spaziale dove A e H si trovano sulla loro traiettoria, nello stesso ora, ν, nella relazione dell'inseguimento zenoniano, o *dioxis* $\zeta(\nu)$. $\zeta(\nu) = \langle A, H \rangle$ è una coppia ordinata. $A(\nu)$ e $H(\nu)$ sono grandezze: segmenti spaziali.

La relazione di consecuzione

Il passaggio da ν ad un futuro ora ν' viene stabilito assiomaticamente mediante la proposizione (2) della premessa: l'inseguitore A occupa in ν' lo stesso posto occupato dall'inseguito H nell'*ora* ν.

Da ciò segue:

primo - tra il luogo $A(\nu)$ ed il luogo $H(\nu)$ non si trova nessun terzo luogo che A debba toccare prima di raggiungere in ν' il luogo dove si trovava H in ν. Lo stesso vale per H.

Nell'argomento non viene dato alcun *telos*: H non si trova tra A ed un preesistente *telos* T. La relazione ternaria *tra* non gioca alcun ruolo nell'*Achille.*

Ciò significa:

secondo - che i luoghi $A(\nu)$ e $H(\nu)$ sono collegati da una relazione binaria di *consecuzione* immediata (ἐφεξῆς, Parm. 149A; phys. 226b34; terminus technicus del linguaggio matematico greco). $H(\nu)$ dispone di un vantaggio spaziale $\Delta(\nu)$, e la *consecuzione* può venire espressa in simboli come:

$$H(\nu) = A(\nu)\&\Delta(\nu).$$

Il termine primitivo della lingua dell'*Achille* è il predicato binario *consecuzione*:

$$K = \{\text{Pred., Succ.}\}.$$

Terzo: l'inseguimento è *connesso* in τ. Proseguendo il movimento da $\zeta(\nu)$ a $\zeta(\nu')$, A e H si trovano nel medesimo luogo spaziale τ, in due distinti punti-ora. $A(\tau)$ e $H(\tau)$ denotano, nel caso di una interpretazione metrica, valori nell'insieme delle grandezze temporali, che vengono assunti da H in ν, e da A in ν', nel futuro, nello stesso luogo spaziale τ.

La simultaneità di $A(\tau)$ e di $H(\tau)$ è locale, riferita a τ, cosí come quella di $A(\nu)$ e $H(\nu)$ è temporale, riferita a ν.

La relazione temporale dell'inseguimento verrà denotata con $\zeta^*(\tau)$. Le sue componenti $A(\tau)$ e $H(\tau)$ sono del pari in una relazione di consecuzione immediata.

ζ^* gioca il ruolo determinante della *mediazione* tra due passi consecutivi, ν e ν', di ζ e garantisce la connessione dell'inseguimento spaziale $\zeta(\nu)$. La diade $\zeta^*(\tau)$ è associata al vantaggio temporale $\Delta^*(\tau)$ di $H(\tau)$ – un vantaggio negativo.

Chiaramente ζ e ζ^* sono ambedue simplessi unidimensionali: nessun luogo è compreso tra i suoi estremi.

Perciò:

quarto: contrariamente alla *dicotomia* l'esecuzione del movimento tra gli estremi di ζ e ζ^* viene postulata come *consecuzione* discreta.

Movimento e numerazione

La proposizione (3) è un'affermazione assiomatica, che sostiene la ricorsività del vantaggio. Ha cosí luogo una numerazione dei vantaggi, ed implicitamente delle coppie ordinate inseguitore-inseguito, dei singoli passi dell'inseguimento.

Se c'è una partenza, un passo-ζ, i passi successivi:

$$\zeta(\nu),\ \zeta(\nu'), \ldots$$

vengono numerati con una ω-successione di segni; ad es. le cifre:

$$N = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n,\ \text{succ. } n, \ldots$$

L'esistenza di una partenza è consistente con l'argomento, ma non deriva da questo. Altrettanto consistente con l'argomento è un insieme di parametri senza inizio e senza fine, secondo il tipo $^*\omega+\omega$ dei numeri interi, negativi e positivi.

Cosí come la consecuzione da $\zeta(\nu)$ a $\zeta(\nu')$ viene mediata da una diade $\zeta^*(\tau)$, allo stesso modo anche la consecuzione da $\zeta^*(\tau)$ a $\zeta^*(\tau')$ viene mediata da una diade $\zeta(\nu)$. In questo modo sorgono assieme due successioni:

$$\zeta\nu),\ \zeta(\nu'), \ldots, \text{ e } \zeta^*(\tau),\ \zeta^*(\tau'), \ldots,$$

le quali consistono sempre delle due stesse componenti, A e H.

Dalla proposizione (2) discende tuttavia anche la: *quin-*

ta conseguenza – *decisiva*: se $A(\nu)$ e $H(\nu)$ si trovano nella diade $\zeta(\nu)$ in una determinata relazione di consecuzione, allora $A(\tau)$ e $H(\tau)$, le componenti della diade $\zeta^*(\tau)$, si trovano necessariamente in una relazione di consecuzione *inversa*.

Nel caso della interpretazione standard questa consecuzione inversa si mostra come una trivialità. Se $A(\nu)$ e $H(\nu)$ denotano la *distanza* spaziale da una origine convenzionale – il luogo di partenza $\tau = 0$ di $A(0)$ – allora $H(\nu)$ si trova sempre *davanti* ed è il *successore* immediato di $A(\nu)$. Invece $A(\tau)$ e $H(\tau)$ rappresentano sempre elementi nell'insieme del tempo. Nella diade $\zeta^*(\tau)$ la grandezza temporale $A(\tau)$ si trova sempre nel futuro, $A(\tau)$ è l'immediato successore di $H(\tau)$ – $H(\tau)$ si trova nel passato.

Rappresentazione dell'inseguimento in un piano numerico

L'interpretazione standard dell'inseguimento può venir rappresentata in un piano numerico del prodotto cartesiano $\nu \times \tau$. Su di un asse ν, vengono disposti i parametri:

$$N = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n,\ \text{succ. } n, \ldots$$

Ad ognuno di questi viene associata la coppia $\zeta(\nu)$. Su un altro asse, τ, sono disposti i luoghi, dove si trovano $A(\nu)$ in τ e $H(\nu)$ in τ'.

Anche la successione dei luoghi τ può venire numerata con un esemplare dei numeri ordinali:

$$N = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n,\ \text{succ. } n, \ldots$$

I simboli:

$$A(n, n) \text{ e } H(n, \text{succ. } n)$$

rappresentano le posizioni di A e H nel punto-ora $\nu = n$. Il loro insieme rappresenta le linee cosmiche di $A(\nu)$ e di $H(\nu)$ nel piano $\nu \times \tau$. $\zeta(\nu)$ è rappresentato di volta in volta dalla coppia ordinata:

$$\zeta(\nu) = \langle A(\nu, \tau), H(\nu, \tau')\rangle,$$

oppure:

$$\zeta(n) = \langle A(n, n), H(n, \text{succ. } n)\rangle.$$

I parametri $\tau = n$, rispettivamente $\tau' = \text{succ. } n$, sono i nomi propri associati ai luoghi spaziali di A e H; sono le proiezioni delle posizioni di $A(\nu, \tau)$, e $H(\nu, \tau')$ sull'asse τ – i luoghi della loro traiettoria comune:

$$[\tau, \tau'] = [0, 1], [1, 2], \ldots, [n, \text{succ. } n], [n', \text{succ. } n'], \ldots$$

delle coppie ordinate $\langle A, H\rangle$.

La traiettoria è una catena connessa di vantaggi simpliciali $\Delta(\nu)$:

$$\&(\Delta) = \Delta(0)\&\Delta(1)\&\Delta(2)\& \ldots \&\Delta(n)\&\Delta(\text{succ. } n)\&\ldots$$

Numerazione e numerazione inversa

Nell'interpretazione standard la proiezione delle coppie ordinate:

$$\zeta^*(\tau) = \langle A(\tau, \nu'), H(\tau, \nu)\rangle$$

oppure $\langle A, H\rangle$ – sull'asse ν consiste della successione delle coppie ordinate:

$$[\nu', \nu] = [1, 0], [2, 1], \ldots, [n, \text{pred. } n], [\text{succ. } n, n], \ldots,$$

dei vantaggi, i simplessi diacronici $\Delta^*(\tau)$. La successione *non è connessa*, non può nemmeno costituire una traiettoria. $\zeta^*(\tau)$ non soddisfa alla prop. 2 dell'argomento, quindi non può nemmeno rappresentare la diade di un inseguimento.

Niente di piú naturale dell'interpretazione standard.

Ma anche niente di piú artificioso, arbitrario e superfluo dell'interpretazione delle cifre dello spazio numerico ristretta a termini crononimi e toponimi.

Però – se si eccettua la fedeltà alla tradizione aristotelica – niente impedisce di connettere i vantaggi $\Delta^*(\tau)$.

La connessione si ottiene agevolmente mediante un ribaltamento dell'ordinamento della successione delle coppie $\Delta^*(\tau)$ in:

$$[\nu', \nu] = \ldots, [\text{succ. n}, \text{n}], [\text{n}, \text{pred. n}], \ldots, [2, 1], [1, 0],$$

come risultato dell'inversione delle coppie ordinate $<A, H>$ in $<H, A>$.

Quindi la traiettoria diviene una catena connessa di vantaggi consecutivi $\Delta^*(\tau)$:

$$\&(\Delta^*) = \ldots \&\Delta^*(\text{n})\&\Delta^*(\text{pred. n})\& \ldots \&\Delta^*(1)\&\Delta^*(0).$$

La consecuzione è retrogressiva, ma soddisfa alla prop. 2 della premessa.

La diade $\zeta^*(\tau)$ rappresenta un inseguimento zenoniano che ha luogo nel *medium* ν, – dominio ontico dei segni digitali – la sua traiettoria, nel piano del suo prodotto cartesiano inverso, $\tau \times \nu$.

La successione dei luoghi ν della traiettoria comune può venire contata soltanto con l'aiuto della $^*\omega$-successione all'indietro, in *count-down*, delle cifre:

$$N^* = \ldots, \text{pred. n}^*, \text{n}^*, \ldots, 2^*, 1^*, 0^*,$$

secondo la relazione binaria di una consecuzione inversa in cui ad ogni numero n^* viene associato l'immediato *predecessore* $(n+1)^* = \text{pred. n}^*$, e la freccia dell'ordinamento è dotata della funzione di generare un immediato *predecessore*, 1^*, a partire da un ultimo *successore* 0^*, che non è un predecessore, bensí la *arche* di tutti i *predecessori*. 1^* a sua volta diviene un *successore* di un *predecessore* 2^* a lui associato dalla stessa funzione.

La funzione della freccia:

$$\text{Pred.} : N^* \rightarrow N,$$

è l'inversa della numerazione naturale,

$$\text{Succ.} : N \rightarrow N.$$

Invece di Pred. si può anche scrivere Succ.* – successione inversa.

Nel caso dell'interpretazione diacronica di ν la traiettoria comune è un tempo inverso, dove $A(\tau)$ è nel futuro, $H(\tau)$ è nel pasasto, in ν, ma – come richiede ogni inseguimento – $A(\tau) = \nu'$ è minore di $\nu = H(\tau)$: il suo *medium* ontico, il tempo, è negativo.

Se i singoli passi:

$$\zeta^*(\tau),\ \zeta^*(\tau'), \ldots$$

vengono numerati secondo la ω-successione

$$N = 0, 1, 2, \ldots, n, \text{succ. } n, \ldots,$$

e la successione dei luoghi sulla traiettoria ν secondo il tipo $^*\omega$:

$$N^* = \ldots, \text{pred. } n^*, n^*, \ldots, 2^*, 1^*, 0^*,$$

allora il piano di rappresentazione $\tau \times \nu$ consiste del prodotto cartesiano $N \times N^*$.

Nella coppia ζ^* è invertito l'ordinamento delle componenti con riferimento a ζ: se $\zeta = \langle A, H \rangle$, vale a dire ζ: $n \rightarrow \text{succ. } n$, allora è: $\zeta^* = \langle H, A \rangle$, ovvero:

$$\zeta^*: n^* \rightarrow \text{pred. } n^*.$$

La funzione della freccia ζ è Succ.: generare da un predecessore A il suo successore H. La funzione di ζ^* è Pred.: generare da un successore H il suo predecessore A. La freccia ζ^* è dotata della funzione inversa di una generazione negativa.

$\zeta^* = \langle H, A \rangle$ rappresenta l'inseguimento inverso. Ogni relazione $\zeta^*(n)$ consiste della coppia:

$$\zeta^* = \langle H(n, n^*), A(n, \text{pred. } n^*) \rangle.$$

Nell'inseguimento ζ la freccia associa alla linea cosmica A dell'inseguitore A, come dominio, la linea cosmica H dell'inseguito come codominio, secondo la rappresentazione:

$$\zeta: A \rightarrow H.$$

Viceversa, nell'inseguimento inverso, ζ^*, la freccia associa alla linea cosmica dell'inseguitore inverso, H, come dominio, la linea cosmica A, dell'inseguito negativo, come codominio, secondo la rappresentazione (*fig. 6*):

$$\zeta^*: H \rightarrow A.$$

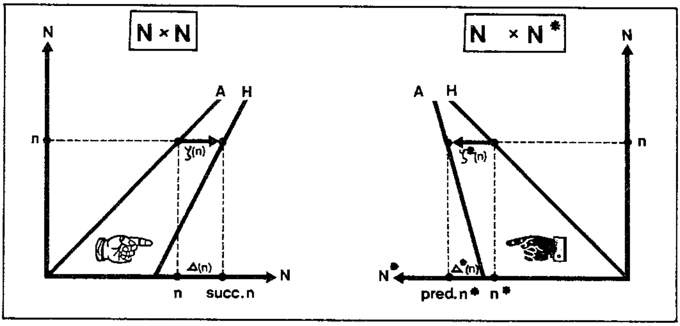

Fig. 6 - Inseguimento ζ: A $\rightarrow$ H, e inseguimento duale ζ^*: H $\rightarrow$ A.

L'inseguimento assoluto come endomorfismo

Questo fatto permette di caratterizzare l'inseguimento in sé, in maniera completa ed univoca, soltanto con l'aiuto dell'ordinamento delle componenti: l'associazione di una traiettoria, τ o ν, di una rappresentazione nel piano, è superflua.

L'universo dell'inseguimento consiste dell'insieme $\zeta(n)$ o $\zeta^*(n)$, con:

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

L'inseguimento è in entrambi i casi una relazione tra A e H, elementi della coppia non ordinata:

$$Z = \{A, H\},$$

dell'inseguimento *assoluto* ed indeciso.

L'inseguimento viene determinato come ζ, mediante la *decisione* che A è dominio e H è codominio. Reciprocamente ζ^* viene determinato mediante una decisione che designa H come dominio e A come codominio dell'inseguimento.

Ognuno dei due dominii ontici, o inseguimenti, può pertanto venire completamente caratterizzato in sé soltanto con l'ordinamento della coppia: $Z = \{A, H\}$, senza riferimento al suo opposto: $<A, H>$ è equivalente a ζ, $<H, A>$ è equivalente a ζ^*.

È tuttavia decisivo il fatto che l'essenza originaria – o proprietà determinata – dei predicati A e H rimane invariante nell'inversione: in entrambi gli inseguimenti A rimane in senso *assoluto* Achille, inseguitore, predecessore, figlio, piú giovane – ed H rimane Ettore, inseguito, successore, padre, piú vecchio – viene invertita soltanto la funzione della freccia.

Per questo motivo viene invertito soltanto il segno algebrico dell'*essenza assoluta* di cui sono dotati A e H: in ζ^*, A è sí un inseguito, ma in un inseguimento inverso – o un successore negativo, un padre parafisico che in un atto di generazione enantiomorfa viene generato dal suo figlio negativo. Il generatore, il figlio inverso H è venuto al mondo – con riferimento al piú giovane A, al padre negativo – nel passato negativo.

Entrambi gli inseguimenti si trovano, nel senso della simultaneità logica, *assieme* nel loro proprio dominio ontico. Entrambi rappresentano in sé un automovimento – la generazione ricorsiva del dominio ontico dell'universo ζ, rispettivamente ζ^*. Entrambi sono trasformazioni interne, immanenti – ogni volta un *endomorfismo* che trasforma ζ e ζ^* nello stato immediatamente consecutivo del rispettivo dominio ontico: ζ in ζ – traslazione acronica in sé dello spazio – e ζ^* in ζ^* – scorrere aspaziale del tempo.

Il movimento immanente di entrambi gli universi, $\zeta(n)$ e $\zeta^*(n)$, è inversamente orientato soltanto nel riferimento reciproco (Parm. 155A).

Questo fatto non ha però importanza, poiché l'orientazione opposta del suo automovimento potrebbe venir fissata soltanto nel metacosmo di un eventuale spazio comune di immersione; e soltanto da un soggetto trascendente, che considera simultaneamente entrambi gli universi dal di fuori e li compara l'un l'altro come complete totalità dell'essere. Per la struttura immanente dei dominii ontici enantiomorfi, dell'inseguimento,

$$\zeta: A \rightarrow H$$

e

$$\zeta^*: H \rightarrow A,$$

non ha importanza che l'universo sia orientato come intero da sinistra a destra, dal passato verso il futuro – o viceversa: da destra a sinistra, dal futuro verso il passato.

Dualità

Tra le due terne

$$\zeta: A \rightarrow H$$

e

$$\zeta^*: H \rightarrow A$$

sussiste una relazione di ordinamento che è invertibile. Al dominio di ζ corrisponde il codominio di ζ^*, e viceversa. Alla freccia ζ dell'una terna corrisponde la freccia ζ^*, inversamente orientata, dell'altra.

Questa relazione reciproca ed invertibile tra le due coppie della *dioxis* è una *dualità.*

In questo senso anche la proposizione assiomatica (2) dell'argomento va interpretata come uno scambio di ruoli di A e H, che di volta in volta dà luogo alla diade duale. Se A, l'inseguitore, ed H, l'inseguito, si trovano *assieme* nella diade ζ, A dietro e H davanti, allora nella diade ζ^* dell'inseguimento inverso A assume il posto davanti, di H. Pertanto, in ζ^*, A diventa l'inseguitore inseguito e H l'inseguito inseguitore: un *metaschematismos*, ma non nel senso di Aristotele (190b5-6, 305z29-30), bensí nel modo in cui presso Platone – μεταβαλεῖν τὸ σχῆμα – Alcibiade diventa Socrate e Socrate diventa Alcibiade [2] (Alcib. I 135D).

[2] « *Phèdre*: Qu'est donc que tu veux peindre sur le néant? –

Tuttavia i due inseguimenti sono identici a meno di una dualità. Un Uno, come se stesso, ed il suo Altro, immagine speculare di se stesso; lo stesso mondo in due esemplari enantiomorfi, il mondo ed il mondo inverso, che stanno nella relazione di dualità.

Le terne:

$$\langle A, \rightarrow, H \rangle$$

e

$$\langle H, \rightarrow, A \rangle,$$

duali l'una dell'altra, ζ e ζ^*, rappresentano due mondi opposti simmetricamente. L'idioma dell'uno può venire completamente tradotto in quello dell'altro. I contenuti dei testi sono identici a meno di una dualità. La medesima *Sacra scrittura* viene letta da sinistra a destra in ζ, la *Septuaginta*, e da destra verso sinistra in ζ^*, la *Torah*. Il film che rappresenta l'essere che si sta muovendo in sé, viene proiettato con lo svolgimento contrario: sullo schermo appare l'essere in sé negativo – in cui *il tempo* fluisce all'indietro, dove il futuro negativo genera il passato negativo, ogni numero genera il suo predecessore, il piú vecchio diventa sempre piú giovane, il figlio genera il padre; si discende dalla polvere della tomba fino all'ora della nascita, della morte negativa, della resurrezione, e si ritorna nuovamente nella polvere nell'ora della morte, della nascita negativa. Questo processo viene descritto in modo esauriente nel *Politico* (269A-272D) di Platone dallo Straniero di Elea (cfr. anche Phæd. 71D-72, Tim. 39A, Charm. 168C).

L'esistenza simultanea di ζ e ζ^*, inseguimento ed inseguimento duale, sta nella premessa dell'argomento – e può venire stabilita solo assiomaticamente: la categoria assoluta ed indecisa della *dioxis* di Zenone è sempre presente in due ipostasi duali.

Socrate: L'Anti-Socrate. – *Phèdre*: Bon. L'Anti-Phèdre l'écoute ». (PAUL VALÉRY, *Œuvres*, Paris 1962: II 142).

Aristotele (phys. 263a23-b14; 220a11-20) richiama l'attenzione sul fatto che, conformemente alla proposizione (2) dell'argomento, ogni luogo spaziale τ del dominio della *dioxis*, dovrebbe venir contato sempre due volte: come punto di partenza di H e come punto di arrivo di A. Aristotele credeva di aver scoperto in questo modo il tallone d'Achille del *cosiddetto Achille*. Quello che egli aveva scoperto era soltanto la circostanza incontestabile che, conformemente alla proposizione (2), il passaggio ricorsivo da ζ a succ. ζ viene necessariamente mediato dalla diade duale ζ^*. Anche questa volta il giovane Aristotele non è stato in grado di raggiungere il vecchio Zenone.

La categoria dell'inseguimento zenoniano

La *relazione* è stata designata già da Aristotele come una *categoria*, ed interpretata nel senso del Cap. 7 delle sue *Categorie*. Però la *categoria di relazione* che si trova nel *cosiddetto Achille*, con l'inseguitore e l'inseguito, è una categoria non-aristotelica. È invece una *Category* nel senso della teoria di Mac Lane e Eilenberg.

Secondo questa teoria ogni relazione può venire espressa con la terna ordinata <dominio, freccia, codominio>. La trinità della categoria non-aristotelica soggiace al dogma assiomatico – forse con un certo sapore gnosticistico – di un imperativo categoriale, che richiede accanto ad una data categoria l'esistenza della sua categoria *duale*.

A differenza della farsa dell'*inseguimento della tartaruga* è proprio l'*idea delle categorie duali* che ha fatto per la prima volta la comparsa sulla scena nel dramma ontologico *del piú giovane e del piú vecchio* nel *Parmenide*.

Dal punto di vista aristotelico esse, ζ e ζ^*, rappresentano la stessa relazione di inseguimento di H da parte di A. La logica aristotelica delle relazioni è concepita secondo lo schema del giardino zoologico di Eden ed è del tutto inutilizzabile nel « paradiso di Cantor ».

La numerazione come modello del movimento in Aristotele

Aristotele era consapevole del fatto che nell'*Achille* il movimento può essere interpretato come una numerazione ricorsiva (phys. 263a4-11; de lin. insec. 968a25b2, 969a26-33). Questa interpretazione era stata introdotta nella discussione dai seguaci di Zenone.

Essa non è triviale: la rilevanza e la serietà del modello, e la sua equivalenza con il *logos zenoniano*, erano riconosciute da Aristotele.

A testimonianza della sua rettitudine intellettuale egli ha anche concesso che in questo caso non si doveva confutare l'argomento, poiché la sua confutazione richiederebbe l'esistenza di una numerazione e di un numero attualmente infiniti, e questo fatto – e in questo caso implicitamente anche la confutazione dell'argomento – *è impossibile*: su questo punto « siamo tutti d'accordo » (ὁμολογουμένωc; 263a4-11). Era anche noto che, viceversa, la stessa numerazione naturale è un movimento zenoniano, il movimento *del piú veloce* (ταχίστη) *di tutti,* del pensiero che numera (de lin. insec. 968a25-b2: ἀριθμεῖν ἐστίν... τῆc διανοίαc κίνησιc; cfr. anche top. 140b2-4).

Ogni numerazione è la generazione ricorsiva di una relazione binaria di consecuzione, che viene eseguita con una determinazione e decisione della diade indeterminata:

$$K = \{\text{pred.}, \text{succ.}\},$$

del *Numero* assoluto ed unico.

Se la diade è determinata come

$$\zeta\colon <n, \text{succ.}\, n> \; = \; <\text{numero}, \text{successore}>,$$

allora nella diade immediatamente successiva il *successore* stesso, succ. $n = n'$, diventa *numero*, vale a dire assume (conformemente alla Prop. 2 della premessa dell'*Achille*) il luogo del *numero*, n', nella diade $<n', \text{succ.}\, n'>$; 1 (oppure 0) è il piú giovane di tutti i numeri.

Se però la numerazione viene effettuata nel dominio ontico del tempo, allora succ. n è sempre piú giovane di n, e la consecuzione viene decisa come:

$$\zeta: \langle n^*, \text{pred. } n^* \rangle = \langle \text{numero}^*, \text{predecessore} \rangle.$$

Rispetto al numero n pronunciato nella numerazione, tutti i predecessori si muovono conformemente alla funzione Pred., verso il passato – futuro negativo. La data di nascita del numero, – 0 oppure 1 – si allontana, con tutti i numeri contati, sempre piú nel passato, come la data di nascita di Leopold Bloom (*Ulysses*: 555-556) – e diviene sempre piú vecchia. A differenza di numerosi esperti della logica e della filosofia greca, Joyce era stato l'unico ad avere affrontato il *Parmenide* comprendendolo.

L'argomento della numerazione contiene rilevanti conseguenze.

Primo: L'argomento dell'*Achille* è costruito con la relazione binaria di *consecuzione* assoluta e indecisa. Essa richiede sempre due componenti A e H. Lo stesso *Numero* assoluto è presente nelle due ipotesi: come *numero-predecessore*,

$$N = 0, 1, 2, \ldots, n, \text{succ. } n, \ldots;$$

e come *numero-successore*,

$$N^* = \ldots, \text{pred. } n^*, n^*, \ldots, 1^*, 0^*,$$

come lo stesso *Uomo* è in sé schiavo e signore (Plat., Parm. 133D).

L'osservazione un po' irritata di Aristotele, che Zenone avrebbe introdotto il piú veloce, il piú celebre eroe di tragedia (τὸ τάχιστον τετραγῳδημένον; phys. 239b24-25) solo per l'effetto scenico – che un secondo mobile è superfluo – è errata. L'*Achille* richiede sempre una diade $Z = \{A, H\}$.

Secondo: È senz'altro ammesso, tuttavia non è richiesto, disporre di un sistema di riferimento bidimensionale – con coordinate ν e τ. Ma per l'esposizione dell'argomento è sufficiente un universo unidimensionale.

La traiettoria di ζ e ζ^* forma sempre una catena connessa da simplessi unidimensionali. La traiettoria complessiva può venire rappresentata graficamente anche in forma di una *spirale* (ἕλιxος, phys. 228b24; cfr. anche Hom., Il. xxii 165, 208, 251) che si avvolge attorno ad un asse fisso in uno spazio di immersione limitato, ad es. all'interno di un quadrato.

Se ai singoli simplessi, Δ e Δ^* sono assegnate proprietà metriche:

$$\Delta = \text{cost.} + \rho(n),$$

dove:

$$\rho(n) \rightarrow 0 \text{ e } \Delta \rightarrow \text{cost.},$$

o anche si ha:

$$\Delta(n) = [1 : n]$$

e $\Delta \rightarrow 0$ – allora la traiettoria ha una lunghezza infinita, e le traiettorie sono trivialmente *aperte*. La spirale si avvolge attorno a una lacuna.

Se $\Delta \rightarrow 0$, allora, con un consapevole abuso di linguaggio, si può tuttavia sostenere che l'incidenza potrebbe avvenire in questo luogo vuoto perlomeno all'infinito. Se tuttavia ad es.:

$$\Delta = \text{cost.} + \rho(n),$$

allora la spirale infinitamente lunga sarebbe avvolta attorno ad una lacuna quadrata, o attorno ad un quadrato privo di perimetro, e tra A e H sussisterebbe la distanza:

$$\Delta = \text{cost.},$$

anche all'infinito.

Però nel caso dell'esempio classico:

$$\Delta = [1 : 2]^n,$$

la lunghezza complessiva della traiettoria è finita. Tuttavia tutti questi casi sono sia logicamente sia topologicamente equivalenti: ad A(n) e H(n) dell'una corrisponde sempre A(n) e H(n) in tutte le spirali (*fig.* 7).

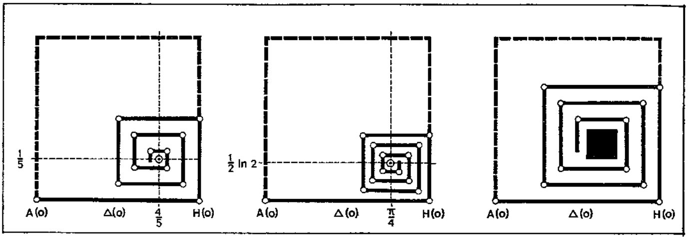

Fig. 7 - *Il cosiddetto Achille*: traiettorie spiraliformi topologicamente equivalenti: (a) $\Delta = [1:2]^n$; (b) $\Delta = [1:n]$; (c) $\Delta = \text{cost.} + \rho(n)$.

Se nei quadrati con:

$$\Delta = [1:n]$$

e

$$\Delta = \text{cost.} + \rho(n)$$

l'argomento non è contraddittorio, e la propr. (1), la conclusione di Zenone, è trivialmente vera, allora l'argomento deve essere non contraddittorio anche nel caso della spirale con il classico:

$$\Delta(n) = [1:2]^n,$$

e il teorema di Zenone, propr. (1), essere ugualmente – ma non trivialmente – vero: alla lacuna puntiforme o quadrata corrisponde una lacuna anche all'interno del classico stadio – il luogo vuoto di coordinate:

$$[{}^4/_5, {}^1/_5].$$

Viceversa, se il caso classico contiene una contraddizione, la spirale è chiusa e il mobile arriva in:

$$[{}^4/_5, {}^1/_5],$$

allora questo si deve verificare anche per le altre spirali, ma ciò è trivialmente impossibile. Tutti e tre i casi sono relativamente consistenti e topologicamente omeomorfi. O tutti i quadrati sono punteggiati, o nessuno.

Terzo: In questo modo si articola la completa indipendenza dell'argomento da interpretazioni metriche consistenti. Non ha importanza che $\Delta(n)$ converga verso zero – o verso una costante – che la successione delle somme parziali ammetta maggiorante o diverga.

Quarto: Lo stesso argomento si manifesta come trivialità o come non-senso, a seconda del modello liberamente scelto per la sua rappresentazione, a seconda dell'idioma scelto per raccontare la favola. Però il modello piú triviale è identico, a meno di un isomorfismo, al piú paradossale; il contenuto dell'argomento si conserva identico, a meno di una traduzione, in tutti gli idiomi.

L'evidente e l'assurdo stanno assieme in una relazione di *consistenza relativa*: assieme e soltanto assieme, come Tristano e Isotta, essi vivono oppure muoiono.

Il cosiddetto Achille e il postulato euclideo delle parallele in Proclo

Però ognuno dei due inseguimenti ζ e ζ^* può venir rappresentato anche in un piano con due assi coordinati che rappresentano due esemplari dello stesso dominio ontico, ad es. uno spazio unidimensionale o un tempo unidimensionale, in ambedue i casi una retta numerica unidimensionale.

La conclusione dell'argomento può venir ora formulata nel seguente modo: in un piano numerico $N \times N$ la retta $A(n, n)$ – la linea cosmica di A – è *non-incidente* con $H(n, \text{succ. } n)$ – la linea cosmica di H.

Questo accade anche se – oltre alle proprietà metriche – al piano della rappresentazione vengono attribuite specifiche proprietà geometriche supplementari, quali ad es. quella di *angolo* di due rette. La conclusione mantiene trivialmente la sua verità non solo se le rette A e H tagliano la stessa retta sotto angoli uguali:

$$\alpha(A) = \alpha(H),$$

ma anche quando A e H tagliano la stessa retta sotto angoli disuguali:

$$\alpha(A) < \alpha(H).$$

Ma la congiunzione: « disuguaglianza degli angoli e non incidenza delle rette A e H » è però in evidente contraddizione con il postulato euclideo delle parallele, E.

Questa connessione era nota agli antichi, e veniva impiegata nelle dispute sul postulato euclideo.

L'argomento è stato tramandato dettagliatamente da Proclo (in elem. 368-371).

Il suo corollario è: l'esistenza di un luogo d'incidenza delle traiettorie di A e H può venir dimostrata se e solo se in una ulteriore proposizione assiomatica viene stabilito *un valore concreto* k^2 di un parametro numerico – la cosiddetta *curvatura* del piano.

L'argomento citato da Proclo contiene una conseguenza nascosta: lo spazio di rappresentazione naturale dell'*Achille* è il piano della geometria assoluta di Bolyai, che esclude un piano di rappresentazione a *curvatura positiva*, $k^2>0$: poiché qui tutte le rette sono incidenti, solo in un simile piano geometrico l'*Achille* si riduce necessariamente alla *dicotomia*.

Se entrambi gli inseguimenti duali sono riferiti ad un comune sistema di riferimento bidimensionale, allora ζ rappresenta una coppia di linee cosmiche $\langle A, H \rangle$ – e l'inseguimento duale ζ^* le linee cosmiche $\langle H, A \rangle$.

Se abbiamo sia $\Delta \to 0$ sia $\Delta^* \to 0$, e la successione delle somme parziali $\Sigma(n)$ *non è limitata*, allora le linee cosmiche di:

$$\zeta: \; A \to H,$$

rispettivamente di:

$$\zeta^*: \; H \to A,$$

possono venire rappresentate solo come parallele asintotiche del piano non euclideo, con *curvatura negativa*:

$$k^2<0.$$

Tra ζ e ζ^* sussiste una simmetria speculare in questo piano diacronico: esse convergono verso il medesimo *Ende* hilbertiano – un punto infinitamente lontano dell'*assoluto*. Questo punto è un *Ende* ω transfinito *terminale* per la coppia asintotica $<A, H>$ e un *Ende* $^*\omega$ transfinito *iniziale* per la coppia duale $<H, A>$.

L'*assoluto* appare ad un soggetto osservatore come una linea chiusa in sé: l'*orizzonte* del suo mondo, le cui proprietà topologiche vengono *definite* e determinate come il suo ὅρος dalla geometria del suo mondo [3] (*fig. 8*).

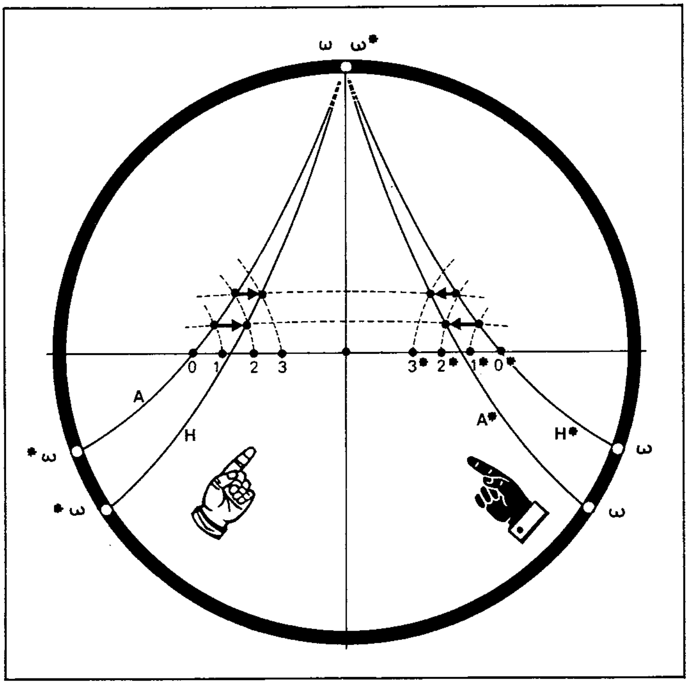

Fig. 8 - *Il piú vecchio e il piú giovane*: inseguimento e inseguimento duale in un mondo piano non-euclideo (modello di Poincaré).

[3] Questo mappamondo è stato pubblicato per la prima volta in ORONTIUS FINÆUS, *Cosmographia*, Parigi 1552: 24, con la *buona speranza* dell'autore che esso possa essere utile ai navigatori.

Il modello diacronico dell'inseguimento zenoniano nel Parmenide di Platone

Il fascino particolare dell'aporia del piú giovane e del piú vecchio nel *Parmenide,* che i grandi filologi di Platone hanno inteso, irritati, come giochi di prestigio di un negromante sofistico, consiste non solo nel fatto che in essa vengono rappresentate le due ipostasi duali ζ e ζ^* in simultaneità logica, ma anche nel fatto che entrambe hanno luogo lungo una traiettoria puramente *temporale* (cfr. Spinoza, cit. *supra*).

Lo spazio di rappresentazione è una varietà diacronica bidimensionale: un *piano di tempi,* la cui sostanza è solo il tempo.

L'avvenimento *nascita del piú giovane* A deve contrassegnare in ζ l'inizio, $\nu = 0$, della numerazione del tempo: ν rappresenta il tempo come il comune *calendario* – l'insieme di tutti gli ora, l'Eternità immobile (Plat., Tim. 37C-38A).

Il luogo di A(o) nel dominio ontico dell'età è $\tau = 0$; il luogo diacronico contemporaneo di H(o), vale a dire la sua età simultanea con riferimento alla data calendaristica, è $\tau = 1$. La relazione $\zeta(\nu)$ tra A e H sorge mediante l'associazione della *misura nulla* ad A(o): entrambi dispongono *contemporaneamente*, nello stesso ora $\nu = 0$ del calendario – di un'età, e queste età sono due grandezze *consecutive.*

Nel dominio ontico dell'età il piú vecchio è l'immediato successore del piú giovane. Le componenti della diade $\zeta = \langle A, H \rangle$ sono A(n, n) e H(n, succ. n), per:

$$\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \text{succ. } n, \ldots,$$

e designano luoghi τ, τ' del tempo come età. La relazione $\zeta(\nu)$ dell'*età contemporanea* corrisponde al *logos*:

$$\lambda(\nu) = [A(\nu) : H(\nu)],$$

che esprime la misura dell'età del piú giovane, A, in riferimento ad H, dove:

$$A(\nu) = H(\nu) - \Delta(\nu).$$

Chiaramente, la differenza d'età è costante:

$$\Delta = \text{succ.}\,\Delta,$$

identico alla *monade assoluta* – al simplesso del tempo come età contemporanea in ν (Plat., Parm. 154C).

La successione $\lambda(\nu)$ è ricorsiva: ad ogni età $\lambda(\nu)$ del piú giovane viene associato un immediato successore succ. $\lambda(\nu)$. La successione $\lambda(\nu)$ è monotona-crescente: il giovane diventa sempre piú vecchio, però non può entrare nella relazione dell'*uguaglianza di età* con il piú vecchio in alcun *ora* del comune calendario.

Questo fatto è contenuto già nella premessa assiomatica (2).

Per realizzare pertanto una relazione della mutua *uguaglianza dell'età* (Plat., Parm. 140E, 152E), il piú giovane deve necessariamente aver raggiunto nel dominio ontico dell'età lo stesso luogo da cui il piú vecchio è già partito. Questo luogo nel tempo è $\tau' = \text{succ. } n$, ovvero il termine $(n+1)$-esimo nella successione τ delle età. Esso è chiaramente là, dove H si trova nel punto-ora alla data $\nu = n$ del calendario, in cui la sua età deve essere uguale a $H(n)$.

Però aver raggiunto il medesimo luogo τ nella successione delle età è equivalente al sussistere di una relazione di *uguaglianza di età* tra A e H. Conformemente alla proposizione (2), realizzare questo fatto non solo è possibile, ma anche assiomaticamente necessario.

Se tra A e H sussiste la relazione dell'*esser coetaneo* (τὴν αὐτὴν ἡλικίαν ἔχειν, Parm. 140E-141D), questa può aver luogo solo per due diversi valori del calendario, ossia date: ν, ν'. Con riferimento alla *stessa età* τ essi sono in una relazione di consecuzione inversa: vale a dire, sono correlati nella diade duale $\zeta^*(\tau)$. I componenti della diade sono $H(n, n^*)$ e $A(n, \text{pred. } n^*)$. Il loro *logos* è:

$$\lambda^*(\tau) = [A(\tau) : H(\tau)].$$

Però, siccome A e H hanno scambiato i loro luoghi, il piú giovane $A(\tau)$ si trova davanti in un luogo:

$$\nu' = \text{pred.}\, n^*,$$

oppure:

$$(n+1)^* < n^*.$$

$H(\tau)$, il piú vecchio, è indietro, in:

$$\nu = n^*.$$

Ma vale sempre:

$$A(\tau) = H(\tau) + \Delta^*(\tau).$$

La successione $\lambda^*(\tau)$ è monotona-decrescente e rappresenta l'età del piú vecchio che diviene sempre piú giovane.

I vantaggi $\Delta(\nu)$ e $\Delta^*(\tau)$ sono orientati in senso opposto: $A(\nu)$ dispone rispetto ad $H(\nu)$ di un *difetto* Δ (positivo); $A(\tau)$ rispetto ad $H(\tau)$ di un *eccesso* (difetto negativo) Δ^*.

Però tanto in ζ quanto in ζ^*, A e H sono grandezze temporali, che nel linguaggio comune vengono espresse con lo specifico termine metrico *età*: il tempo positivo diviene piú vecchio, il tempo negativo piú giovane.

Tanto λ quanto λ^* esprimono la misura della grandezza temporale di A rispetto all'unità di misura H.

Le due grandezze esprimono anche, di volta in volta, la stessa età, l'età di A in un determinato punto-ora – del calendario, ν; oppure della vita, τ: è la stessa età di A, di un Uno, dell'*ora* identico a se stesso del tempo – a meno di una dualità.

In ζ l'età relativa di A diventa sempre piú grande, ossia A diventa sempre piú vecchio. Le singole età di A in ζ – i valori di:

$$\lambda(\nu) < \lambda(\text{succ.}\, \nu),$$

vengono numerati dalla ω-successione:

$$N = 0, 1, 2, \ldots, n, \text{succ.}\, n, \ldots$$

In ζ^* l'*età* relativa λ^* di A diventa sempre piú piccola, ossia A diventa sempre piú giovane. Le età di A in ζ^* – i valori di:

$$\lambda^*(\tau) > \lambda^*(\text{pred. } \tau),$$

vengono numerati dalla $^*\omega$-successione:

$$N^* = \ldots, \text{pred. } n^*, n^*, \ldots, 2^*, 1^*, 0^*.$$

Quello che importa nella relazione *metrica* dei logoi $\lambda(\nu)$ e $\lambda^*(\tau)$ è la medesima proprietà che denota e congiunge reciprocamente le relazioni non-metriche della *dioxis* $\zeta(n)$ e $\zeta^*(n)$: la *dualità*, lo scambio di ruoli della *misura*, $A(\tau)$, $A(\nu)$ e della *misura* inversa, espressa con lo scambio dell'addizione con la sua operazione inversa, la sottrazione – del piú piccolo:

$$A(\nu) = H(\nu) - \Delta(\nu),$$

con il piú grande:

$$A(\tau) = H(\tau) + \Delta^*(\tau).$$

Numeri diagonali e laterali e l'inseguimento del piú vecchio nel Parmenide

Per la rappresentazione dell'inseguimento l'esempio piú semplice è dato dal caso in cui l'età contemporanea è definita come:

$$A(\nu) = 0, 1, 2, \ldots \text{ e } H(\nu) = 1, 2, 3, \ldots,$$

con:

$$\zeta = \langle A, H \rangle,$$

e con:

$$\lambda = [n-1 : n],$$

logoi *ipepimori*, e la data calendaristica coetanea come:

$$H(\tau) = 1, 2, 3, \ldots, \text{ e } A(\tau) = 2, 3, 4, \ldots,$$

con:

$$\zeta^* = \langle H, A \rangle$$

e con:

$$\lambda^* = [n+1 : n],$$

logoi *epimori*. Il *logos* λ è l'inverso[4] o il duale di λ^*: in $\lambda(\nu) = [A(\nu) : H(\nu)]$ come in $\lambda^*(\tau) = [A(\tau) : H(\tau)]$ il *misurato* è il numeratore o *prologos*, sempre la grandezza temporale, $A(\nu) = n-1$, dell'età dello stesso A; l'*unità di misura*, il denominatore o *hypologos* rimane in entrambi sempre la stessa grandezza H, dell'età, n, di Ettore. In λ^* l'età, $A(\tau) = n+1$, di A, il denominatore, è piú grande dell'età n di H, il nominatore; inversamente in λ è l'età $H(\tau) = n$, di H, il nominatore, piú grande dell'età $A(\tau) = n-1$, di A, il denominatore. Il *piú grande* e *il piú piccolo* hanno scambiato di ruoli.

L'esempio è naturale e compare ovunque nella letteratura (Plat., Parm. 154C1 potrebbe venir considerato come un riferimento a questa interpretazione).

Però vi sono numeri ancora piú rilevanti che soddisfano alle condizioni. In particolare la successione delle coppie di numeri diagonali e laterali:

$$F(n) = \{D, L\},$$

rispettivamente i suoi *logoi*:

$$\mu(n) = [D : L],$$

con la relazione nota a Platone (Rep. 546C) ed ai pitagorici[5]:

$$\Delta = 2L^2 - D^2 = 1,$$

e

$$\Delta^* = D^2 - 2L^2 = 1;$$

dove gli indici di Δ sono i numeri dispari:

$$d = 1, 3, 5, \ldots,$$

[4] 'Ανάπαλιν; cfr. IAMBLICHI, *In Nicomachi arithemticarum introductionem liber*, ed. H. Pistelli, Leipzig 1894: 40.

[5] PROCLUS, *In Platonem rem publicam commentarii*, ed. G. Kroll, Leipzig 1901: II 27.

e i pari:

$$p = 2, 4, 6, \ldots,$$

(oppure $p = 0, 2, 4, \ldots$) sono gli indici di Δ^*.

Se i numeri D^2 e $2L^2$ sono interpretati come quadrati geometrici, allora Δ e Δ^* sono monadi soltanto in quanto sono, di volta in volta, unità di misura dei quadrati. La loro area:

$$[1 : D^2(n)],$$

è monotona decrescente e tendente a zero.

Per:

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

la successione $F(n) = \{D, L\}$ è

$$[1, 0], [1, 1], [3, 2], [7, 5], [17, 12], \ldots$$

Nel Menone 82B-83A viene proposto [3, 2], in Rep. 546C è citato [7, 5], e nel *Teeteto* 195E-196A viene addotta la regola di ricorsione:

$$L(n+1) = L(n) + D(n),$$

per $n = 3$, vale a dire $12 = 7+5$ – esempio che è divenuto famoso per mezzo di Kant in un differente contesto.

Per D la formula di ricorsione corrispondente è:

$$D(n+1) = D(n) + 2L(n).$$

$D(n+1)$ e $D(n)$, e anche $L(n+1)$ e $L(n)$ sono reciprocamente nella relazione della immediata *successione.*

Esso è l'esempio piú antico di induzione infinita [6].

La successione generata in questo modo contiene soltanto i numeri $F = \{D, L\}$ e viceversa: tutti i numeri $F = \{D, L\}$ sono contenuti in essa. *L'assioma dell'induzione finita di Peano* qui applicato, il movimento del ragionamento procedente da n ad $n+1$, fu formulato per la

[6] Cfr. H. Freudenthal, *Die vollständige Induktion in der Antike*; in: Arch. Int. Hist. Sci. 1955: 31.

prima volta da Zenone[7] col suo stile conciso ed incisivo: « è lo stesso pronunciare la proposizione una volta (ἅπαξ εἰπεῖν) e dirla sempre » (καὶ ἀεὶ λέγειν; Simpl., in phys. 141; cfr. Plat., Parm. 142E; καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον οὕτος ἀεὶ; anche 157E). Il vocabolo ἀεὶ, *sempre*, divenuto termine tecnico nei ragionamenti ricorsivi degli *Elementi* (cf. lib. x e xii), è dotato della stessa connotazione del quantificatore universale – *tutti*.

L'insieme delle coppie F(n) = {D, L} è – con riferimento alla relazione di *consecuzione* – un universo chiuso in sé con il suo proprio linguaggio: le sue formule di generazione ricorsiva sono le sue regole sintattiche – traduzioni o interpretazioni concrete del termine primitivo non definito di *consecuzione*. La successione di coppie L(n) = {D, L} è *isomorfa* alla successione dei *naturali*.

La coppia di numeri:

$$F(n) = \{D^2, 2L^2\},$$

esprime la diade assoluta ed indecisa della *consecuzione*, che può venir decisa per:

$$d = 1, 3, 5, \ldots,$$

come ζ:

$$2L^2 = \text{succ.}\, D^2;$$

e per:

$$p = 0, 2, 4, \ldots$$

come ζ^*:

$$2L^2 = \text{pred.}\, D^2.$$

Se:

$$\theta(n) = [D^2 : 2L^2],$$

allora il suo successore, il logos $\theta(n+1)$ viene generato

[7] Cfr. B.L. van der Waerden, in: Mat. Ann. 1938: 148.

ricorsivamente immediatamente da $\theta(n)$. Chiaramente $\lambda(n) = \theta(d)$ esprimono una successione crescente di *logoi ipepimori*:

$$\lambda(n) = [1 : 2], [49 : 50], [1680 : 1681], \ldots$$

con $n = 2k+1$; mentre $\lambda^*(n) = \theta(p)$ è una successione decrescente di *logoi epimori*:

$$\lambda^*(n) = \ldots, [9801 : 9800], [289 : 288], [9 : 8],$$

con $n = 2k$. Ovviamente:

$$\lambda(n+1) = \text{succ.}\,\lambda(n)$$

e

$$\lambda^*(n+1) = \text{pred.}\,\lambda(n).$$

Esse convergono – oppure si *muovono* simultaneamente, vale a dire per ogni n, verso il logos $[1 : 1]$:

$$[1 : 2], [49 : 50], \ldots; \mathbf{1}; \ldots, [289 : 288], [9 : 8].$$

Linguaggi e universi - sottouniversi e sottolinguaggi

Chiaramente la successione:

$$\theta(n) = [D^2 : 2L^2],$$

come parte propria dell'insieme dei logoi ipepimori e epimori:

$$[n-1 : n]\&[n+1 : n],$$

converge verso lo stesso $[1 : 1]$, ma piú rapidamente.

Però $[D : L]$, $[D^2 : 2L^2]$ e $[n-1 : n]\&[n+1 : n]$ sono soltanto sottoinsiemi propri dell'insieme di *tutti* i *logoi* $\Lambda = [p : q]$, sottouniversi e sottolinguaggi dell'universo assoluto di immersione e del suo linguaggio, il *Logos* universale Λ.

Oltre a ciò $[D^2 : 2L^2]$ e $[n-1 : n]\&[n+1 : n]$ possono venire rappresentati anche nella forma di una somma algebrica:

$$\lambda = 1-\rho,$$

e:

$$\lambda^* = 1+\rho^*,$$

dove ρ è un *difetto*, ρ^* un *eccesso* rispetto a $[1 : 1]$. Difetto ρ e eccesso ρ^* sono uguali e rappresentati rispettivamente per i logoi: $[1 : n]$ e $[1 : 2L^2]$. Ambedue convergono a zero.

Anche le successioni di somme algebriche:

$$\lambda = 1-\rho$$

e

$$\lambda^* = 1+\rho^*$$

sono ricorsive, però sono formate ad ogni passo per mezzo di $[1 : 1]$ – il logos limite.

Ciò ricorda la *dicotomia*.

Infatti il segno aritmetico 1 può essere designato come *telos* e sostituito a T, e λ e λ^* a H. Benché la parola 1, il *logos* $[1 : 1]$, appartenga al vocabolario del Logos universale Λ, sia ben chiaro che esso non è un vocabolo di nessuno dei sottolinguaggi:

$$[n-1 : n]\&[n+1 : n],$$

e

$$[D^2 : 2L^2].$$

Chiaramente non esiste nessun n uguale a $n-1$ o $n+1$, e, parimenti, i pitagorici furono consapevoli della verità del teorema: non può esistere nessun numero quadrato p^2 uguale al doppio $2q^2$ di un altro numero quadrato [8].

Ciò nonostante in ambedue i casi è possibile ampliare

[8] PROCLO, *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*, ed. G. Friedlein, Leipzig: 61, 427. Cfr. anche PLATONE, Epin. 990D.

le successioni con un *telos*: il segno T della parola [1 : 1] preesistente nell'universo d'immersione del *Logos* universale Λ. Tuttavia per i sottolinguaggi:

$$[n-1 : n]\&[n+1 : n]$$

e

$$[D^2 : 2L^2],$$

il vocabolo [1 : 1] resta un neologismo transfinito benché consistente con il dialetto del sottouniverso. Il logos [1 : 1] è soltanto assente da qui, ma non inesistente.

L'aggiunzione transfinita del logos [1 : 1] al sottolinguaggio del *Logos* universale non è una eterodossia, tanto meno una eresia.

Si noti però che in ognuno dei sottouniversi:

$$[n-1 : n]\&[n+1 : n]$$

e

$$[D^2 : 2L^2],$$

è anche possibile definire un resto:

$$R(n) = \lambda^* - \lambda,$$

in questo caso uguale a:

$$\rho + \rho^*,$$

ma senza l'asserzione riguardante l'esistenza o la non esistenza di T.

Chiaramente $R(n) \rightarrow 0$.

La produzione ricorsiva dei resti:

$$R(n) = \lambda - \lambda^*,$$

è un processo dell'inscatolazione dei segmenti definiti dagli estremi $\lambda(n)$, $\lambda^*(n)$ e $\theta(d)$, $\theta(p)$ – una operazione noiosa, laboriosa ma non senza speranza, anche se soltanto transfinita.

Il caso della successione:

$$\mu(n) = [D : L],$$

è radicalmente differente. Un resto:

$$R(n) = \mu(p) - \mu(d),$$

esiste anche in questo caso, ma non si trova nessun segno o parola dell'universo Λ del *Logos* da poter adottare come telos: *non c'è e non ci sarà nessun poeta per cantare l'inno di questo luogo iperuranio* (ὑπερουράνιον τόπος) *al di fuori del cielo* (Platone, Fedro 247C). Il sottouniverso $\mu = [D : L]$ non può essere topologicamente chiuso, il suo sottolinguaggio non può essere ampliato con un neologismo del *logos* ortodosso. Non è possibile esprimere i *logoi*:

$$\mu = [D : L],$$

in termini di differenze:

$$\mu(d) = T - \rho,$$

oppure somme:

$$\mu(p) = T + \rho^*.$$

Non esiste nessun oggetto, segno o parola da sostituire a T e da assegnare come codominio. Nel caso ipotetico di una *dicotomia* la freccia che sorge dal dominio dell'essere sarà orientata verso un Uno – lo stesso niente (*fig. 9*):

$$(1 : 1), (7 : 5), (41 : 29), \ldots; ▣ ; \ldots,$$
$$(99 : 70), (17 : 12), (3 : 2).$$

L'esecuzione ricorsiva delle inscatolazioni telescopiche degli intervalli:

$$R(n) \supset R(n+1),$$

è chiaramente possibile anche in questo caso.

Ma essa non è soltanto infinita – un gioco laborioso; sembra piuttosto essere uno scherzo, di cattivo gusto. Non esiste nessuna speranza di un incontro, esso non è possibile nemmeno nel transfinito.

Cosí non è mai possibile rappresentare la *dicotomia* con $\mu(n) = [D : L]$ nell'universo della ragione pitagorica Λ.

Ciò nonostante la *dioxis* del piú giovane ζ e del piú vecchio ζ^* può venire espressa in modo assoluto mediante

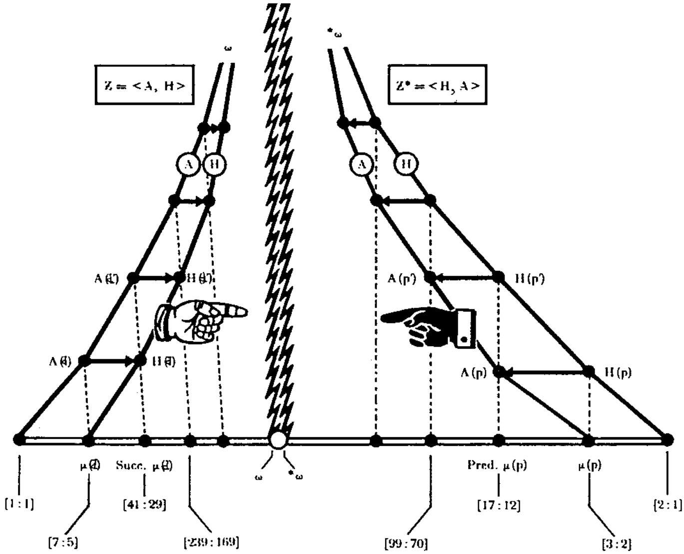

Fig. 9 - *Il piú vecchio e il piú giovane*: inseguimento e inseguimento duale dei logoi di numeri diagonali e laterali con indici dispari, $\zeta = [D(d) : L(d)]$, e pari, $\zeta^* = [D(p) : L(p)]$.

la lingua $L = \{D, L\}$. La successione $\mu(n)$ – implicitamente $\mu(d)$, $\mu(p)$ – vengono generate per mezzo di ricorsione finita senza presupporre la preesistenza di un oggetto transfinito T.

Uguaglianza omoiotetica - Difficoltà linguistiche

Le successioni $\mu(d)$, $\mu(p)$ – piuttosto, a causa della loro dualità, la riunione: $\mu(d) \cup \mu(p)$, di ambedue – corrispondono esattamente alla struttura fine e alle richieste postulate nelle premesse dell'*Achille*.

L'uguaglianza simultanea delle età $\mu(d)$ e $\mu(p)$ – e la coincidenza delle posizioni di A(n) e H(n) sono escluse *ab initio* dalla stessa premessa dell'argomento – per tutti i valori di n. Altrettanto poco rilevante è il fatto che $\Delta(n)$ converga verso zero, oppure verso una costante.

Se T esiste ed è esprimibile nello stesso linguaggio universale Λ al quale appartiene anche il sottolinguaggio λ, λ^*, allora l'impossibilità della coincidenza di A e H, dell'uguaglianza di λ e λ^*, si riduce per transitività all'impossibilità di una coincidenza di A e H, all'impossibilità di una uguaglianza di λ e λ^* – considerate separatamente – con lo stesso T. Non è richiesta nessuna relazione di inseguimento ζ tra T e H. Invece di un unico *Achille* otteniamo due *dicotomie*: la dicotomia-A e la dicotomia-H, indipendenti – anche se simultanee.

Per la meno nella *dicotomia* viene dato un luogo fisso, con riferimento al quale può essere formulata e avere un senso una relazione di uguaglianza o di disuguaglianza. Ma nessun oggetto o segno di riferimento, nessun supporto ontologico viene dato nell'*Achille*, per poter stabilire una relazione di uguaglianza o di disuguaglianza.

Il problema centrale dell'*Achille* è allora: definire una speciale relazione binaria d'uguaglianza o d'identità, senza assumere l'esistenza di un T, ma che, ciò nonostante, permetta di introdurre nel testo dell'argomento tanto la nozione di « coincidenza di A e H » quanto quella di « uguaglianza di $\lambda(n)$ e $\lambda^*(n)$ » – oppure di $\mu(d)$ e $\mu(p)$ – come un oggetto linguistico esprimibile nel discorso, tangibile nel contesto – capace di essere dimostrato o rifiutato. È richiesta naturalmente una relazione binaria, i cui termini sono due insiemi infiniti e semiaperti di luoghi o di grandezze, $\{\lambda\}$ e $\{\lambda^*\}$.

Per motivi di comodità vogliamo contrassegnare questa relazione con il termine « logos Ω » – *logos* nel senso eudossiano, piú generale, di « un certo rapporto », σχέσις [9] – *liaison* o *habitudo* – « secondo la quantità » (ingl. *size*, *largeness*: πηλικότητα) come esso è definito in elem. v def. 3.

In questo senso viene impiegato il concetto Ω da

[9] Il termine occorre in Arist. frg. 178, per il rapporto tra uomo e donna, amore del padre per il figlio. Cfr. anche ALESSANDRO DI AFRODISIA, *In Aristotelis metaphysica commentaria*, ed. M. Hayduck, Berlin 1891: 83, 86.

Platone nel *Parmenide* (140E; ἡλικίαν... ἔχον ἰσότητος χρόνου καὶ ὁμοιότητος μεθέξει) per l'uguaglianza dell'età (cfr. anche Parm., 161C,164A; Phedr. 271A; Phæd. 109A; Symp. 173D). La parola ὁμοίος risp. ὁμοίοτητος, *omoiotetia*, corrisponde al latino *similis*, all'inglese *the same*, *sameness*, a differenza del termine ἴσος impiegato prevalentemente per l'uguaglianza metrica (cfr. Aristotele, cat. 6a26-35).

La relazione di omoiotetia, Ω, è molto differente dalla uguaglianza standard, dove la differenza dei termini è zero. La differenza dei due termini di Ω non è zero. Pertanto Ω non è nemmeno una disuguaglianza standard, dove la differenza dei due termini: $\lambda(n)$ e $\lambda(n+1)$; $\lambda(n)$ e $\lambda^*(n)$; T e $\lambda(n)$ o $\lambda^*(n)$; $\mu(p)$ e $\mu(d)$ – è una grandezza fissa e finita, Δ, R oppure ρ. La differenza dei termini: $\{\lambda(n)\}$ e $\{\lambda^*(n)\}$, oppure $\{\mu(p)\}$ e $\{\mu(d)\}$ – di Ω è invece minore di tutte le differenze finite (Parm. 140B, 149CE, 164A) ma piú grande di zero. Certamente una *uguaglianza* non-standard, la stessa che occorre nell'argomento della *pluralità* di Zenone [10].

Il telos dell'argomento *Achille* è: dimostrare l'impossibilità dell'esistenza di una omoiotetia tra due insiemi infiniti: $\{\mu(d)\}$ e $\{\mu(p)\}$ – indipendentemente da ogni possibile proprietà metrica di Δ e Δ^*. Infatti Ω esprime la relazione dell'uguaglianza omoiotetica, anche se:

$$\Delta(0) + \Delta(1) + \ldots + \Delta(n) + \ldots$$

e

$$\Delta^*(1) + \Delta^*(2) + \ldots + \Delta^+(n) + \ldots$$

non rappresentano nessun numero finito.

Se tra i due sottoinsiemi $\{\mu(d)\}$ e $\{\mu(p)\}$ di $\{\mu(n)\}$ sussiste una relazione Ω, allora essa è necessariamente un unico *Uno* – oggetto portatore della identità con se stesso.

Nei singoli termini degli insiemi, i logoi $\mu(d)$ e $\mu(p)$, *i molti*, τὰ πολλά (Filebo 14C) – sono tutti separati dal *logos* Ω da un *difetto* risp. *eccesso*, mediante la proprietà

[10] Cfr. Simpl., in phys. 139-41.

dell'esser altro, τὰ ἄλλα (Parm. 147C), o *essere differente*, ἑτεροῖα (Parm. 161A).

È dimostrabile che: $\mu(p)-\mu(d)>0$, per ogni n; pertanto le due successioni di età: $\mu(d)$ e $\mu(p)$ – convergono l'una verso l'altra. Ma esse sono separate da una lacuna: « ■ » – riempita con il non-essere: $\mu(d)$ non ha l'ultimo elemento, $\mu(p)$ non ha il primo. L'insieme:

$$\Omega = \{\mu(d); \mu(p)\},$$

non è chiuso, non è perfetto (μὴ τέλος ἔχειν· ἀτελῆ... παντάπασιν ἀπείρω; Filebo 24B).

È chiaro che Ω è una cosiddetta *sezione di Dedekind*, designata da Platone con il termine « diade indefinita del grande e del piccolo » (Arist., met. 1088a15-21). Tuttavia Ω è uno *hen* – « quasi un Uno del disuguale » (τὸ ἄνισον ὥς ἕν τι; met. 1088a15), « generato da una egualizzazione del piú piccolo e del piú grande » (met. 1081a25, 1083b24) – « una dottrina che è del tutto distante da tutto ciò che è possibile o probabile » – commenta Aristotele – « una teoria senza senso, compleamente irrazionale, come il confuso sproloquio senza fine dello schiavo nella commedia di Simonide » (met. 1091a3-12).

In *Protagora* 357A l'*eccesso-difetto* viene caratterizzato tanto aritmeticamente: *molto-poco*, quanto geometricamente: *grande-piccolo*, ma anche in modo puramente topologico: *vicino-lontano*.

L'*Uno* definito da Ω, *se esiste*, può venire situato soltanto *fra* i due sottoinsiemi semi-aperti: $\{\mu(d)\}$ e $\{\mu(p)\}$. L'apparizione di questa bizzarra relazione ternaria *fra* induce un *fantasma dell'uguaglianza* (φάντασμα ἰσότητος; Parm. 165A; cfr. anche 161D).

L'omoiotetia Ω è chiaramente formulabile nei linguaggi:

$$[\lambda, \lambda^*] = [n-1 : n]\&[n+1 : 1]$$

e

$$\theta = [D^2 : 2L^2],$$

ma ugualmente nel dialetto μ dei logoi [D : L].

Tuttavia nel sottolinguaggio $\mu = [D : L]$ essa conduce inevitabilmente a difficoltà linguistiche. Infatti la lacuna ■ che separa la λ^* è accuratamente definibile proprio come la stessa sezione, poiché essa è un Uno, unico e indivisibile, come precisamente il luogo vuoto – il κενόν τόπος di Aristotele (phys. 208b26-27), la tenebra del niente, τοῦ μὴ ὄντος σκοτεινότητα di Platone (Sof. 254A) – dove l'incontro di A e H è impossibile; ma anche per certe caratteristiche e proprietà concrete, come un oggetto qualunque presente nel dominio dell'essere.

Denotiamo la lacuna ■ – se essa è considerata come oggetto, ovviamente oggetto inesistente – con il segno T del *telos*, oppure con Ψ, se essa è considerata come parola, *logos* – ma in questo caso come vocabolo di un linguaggio differente. Chiaramente T e Ψ sono segni metalinguistici che denotano la presenza di un vuoto d'essere nel dominio ontico e di silenzio nel linguaggio oggetto: parola ineffabile [11].

Nel caso speciale della successione di logoi $\mu = [D : L]$ il segno T può essere sostituito con 2^*, un termine del metalinguaggio aritmetico, e Ψ con $[2^* : 1]$ – perché $2^*.2^* = 2$, e il *diplasion logos,* o la composizione di $\Psi = [2^* : 1]$ con se stesso, è uguale con $[2 : 1]$.

Giacché $T = 2^*$ e $\Psi = [2^* : 1]$ sono metatermini che designano un unico e preciso non esistente. Vale a dire: il non essente è tuttavia una cosa conoscibile dotata di qualità, ed è *possibile* parlare della stessa come dell'essere (γιγνώσκεται τί τὸ λεγόμενον μὴ εἶναι; Parm. 160CD) – soggetto preferito di Platone nel *Teeteto*, nel *Sofista* e nel *Politico*.

Ma poiché l'universo dei numeri e dei *logoi* contiene *tutti* i numeri e logoi che esistono, la cosa 2^* – e anche la parola $\Psi = [2^* : 1]$ – si può trovare soltanto al di là, e può essere espressa in un linguaggio non soltanto non ortodosso ma perfino eretico e, ovviamente, anche menzognero un Ψευδολόγος. Soprattutto: la *composizione* $2^*.2^*$ del non essente con se stesso è il numero *esistente* 2.

[11] Ἄρρητοι λόγοι, cfr. PROCLO, in elem. 60.

Se tutti i:

$$\mu(n) = [D : L],$$

sono rapporti di numeri, Ψ può essere soltanto un *logos* che è un *alogon* [12].

Certamente in un universo differente e in una lingua straniera – quella delle figure geometriche – il metatermine 2* può essere interpretato come la *diagonale di un quadrato* Q(o). Il quadrato ha una « diagonale ineffabile » (Platone, Rep. 546C) nel linguaggio dei numeri e *logoi*. Ma è impossibile che i numeri, anche i numeri cosiddetti *quadrati*, come D^2 o L^2, possano avere una diagonale. Essere una « diagonale effabile » (Rep. 546C) è nell'universo aritmetico dei numeri e *logoi* una combinazione di parole alquanto eteroclita. E Platone, che non ha omesso nessuna occasione per esprimere il suo disprezzo per i poeti e la poesia, non ha nemmeno tralasciato di sfruttare consapevolmente l'amfibologia seducente della nuova terminologia nei suoi bellissimi giochi criptici di parole surrealistiche: « Sarai tu contento se il capo dello Stato sarà *irrazionale* come la diagonale del quadrato? » – chiede Socrate a Glaucone in Rep. 546C [13]; e il lato non misurabile, δ, del quadrato duale Q* dispone ciò nonostante della capacità, *della potenza*: « potere un quadrato misurabile e razionale » – e può essere definito giustamente come questa stessa « potenza » (δυνάμειϲ... οὐ συμμέτρουϲ... δύνανται; Teet. 148AB).

La antanairesis della diagonale e l'inseguimento platonico

Questo esempio dei numeri $F = \{ D, L \}$ viene addotto per primo non soltanto perché essi sono esplicita-

[12] Questo *oxymoron* occorre una sola volta e definisce in elem. xiii 6 la cosiddetta *sezione* aurea come un λόγοϲ che è ἄλογοϲ.
[13] Secondo l'interpretazione di EVA SACHS, *De Teæteto mathematico. Dissertatio*, Berlin 1914.

mente richiamati da Platone, ma anche perché la discussione dell'inseguimento del piú giovane e del piú vecchio nel *Parmenide* 140E-142A fa immediatamente seguito ad un passo, 140BD, il cui oggetto è la incommensurabilità (alla quale si riferisce anche Parm. 131DE), e certamente può illustrare il problema ontologico sorto in quel luogo.

La stessa problematica potrebbe riguardare i brevi passaggi del *Filebo* 23D-26D, e aver costituito oggetto di discussione appassionata – come si può dedurre da Fil. 15D-16B.

Il problema è il seguente: dato un quadrato Q(o), se il lato $\sigma(o)$ possiede una *misura*, la possiede anche la diagonale $\delta(o)$, oppure no?

Il lato non misura la diagonale, essendo piú piccolo, ed ha origine un *difetto*:

$$\sigma(1) = \delta(o) - \sigma(o).$$

Ma il doppio del lato, $2\sigma(o)$ – la diagonale [V, W] di un quadrato Q*(o) – è piú grande (cfr. Men. 82C-84B), ed il resto è un *eccesso*:

$$2\sigma(o) - \delta(o) = \delta(1);$$

e

$$\delta(1) - \sigma(1) = \sigma(2),$$

è nuovamente un *eccesso*.

Ma:

$$2\sigma(1) - \delta(1) = \delta(2),$$

è un *difetto*, ed altrettanto il segmento:

$$\delta(2) - \sigma(2) = \sigma(3),$$

ecc.

Dalla ripetizione di questo processo sorgono due successioni: $\sigma(d)$, $\delta(p)$ di *difetti* e $\sigma(p)$, $\delta(d)$ di *eccessi* (dove d rappresenta gli indici dispari: 1, 3, 5, ... e p = 2, 4, 6, ... gli indici pari) – con riferimento al luogo T nella diagonale

[V, W] di $Q^*(o)$ – essendo [V, T] = $\delta(o)$ – e definiscono rispettivamente le successioni:

$$\lambda(d) = \delta(o) - \sigma(d),$$
$$\lambda^*(p) = \delta(o) - \delta(p),$$

crescente, e:

$$\lambda(p) = \delta(o) + \sigma(p),$$
$$\lambda^*(d) = \delta(o) + \delta(d),$$

decrescente. Ad ogni n corrisponde un difetto-σ ed un eccesso-σ piú piccolo. Per: d = 1, 3, 5, ..., 2n+1, ..., il segmento $\sigma(d)$ è un difetto. Per: p = 2, 4, 6, ..., 2n, ..., si ha $\sigma(p)$ come eccesso.

Non a torto questo processo di misura, è stato chiamato *antanairesis*, una *Aufhebung* (traduzione esatta di ἀναιρεῖν) che perdura oscillando tra due settori opposti (ἀντ-αναίρεσις; cfr. Aristotele, top. 158b33, metaph. 1040a22).

Secondo Proclo [14] questa *antanairesis* venne eseguita dai pitagorici mediante le costruzioni geometriche contenute in el. ii 9-10.

I segmenti $\sigma(n)$, $\delta(n)$ possono venire interpretati entrambi come lati dei quadrati [15]. Due quadrati con lo stesso indice si trovano nella relazione reciproca di *dualità*: la diagonale $\delta(n)$ di $Q(n)$ misura il lato di $Q^*(n)$; ed il lato $\sigma(n)$ di $Q(n)$ misura la diagonale $2\sigma(n)$ di $Q^*(n)$.

In metaph. 1053a17-18 vi è un riferimento a questo scambio dei ruoli delle unità duali di misura duale (διάμετρος δυσὶ μετρεῖται καὶ ἡ πλευρά). Presumibilmente « the gloss of an overzealous copyst » – commenta D. Ross *ad locum* [16].

Proprio la *dualità* conferisce un senso chiaro al gioco di parole politico [17] nel *Politico* 266AC. Dovevano venir

[14] In rem. publ. ii 27.

[15] Cfr. TEONE, *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*, ed. E. Hiller, Leipzig 1878: 43; PROCLO, loc. cit.

[16] *Aristotle's Metaphysics*, Oxford 1970: ii 283.

[17] Un gioco di parole nel *Fedro* 264C, ancora piú criptico, si potrebbe interpretare come un vago riferimento, in questo caso

eseguite due divisioni dicotomiche di un intero: una prima (265BC), ed una seconda (265E) che divide nuovamente uno dei due semiinteri in due parti (δίχα διαστέλλειν - τὼ δύο διαιροῦμεν; 265E, 266A). In che modo deve venire eseguita la *bisezione* – qui la classificazione dei viventi? – chiede il Giovane Socrate (266A5). Lo Straniero di Elea risponde: « secondo la diagonale e nuovamente secondo la diagonale della diagonale » – cioè secondo la diagonale del quadrato e del quadrato duale. Un gioco di parole non cattivo, con il *logos* della *antanairesis* nel contesto politico di uno straniero di Elea in Atene.

I segmenti:

$$\delta(o) - \sigma(d) \text{ e } \delta(o) + \sigma(p),$$

possono rappresentare le età relative del piú giovane e del piú vecchio. Al segmento piú giovane, $\delta(o) - \sigma(d)$, che diventa piú vecchio corrisponde – come necessità immanente (Parm. 140AC) – il processo duale del diventar piú giovane da parte del segmento piú vecchio, $\delta(o) + \sigma(p)$: entrambi sono processi in cui si esegue una misura. Vi è un unico processo infinito – la *antanairesis* – che definisce l'invecchiamento simultaneamente in ambe le sue ipostasi duali, positiva e negativa.

La monade assoluta: lingua e struttura algebrica della antanairesis del quadrato

La piú importante particolarità distintiva dell'antanairesis è quella di generare automaticamente le coppie di numeri $F = \{D, L\}$.

E facile convincersi [18] che:

$$\sigma(d) = 2{*}L(d) - D(d),$$

e

anche il primo in ordine di tempo, alla cosiddetta *sezione aurea*, ἄκρος καὶ μέσος λόγος.

[18] I. Toth, *op. cit.*: 60-63.

$$\sigma(p) = D(p) - 2^*L(p);$$

e anche che:

$$\sigma(-d) = 2^*L(d) + D(d)$$

e

$$\sigma(-p) = D(p) + 2^*L(p),$$

dove il segno 2^* sostituisce $\sqrt{2}$ – abbreviazione stenografica della proposizione « radix 2 ».

I difetti, $\sigma(d)$, e gli eccessi, $\sigma(p)$, sono espressioni binomiali, vocaboli dell'idioma di un determinato universo algebrico severamente strutturato.

I suoi termini primitivi, irriducibili sono $1 = \sigma(0)$ e 2^*, due segni monadici indivisibili, soggetti ad assiomi sintattici, il piú importante dei quali è $2^*.2^* = 2$. Tutte le altre parole dell'idioma sono derivatea partire da $\sigma(0)$ e 2^*.

Tuttavia è di importanza capitale il fatto che l'universo *intero* $\sigma(i)$, con:

$$i = \ldots, -(n+1), -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots,$$

è contrassegnato da determinate proprietà *monadiche*.

I binomi: $\sigma(i)$, sono tutti dei cosiddetti « divisori dell'unità 1 », poiché:

$$\sigma(n).\sigma(-n) = 1.$$

Vale:

$$\text{succ. } \sigma(i) = \sigma(i).\sigma(1).$$

Per $n<0$, nel semimondo negativo dell'universo *intero*, $\sigma(i)$, ciò corrisponde alla regola di ricorsione dei numeri $F = \{D, L\}$.

I binomi $\sigma(i)$ sono le unità del corpo algebrico:

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$$

– estensione del corpo $\mathbf{Q}$ dei *logoi* pitagorici, Λ – oppure dei numeri razionali – mediante $\sqrt{2}$.

Il simplesso: $\Delta(i)$, con il cognome algebrico: $\sigma(i)$, è sempre una *unità* – in senso ampliato – una unità della struttura algebrica oppure dell'universo dei *logoi* pitagorici ampliato con $[2^* : 1]$ – il capo, l'*arche* – il principio oppure *Il Principe* irrazionale del mondo, inizialmente razionale, cosí espanso.

Il prodotto di due σ-parole binomiali è ancora una σ-parola:

$$\sigma(i).\sigma(j) = \sigma(i+j).$$

La proprietà metrica della *grandezza* di $\Delta(i)$ non gioca pertanto alcun ruolo: il suo cognome algebrico, $\sigma(i)$ rappresenta una ipostasi non metrica, puramente algebrica, della monade assoluta.

L'area di un quadrato $Q(n)$ con il lato $\sigma(n)$ è $\sigma(2n)$. Il sottoinsieme monadico:

$$\sigma(2), \sigma(4), \sigma(8), ..., \sigma(2^n), ...,$$

è dotato della notevole proprietà che tutti i suoi elementi sono tanto lati quanto aree dei quadrati $Q(2^n)$.

La successione degli esponenti:

$$k = 2, 4, 8, ..., 2^n, 2^{2n}, ...,$$

produce i numeri *pari-pari* (Parm. 143E) dei pitagorici:

$$2^{2n} = 2^n.2^n.$$

La successione dei corrispondenti logoi $\Pi(k) = [D(k) : L(k)]$ è:

$$\Pi(k) = [3 : 2], [17 : 12], [577 : 408], ...,$$

per:

$$k = 2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^n, 2^{n+1}, ...$$

– serie conosciuta già dai babilonesi [19].

[19] Cfr. M. Caveing, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*; Thèse, Lille 1982: 1148, 1387.

Commensurabilità e misura

Lo svolgimento della antanairesis geometrica può offrire soltanto una prova della negazione della commensurabilità – equivalente all'asserzione che i difetti e eccessi sono positivi:

$$\sigma(d)>o \text{ e } \sigma(p)>o,$$

per ogni n.

Ma questo non fa altro che esplicitare la premessa della *dicotomia* ed è indipendente della verità o falsità del teorema di Zenone: « non c'è alcun movimento » – e del suo equivalente: « la diagonale non ha nessuna misura ». L'incommensurabilità è consistente con entrambe le conclusioni: « la diagonale non ha misura, né pitagorica, né non pitagorica », « la diagonale ha una misura non-pitagorica ».

Il processo geometrico della antanairesis rappresenta ovviamente la dimostrazione della non-commensurabilità [20], ma è irrilevante e insufficiente per produrre una dimostrazione della verità o della falsità del teorema di Zenone – implicitamente per poter decidere l'alternativa, se alla diagonale possa venire assegnata o no una *misura*, M(δ).

[20] In un ampio passaggio del suo *Anfänge der griechischen Mathematik*, München-Wien 1969: 263-287. A. Szabó sostiene la tesi ugualmente stupefacente che l'antanairesis infinita, dimostrata in elem. x 2 come criterio dell'incommensurabilità, « non fu mai impiegata dai matematici antichi per una dimostrazione di incommensurabilità » (*ivi* 282). L'argomento di Szabó si basa sulla constatazione del « fatto teorico » (rein theoretische Tatsache) che l'infinità dell'antanairesis è « *un criterio puramente teorico, e in nessun caso un criterio applicabile praticamente* » – nonostante la sua applicazione nel teoremica elem. x 2 riguardi la dimostrazione dell'incommensurabilità (*ivi* 271, 277, 282, 281). La piú antica, storicamente la prima dimostrazione che segna il momento della scoperta stessa, sarebbe – secondo l'opinione dell'Autore – quella classica citata da Aristotele, e precisamente perché soltanto questa è condotta « con mezzi puramente teorici, – ... e ha fondato la nuova tecnica dimostrativa antiempirista » (*ivi* 287; *corsivi* di Szabó). – Mi sembra difficile indovinare quale sarebbe, secondo l'opinione dell'Autore, la differenza tra il cosiddetto valore pratico e il valore teorico di una dimostrazione matematica.

Si richiede un cambiamento radicale della strategia inferenziale.

Essa è offerta dalla profonda analogia tra le coppie $F = \{D, L\}$ di numeri e i segmenti geometrici binomiali $\sigma(n)$.

Numeri e figure: analogia tra il quadrato e i numeri diagonali e laterali

Ad ogni $\mu(n)$ si può associare un segmento geometrico, $[V, K(d)]$ a $\mu(d)$ e $[K(p), W]$ a $\mu(p)$. Essi sono allora tutti misurabili con uno $\varkappa$ – misura comune – rappresentante la monade aritmetica 1. A questi segmenti non solo si può attribuire una grandezza, ma anche una misura esprimibile con il *logos* $\mu = [D : L]$. Designiamo con $M(d)$ e $M(p)$ – secondo la loro orientazione – la misura dei segmenti geometrici $[V, K(d)]$ o $[(p), W]$, parti della diagonale $[V, W]$ di $Q^*(o)$, con la misura:

$$M[VW] = [2 : 1].$$

L'esistenza dei *logoi* $\mu = [D : L]$ è *assoluta*: la successione $\mu = [D : L]$ può essere generata senza i teoremi elem. ii 9-10 della geometria piana, senza assumere l'esistenza di T.

Ha cosí luogo un processo d'inscatolazione infinita delle differenze:

$$R(n) = M(p) - M(d),$$

oppure dei segmenti, non orientati, $[K(p), K(d)]$.

Questo processo non è una *dicotomia.* Esso rappresenta un modello dell'*Achille.*

Anche ad ogni logos $\mu = [D : L]$ corrisponde un logos duale nella successione opposta – ad ogni misura $M(n)$ corrisponde una misura opposta oppure duale $M^*(n)$. Alla successione:

$$M(d) = [1 : 1] < [7 : 5] < [41 : 29] < \ldots,$$

crescente – corrisponde la misura duale:

$$M^*(d) = \ldots < [2.29 : 41] < [2.5 : 7] < [2.1 : 1],$$

decrescente. Alla successione:

$$M(p) = \ldots < [99 : 70] < [17 : 12] < [3 : 2] < [1 : 0],$$

decrescente corrisponde la successione duale:

$$M^*(p) = [2.0 : 1] < [2.2 : 3] < [2.12 : 17] < [2.7 : 99] < \ldots,$$

crescente.

I numeri diagonali $D(n)$ di $M(n)$ diventano i numeri laterali $L^*(n)$ e di $M^*(n)$. Il numero diagonale duale, $D^*(n)$, di $M^*(n)$ è $2L$.

La successione completa di $\mu = [D : L]$ e $[2L : D]$ ovvero $\mu^* = [D^* : L^*]$, crescente, è costituita – per gli indici dispari:

$$d = 1, 3, 5, \ldots,$$

dai *logoi*:

$$[D : L] = M(d);$$

per i valori pari:

$$n = 2, 4, 6, \ldots,$$

la successione crescente è rappresentata dai *logoi*:

$$[2L : D] = M^*(p),$$

duali di:

$$[D : L] = M(p),$$

della successione decrescente.

Viceversa, la successione completa decrescente è costituita, per:

$$p = 0, 2, 4, 6, \ldots,$$

da:

$$M(p) = [D : L],$$

e per:

$$d = 1, 3, 5, \ldots,$$

da:

$$M^*(d) = [2L : D],$$

i duali di:

$$M(d) = [D : L],$$

della successione crescente. Le due successioni, crescente e decrescente, sono reciprocamente duali.

Come nel caso dell'antanairesis geometrica ad ogni n corrisopnde un difetto $\sigma(n)$, il lato del quadrato $Q(n)$, e un eccesso $\delta(n)$, il lato del quadrato duale $Q^*(n)$ – o inversamente: un eccesso $\sigma(n)$ e un difetto $\delta(n)$, secondo la parità dell'indice n – anche nel dominio aritmetico ad ogni n corrisponde un logos $\mu = [D : L]$ e il suo duale $\mu^*(n) = [2L, D]$, sempre come termini di due successioni di « piú piccoli » e « piú grandi » – o inversamente, secondo la parità di n.

Se $F(n)$ rappresenta la coppia $\{D, L\}$ e $F^*(n)$ la coppia duale $\{2L, D\}$, allora la regola di ricorsione può venir rappresentata come la congiunzione simbolica:

$$F(n+1) = F^*(n) \& F(n);$$

la coppia duale $F^*(n)$ gioca il ruolo della mediazione tra due passi successivi del processo ricorsivo di generazione aritmetica:

$$L(n+1) = L^*(n) + L(n),$$

e

$$D(n+1) = D^*(n) + D(n).$$

Chiaramente, il processo orientato verso il telos T preesistente dell'antanairesis delle figure quadratiche:

$$Q(n) = Q^*(n+1) \& Q(n+1),$$

e il processo ricorsivo di generazione delle coppie aritmetiche:

$$F(n+1) = F^*(n) \& F(n),$$

sono dotati con la stessa struttura simbolica astratta, benché orientati in sensi opposti: il processo geometrico dell'antanairesis è finale e teleologico, il processo aritmetico è causale e privo di un telos preesistente.

Intermezzo musicale pitagorico

La medesima dualità viene espressa in modo estremamente pregnante nel procedimento teorico di divisione dell'ottava. La quinta, *sol*, è:

$$M(2^1) = [3 : 2],$$

la quarta, *fa*:

$$M^*(2^1) = [4 : 3],$$

è la sua *duale*.

La prosecuzione della divisione conduce alle quinte teoriche, che sono uguali a:

$$M(2^n) = \ldots < [577 : 408] < [17 : 12] < [3 : 2],$$

i cui indici sono i numeri pitagorici pari-pari della successione:

$$2^1, 2^2, 2^3, \ldots \text{ ecc.}$$

I loro *duali*:

$$M^*(2^n) = [2.2 : 3] < [2.12 : 17] < [2.408 : 577] < \ldots,$$

sono le corrispondenti quarte teoriche.

Forse potrebbero essere questi i *numeri sinfonici* (ξύμφονοι ἀριθμοί: Rep. 531C) di Platone. Come era noto ai pitagorici, la successione alternante dei *logoi* duali $M(2^n)$, $M^*(2^n)$ può venir generata per ricorsione:

$$M(2^{n+1})$$

è sempre la media *aritmetica* e:

$$M^*(2^{n+1})$$

quella *armonica* tra $M^{(2n)}$ e $M^*(2^n)$.

L'esistenza del *logos* Ω darebbe luogo in questo caso alla divisione dell'ottava in due intervalli *sinfoni* omonimi [21].

Ciò è possibile soltanto in una gamma dodecafonica, ma è impossibile – come viene dimostrato in un teorema di Archita [22] – nell'ottava pitagorica: la successione inscatolata di intervalli

$$R(2) \supset R(2^2) \supset \ \dots \ \supset R(2^n) \supset \ \dots,$$

non contiene nessun suono T, assolutamente niente, che possa appartenere all'universo dell'armonia sinfonica di Pitagora; T può essere soltanto il segno del silenzio – esso è un segno *sordo* (cfr. l'inglese *surd*).

Numeri figurati: il « teorema elegante » dei pitagorici e la dualità

L'analogia strutturale tra la generazione ricorsiva degli oggetti geometrici – i quadrati Q, Q*, i segmenti binomiali $\sigma(n)$ e le coppie aritmetiche L, L* è sorprendente: i nu-

[21] Come la successione dei numeri *pari-pari*, $2^{n+1} = 2.2^n$ – anche questa successione $[D(2^n, L(2^n)]$ ha la sua regola di ricorsione. Infatti, è facile dimostrare che $D(2^{n+1}) = 2D^2(2^n) - 1$. La formula è equivalente al teorema pitagorico della relazione tra la media aritmetica e quella armonica (cfr. I. TOTH, *op. cit.*). L'espressione curiosamente ricorda la relazione $D^2(d) = 2L^2(d) - 1$. – Se $D(2^n)$ è considerato come numero laterale $l(2^n)$, allora $D(2^{n+1})$ è il quadrato del numero diagonale: $d^2(2^n) = 2l^2(2^n) - 1$ – dove $d(2^n)$ è il numero diagonale corrispondente al numero laterale $l(2^n)$. La successione delle figure quadratiche dai lati: $\{l(2^n), d(2^n)\} = 1, \sqrt{3}; 3, \sqrt{17}; 17, \sqrt{577}; 577, \dots; D(2^n), \sqrt{D(2^{n+1})}; \dots$ – è in una certa misura analoga alla successione delle figure quadratiche dai lati: $1, \sqrt{2}; 2, 2\sqrt{2}; 4, 4\sqrt{2}; 8, \dots, 2^n, 2^n\sqrt{2}; \dots$, dove ogni quadrato è il duale del quadrato precedente. Curiosamente il primo $d(2)$ è anche il primo, $\sqrt{3}$, e il secondo $d(2^2)$ è l'ultimo valore, $\sqrt{17}$, della sequenza di grandezze irrazionali discusse nel *Teeteto*, 147D, di Platone.

[22] *Sectio canonis* 3, in: Euclidis opera omnia vol. viii, ed. H. Menge, Leipzig 1916; cfr. anche BOETIUS, *De institutione musica libri quinque*, iii 11, ed. G. Friedlein, Leipzig 1867.

meri $\{D, L\}$ sono *numeri figurati* (ἀναλογίαν... ἀριθμοῖς σχήματα; Procl., in elem. 61; cfr. anche Theon, expos. 42-43; Iambl., introd. 11-12) che in qualche modo *imitano* la diagonale ed il lato del quadrato: « i pitagorici sostengono che ciò che è esiste per *imitazione* » (μιμήσει) dei numeri (Ar., metaph. 987b11).

La scoperta di questa analogia e della sua rilevanza risale ai pitagorici.

Proclo [23] lo ha chiamato l'*elegante teorema*, θεώρημα γλαφυρόν, dei pitagorici: essi avevano descritto le proprietà geometriche del quadrato in linguaggio aritmetico (διὰ τῶν ἀριθμῶν).

L'eleganza e la particolare rilevanza del teorema consiste nello sguardo d'assieme che esso dischiude sulla simmetria interna, estremamente espressiva, la quale avviene mediante la dualità dei quadrati, lo scambio dei ruoli della diagonale e del lato: la *monas*, in quanto *spermatikos logos*, è il principio dominante e dispone della capacità e della forza di apparire nelle ipostasi di diagonale e lato. Queste parole di Teone – che abbiamo tradotto un po' liberamente – potrebbero essere sembrate al lettore del secolo scorso l'esaltazione di un mistico neoplatonico [24]. Però proprio la relazione di dualità deve essere stata ciò che aveva affascinato i Pitagorici: una *coincidentia* di due ipostasi *opposte* in un unico *Uno*.

Ma l'analogia ha conseguenze profonde, piú significative. L'universo delle coppie di numeri $F = \{ D, L \}$ e dei *logoi* pitagorici $\mu = [D : L]$ e l'universo geometrico dei quadrati e delle coppie di segmenti $t = \{\delta, \sigma\}$ sono due domini ontici essenzialmente differenti.

Nel dominio geometrico della diagonale:

$$[V, W] = 2\sigma(o),$$

la *grandezza*:

$$[V, T]\ \delta(o),$$

[23] In rem. publ. II 23.

[24] Expositio: 43; cfr. anche Proclo, in rem. publ. ii 23.

è sempre la somma algebrica di due grandezze:

$$\delta(o) = H(d) + \sigma(d) \text{ o } \delta(o) = H(p) - \sigma(p),$$

dove H(d) rappresenta l'abbreviazione simbolica del segmento, $[V, H(d)]$, mentre H(p) rappresenta il segmento orientato nel senso opposto, $[H(p), W]$.

Ogni grandezza H(n) è chiaramente anche la somma di un numero finito di grandezze con la stessa struttura algebrica e linguistica di $t = \{\delta, \sigma\}$:

$$H(d) = \sigma(o) + 2\Sigma\sigma(p),$$

dove $p = 2, 4, 6, ..., d-1$; e:

$$H(p) = \sigma(1) + 2\Sigma\sigma(d),$$

dove $d = 3, 5, 7, ..., p-1$. Il luogo di T è chiaramente situato *fra* H(d) e H(p):

$$H(d) = T - \sigma(d),$$

e

$$H(p) = T + \sigma(p),$$

nell'interiore del quadrato resto $M(n+1)$ da tipo Q, con la diagonale: $\delta(n+1) = \sigma(d) + \sigma(p)$. Il quadrato resto $M(n+1)$ può esser rappresentato come la congiunzione:

$$M(n+1) = h(d)\&h(p),$$

dove h(d), h(p) sono quadrati di tipo duale con la diagonale $\sigma(d)$, $\sigma(p)$ e $d = 2(n+1) + 1$ e $p = 2(n+1)$.

Raggiungere il *telos* T equivale all'asserzione dell'esistenza attuale di:

$$\Omega = \{H(d); H(p)\},$$

Oppure: la *grandezza* di $\delta(n)$ è esprimibile non soltanto come somma di un numero finito: $\delta(o) = H(d) + \sigma(d)$ o $\delta(1) = H(p) + \sigma(p)$, ma anche come somma di un numero infinito numerabile di *grandezze* geometriche:

$$\delta(o) = \sigma(o) + 2\Sigma\sigma(p) \text{ o } \delta(1) = \sigma(1) + \Sigma\sigma(d),$$

con: p = 2, 4, 6, ... e d = 3, 5, 7, ..., dello stesso universo, con lo stesso linguaggio e la stessa struttura: t = $\{\delta, \sigma\}$.

I quadrati duali $Q^*(p)$ e $Q^*(d)$, con p = 2n, d = 2n + 1 e n = 1, 2, 3, ..., convergono simultaneamente verso lo stesso *telos,* T (*fig. 10*).

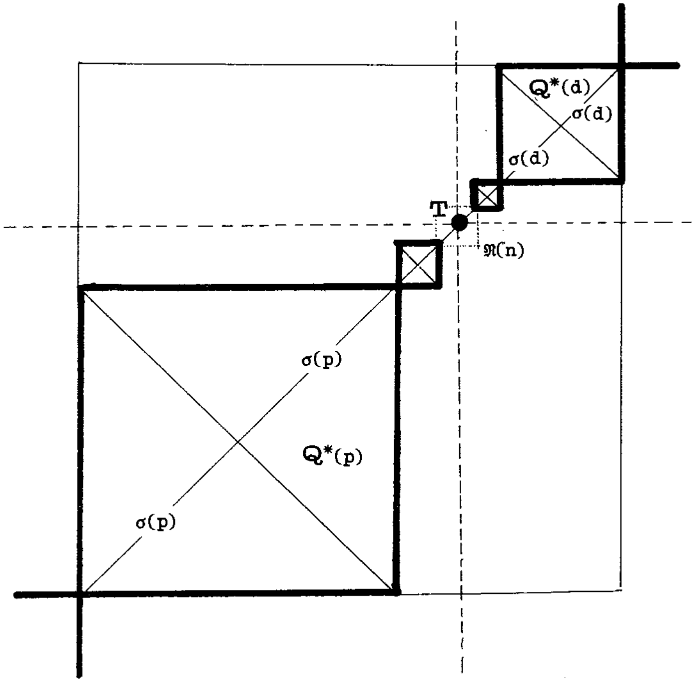

Fig. 10 - Figura frattale quadratica generata dell'antanairesis della diagonale e del lato.

La proprietà algebrica di *essere una somma* è allora estesa da un numero finito ad un numero infinito numerabile di termini. Ma la possibilità o impossibilità di questa estensione transfinita è puramente teorica, speculativa, irrilevante: la grandezza $\delta(n)$ è definibile e costruibile finitamente, come diagonale di un quadrato Q(n), e una definizione parallela infinita è superflua.

Nel dominio aritmetico della successione:

$$M(n) = [D : L],$$

per tutti gli n con $d = 2n+1$ e $p = 2n$, sempre vale la *disuguaglianza standard* stretta:

$$M(d) < M(p).$$

La loro differenza è un *logos* fisso finito, articolabile nello stesso sottolinguaggio $F = \{D, L\}$.

La successione è oscillante, ma oscilla attorno al niente, ad una lacuna ■ dell'universo dei *logoi*, perché *fra* i due insiemi M(d) e M(p) non esiste nessun *logos*, nessuna *misura* pitagorica. Si può anche dire che la successione oscilla attorno all'*Uno* definito dalla omoiotetia:

$$\Omega = \{M(d); M(p)\}$$

– ma questo è superfluo.

L'universo dei logoi pitagorici $\mu = [D : L]$ è punteggiato e aperto. Questa constatazione – il teorema di Archita – non contiene nessuna dimensione drammatica: non c'è niente di piú normale e naturale del fatto che l'ottava non possa essere divisa [25] in due intervalli sinfoni omonimi [26]. Non c'è nessun bisogno di produrre una divisione armonica di questo tipo, ed essa sarà di sicuro ripudiata da tutti i musici. Non c'è nemmeno niente di piú semplice di assegnare ad ogni *logos* pitagorico $\mu(n) = [D : L]$ di numeri un segmento $[V, K(d)]$ o $[K(p), W]$ della diagonale:

$$2\sigma(0) = [2 : 1]$$

del quadrato duale $Q^*(0)$.

La funzione della freccia aristotelica χ è di assegnare ad ogni parola $\mu(n) = [D : L]$ del *dominio* pitagorico del discorso razionale una *grandezza* $[V, K(d)]$ o $[K(p), W]$

[25] Cfr. sectio canonis 3: οὐδεὶϲ μέσοϲ.

[26] Cfr. sectio canonis, introd.: ἐνὶ ὀνομάτοι.

un oggetto del *codominio* geometrico. La *grandezza* di ogni oggetto geometrico, [V, K(d)] e [K(p), W], può allora venir definita come uguale in senso stretto a $\mu(n) = [D : L]$ – la *misura* pitagorica della sua grandezza.

Il sottouniverso $\mu(\nu) = [D : L]$ dell'universo dei *logoi* pitagorici, Λ, diviene allora il *dominio* delle *misure* razionale delle *grandezze* geometriche [V, K(d)] e [K(p), W] commensurabile.

La corrispondenza non è invertibile: nell'universo $\mu = \{D, L\}$ non esiste e non può esistere nessun logos corrispondente al luogo T della diagonale geometrica come la sua immagine. Non esiste nemmeno una freccia zenoniana Φ, – funzione duale o inversa di χ – che parte dall'universo geometrico, come dominio, verso l'universo aritmetico, come codominio.

Ma questa irreversibilità diviene drammatica a causa di una profonda analogia tra i *logoi* $\mu = [D : L]$, come misure delle grandezze [V, K(d)] e [K(p), W], e la grandezza di $\delta(o)$, della diagonale geometrica ineffabile. La consapevolezza di questa drammaticità fa apparire il valore peculiare del passo Epinomis 990D.

Il dramma è ontologico.

I numeri diagonali e laterali e l'esistenza della misura

Poiché $D^2 - 2S^2$ è uguale alla monade aritmetica 1, – e un numero minore della monade non esiste – le *grandezze* geometriche con le *misure* $\mu = [D : L]$ rappresentano la cosiddetta *migliore approssimazione* della diagonale $[V, T] = \delta(o)$.

Per contrassegnare questa particolarità fondamentale gli antichi avevano impiegato un vocabolo piú bello, piú accurato: *vicinanza* in senso topologico: ἐγγύς, ἐγγύτατον (lat. *anguste*; ted. *eng*) – *stretto*, *serrato*: « se non è possibile tagliare in due, si deve dividere adeguatamente senza fine (ἀεί) secondo numeri sempre piú serrati » (o vicini: ἐγγύτατα) propone ancora una volta lo Straniero di Elea

(Pl., Pol. 287C) parlando del processo infinito, orientato verso la determinazione della *giusta misura.*

Ciò significa, che nessun altro *logos* può essere considerato come *misura* parziale della diagonale. La successione [D : L] contiene non soltanto tutti i logoi [D : L] – e soltanto essi – ma anche tutte le *misure* delle parti della diagonale e soltanto esse.

In queste condizioni l'espressione: « [V, K(d)] è una *parte della diagonale* ineffabile » ottiene una significanza che trascende la banalità di essere una parte generica della diagonale $\delta(o)$: le grandezze [V, K(d)] e [K(p), W], le misure o *logoi* μ = [D : L] – e *soltanto esse* – sono *parti* in senso stretto ed essenziale, di una *partecipazione* platonica, una *metexis* alla Idea, alla *Forma* assoluta della *diagonalità.* Forse questo è il senso profondo e nascosto dell'espressione platonica di *diagonale effabile.*

L'analogia tra le strutture algebriche dei due universi – della parola articolabile in un discorso razionale L = {D, L} e delle Forme geometriche ideali t = $\{\delta, \sigma\}$ – è la manifestazione superficiale di una analogia piú profonda di natura *topologica*: essere una *diagonale effabile* significa appartenere all'insieme aperto della totalità di tutte le *parti proprie* del segmento [V, W], le quali *partecipano* anche nel senso platonico alla *proprietà* specifica di $\delta(n)$ – di essere una *diagonale* ineffabile di un quadrato Q(n); tutte le *diagonali effabili*, e soltanto queste, sono pertanto imitazioni imperfette – « approssimazioni », secondo la terminologia dell'Ottocento – della Forma ideale *perfetta* unica ed eterna della *diagonale in sé,* inesprimibile in un discorso finito del linguaggio oggetto delle parole razionali [D : L]. La totalità infinita delle diagonali effabili è un insieme aperto, imperfetto; esse sono telescopicamente inscatolate come parti proprie della diagonale ineffabile, chiusa dal suo limite T – una *grandezza perfetta,* τέλειος μεγέθος (Arist., phys. 207a21), una « unica Idea o Forma di un Intero – un Uno perfetto » (Plat., Parm. 157DE) – *perfetto* anche dal punto di vista topologico.

Tutti i logoi [D : L] sono chiaramente misure *pitagoriche* degli [V, K(d)] e [K(p), W]. Tutti i luoghi H(d), H(p) sono situati *addensati* presso (ἐγγύς; cfr. cfr. Plat., Pol. 287C) il *telos*, la *grandezza* geometrica [V, T] = δ(o), come nell'*intorno* di un *punto di accumulazione*.

Chiaramente la differenza tra i punti razionali K(n) e irrazionali H(n) della diagonale [V, W] converge verso zero.

In queste condizioni la questione – *se una misura* – una *misura giusta*, M(δ), esprimente esattamente la grandezza δ(o) *della diagonale*, [V, T] *esiste o no* – ottiene un senso preciso e può essere articolata con maggiore accuratezza.

Conclusione

L'ontologia eleatica e la tortura dell'essere e del non-essere nel *Parmenide* di Platone

> Zénon d'Élée a démontré que la flèche qui vole est immobile. On pourrait aussi démontrer le contraire, bien qu'à vrai dire ce soit plus malaisé.
>
> Anatole France, *Œuvres* Paris 1927: IX 493

L'argomento del piú vecchio che diventa sempre piú giovane, e che non può venir raggiunto dal piú giovane, è sempre parso ai grandi interpreti di Platone una frivolezza intellettuale, che viene considerata nel *Parmenide* (137B), dallo stesso Parmenide, un *gioco* (cfr. anche Pol. 268D8). Non era stato lo stesso Zenone a motivare (Parm. 128D) la *raison d'être* dei suoi *logoi*, con la scusa della *philonikia* dell'adolescente terribile, quale egli era stato? Chiaramente una *coquetterie* intellettuale.

Ma il gioco era *laborioso* e serio (πραγματειώδη παιδιὰν παίζειν; Parm. 137B). E « anche gli dèi sono amanti del gioco » (Krat. 406C).

Il traguardo cui mirava Platone, come egli ammise piú tardi nel ruolo dello Straniero di Elea, era di sottoporre ad una *commisurata tortura* (μέτρια βασανισθείς) l'assioma del « grande Parmenide »: *il non essere non è* – per costringere la stessa proposizione a confessare che *il non essere è in qualche maniera qualche cosa* (τὸ μὴ ὂν ὥς ἔστι; Soph. 237AB, 241D).

Sostenere l'esistenza del *logos* Ψ non-pitagorico dell'uguaglianza omoiotetica Ω equivale a sostenere il trapasso di un non-essente nell'essere: il dominio onnicomprensivo, in precedenza assegnato, dell'essere viene ampliato, ad esso viene aggiunto qualcosa di nuovo.

Il terzo escluso, la ricorsione transfinita e gli argomenti di Zenone

Il processo di misurazione è per Platone equivalente al sorgere, alla generazione, determinazione, della *giusta misura* (τοῦ μετρίου γένεσις; Polit. 284C) di uno *hen*, mediante il piú ed il meno, difetto ed eccesso (Polit. 284BD, 285B).

Forse in questo senso non-aristotelico va interpretato il vocabolo δύναμις prima di Eudosso – come può essere desunto da alcune allusioni parzialmente critiche di Aristotele (met. 1047b512, 1019b24-35, rhet. 1392a15-18).

Tuttavia la *negazione* della misurabilità, μὴ σύμμετρον (Parm., 140C), dovrebbe venire allora sostituita con *l'affermazione* dell'*esistenza di una misura*, che è un ἀσύμμετρος. In questo modo Platone allude in Polit. 284B a quanto viene sostenuto nel passo 241DE del *Sofista*: « in qualche modo anche il non essere deve disporre dell'essere ». Egli commenta la discussione citata come un *fuggire* (διέφυγειν) del *logos*, dell'esplicazione (cfr. Arist., meteor. 357b22-23) – forse un gioco di parole riguardante l'impossibilità di associare alla *grandezza* δ o a Ω un *logos* pitagorico.

In ogni caso i termini prediletti da Aristotele, *asymmetron*, *adynaton* – l'idea di una certa impossibilità logica – non vengono mai impiegati da Platone con riferimento all'incommensurabilità. Invece tutti i suoi testi contengono riferimenti ai processi infiniti [1].

In questo senso, forse, diventa comprensibile anche uno *hapax legomenon* nella *Metafisica* di Aristotele, in cui egli, in connessione con i *logoi epimori e hypepimori* parla della *indeterminatezza* del processo di misurazione mediante il numero. Infatti l'oggetto da misurare viene sempre su-

[1] Men. 82B, Prot. 357B, Rep. 534D, 546C, 587D, Pol. 266B, 283C-287C, Legg. 818B-820D, Epin. 990CE.

perato da *eccessi* – potremmo dire un *numero non commensurabile* [2] (ὅλως ἀόριστον κατ'ἀριθμόν... κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμόν λέγεται; Arist., met. 1021a2-6). Non senza ragione Ross [3] trova che « the statement is highly paradoxical ». Con alcuni lievi interventi secondo una *lectio facilior* – cambiamento di una lettera ed inserzione nel testo di una particella negativa – egli riesce a eliminare il paradosso e ad ottenere l'ortodossia della trivialità da tutti attesa.

Infatti non è possibile decidere soltanto sulla base della infinità ricorsiva delle successioni di misure pitagoriche $\mu = [D : L]$ se la proprietà di *avere una misura*, assegnata alla successione delle parti razionali [V, K(d)], [(K(p), W] della diagonale [V, W], può essere estesa al *telos* T – preesistente nel transfinito – oppure no?

La domanda è priva di risposta. Ambedue le risposte – la negazione e l'affermazione – sono ugualmente consistenti con le successioni $\mu(d)$, $\mu(p)$ generate per ricorrenza finita da n a $n+1$. L'alternativa *sí o no* è indecidibile. La proposizione del terzo escluso viene contraddetta.

Questo fatto – come viene rilevato da Crisippo [4] – si manifesta già in Democrito con la cubatura del cono, equivalente alla *dicotomia* [5].

Se la verità dell'assioma del terzo escluso è assolutamente valida, allora si è costretti a decidere, sciogliendo l'alternativa. La risposta « *sí* » implica quanto segue: se la proprietà di avere una *misura*, spetta alla successione $\mu(n) = [D : L]$, allora la medesima proprietà viene associata al *telos* T. Questo fatto implica necessariamente che la ricorrenza transfinita venga sostenuta come valida: se la

[2] Un passo parallelo piú ampio ma non meno oscuro si trova in de sensu 439b27-32; cfr. anche top. 158b29-33. – Il neopitagorico Lysis parla di dio – attribuendo l'espressione a Pitagora – come di un *numero ineffabile* (ἀριθμός ἄρρητος ὁ θεός); DIELS-KRANZ, *Fragmente der Vorsokratiker*, Dublin-Zürich 1972: I 421.

[3] *Op. cit.*: I 329.

[4] PLUTARCO, *De comm. not.* 39, in: *Moralia* 1079F, ed. Bernardakis, Leipzig 1888; cfr. anche R. SEIDE, *Die mathematischen Stellen bei Plutarch. Dissertation*, Regensburg 1981: 43-55.

[5] I. TOTH, *op. cit.*: 90-93.

proprietà della *misura* e della *somma* spetta al numero transfinito ω, vale a dire alla ω-successione $\mu(n)$, allora essa spetta anche al suo immediato successore $\omega+1$. Vale a dire: *quello che si sta* muovendo arriva al *telos* T.

Avere una *misura* è una proprietà di una *grandezza* rispetto ad un'altra *grandezza* assunta come *unità di misura.* Ma la diagonale δ è certamente una grandezza ben determinata, e può essere rappresentata come l'insieme della totalità delle sue parti – le diagonali effabili.

$$\delta(o) = \{\mu(d); \mu(p)\}.$$

Se si ammette che la diagonale abbia una misura, $M(\delta)$, questa misura può venire rappresentata come un processo di addizione numerabile, ma non finito, di misure pitagoriche. La proprietà di *avere una misura* viene cosí estesa transfinitamente dall'universo numerabile delle diagonali effabili alla diagonale ineffabile.

La proprietà di *additività finita* delle misure deve essere estesa alla proprietà di additività *numerabile* – finitamente o infinitamente. È anche chiaro che in questo caso l'uguaglianza della grandezza della diagonale con la sua misura può essere soltanto una uguaglianza omoiotetica non-standard:

$$\Omega = \{M(d); M(p)\},$$

dove Ω, come un *Uno* unico ed indivisibile, definisce la misura della diagonale, $M(\delta)$.

Questo fatto era già noto al combattivo autore del *de lineis insecabilibus*: un simile movimento del pensiero (διανοίας κίνησις) non è una numerazione naturale mediante consecuzione finita, e essa è, *forse*, una *impossibilità* (ἴσως ἀδύνατον; 969a31-b3).

Raggiungere il *telos* o associare una *misura* alla diagonale, significa contraddire l'assioma-8 degli *Elementi.* Poiché i segmenti razionali [V, K(d)], o [K(p), W] sono tutte *parti* proprie dell'intero (la diagonale chiusa nell'estremo T), dall'assioma-8 segue che la misura della diagonale chiusa da T deve essere *maggiore* della misura della diagonale aperta in T:

$$M[V,T]>M[V,T[,$$

ed allora si dovrebbe trovare una differenza finita. Ma si può provare che questo fatto è falso.

Se si accetta la verità dell'assioma-8 assieme alla verità del terzo escluso, da questo fatto segue che l'esistenza di un *Uno* attualmente infinito deve venire respinta, e che si deve sostenere la verità di non-RT – la negazione della ricorsione transfinita.

Da questo fatto segue necessariamente come teorema la verità della conclusione di Zenone: tra la diagonale del quadrato e la totalità delle sue parti effabili non può aver luogo alcuna relazione Ω di uguaglianza omoiotetica.

L'esistenza della relazione di *uguaglianza standard* tra la grandezza dell'intervallo semiaperto:

$$[V,T[,$$

e l'intervallo chiuso:

$$[V,T],$$

deve venir negata in base all'assioma-8: il segmento semiaperto – contenente la catena senza fine delle parti effabili della diagonale – è parte propria del segmento chiuso, la diagonale ineffabile. L'assioma del terzo escluso è valido per le relazioni di uguaglianza standard.

Da ciò segue che la *negazione dell'uguaglianza* deve implicare la *affermazione della disuguaglianza* (Plat., Parm. 169C). Anche questo fatto era noto all'autore del *de lineis insecabilibus* (971a11-16, 972a13-18).

Però se alla diagonale chiusa, all'intero, spetta una misura, allora questa non può stare in relazione di *disuguaglianza standard* con la misura della diagonale semiaperta – vale a dire: non è possibile attribuire alla diagonale una misura né esprimibile né inesprimibile con un *logos*.

Si può dimostrare la negazione della commensurabilità della diagonale con il lato senza affermare o negare la proposizione della ricorsione tranfisinita. Se si sostiene la verità dell'assioma-8 e dell'assioma del terzo escluso, e la falsità dell'assioma dell'induzione transfinita, da ciò segue necessariamente che la diagonale chiusa:

$$\delta = [V, T],$$

possiede una grandezza, però incommensurabile, ma ciò nonostante, non può avere alcuna misura.

Senza accettare l'infinito in atto e il passaggio transfinito a $\omega+1$ di una proprietà assegnata a ω non è possibile dimostrare l'arrivo del movimento delle misure parziali al *telos*; l'insieme delle diagonali effabili e delle misure rimane aperto, l'insieme delle misure pitagoriche non è perfetto, non è chiuso con un limite pitagorico.

La soluzione offerta da Eudosso fu semplicissima e geniale. Il suo assioma definisce il concetto di misura *assoluta* delle grandezze – come ha fatto Bolyai con il concetto di parallelismo di rette. Esso non ha bisogno di nessuna distinzione tra commensurabilità ed incommensurabilità.

Il termine primitivo di Eudosso è la *disuguaglianza standard*. La *disuguaglianza* e la sua *negazione* soddisfano il terzo escluso. La negazione della disuguaglianza è equivalente all'uguaglianza standard soltanto se gli oggetti della relazione sono *finiti*.

Il *cosiddetto Achille* riguarda direttamente la domanda se si può assegnare l'essere al non essere, o no: se si può affermare che al di là di tutti i numeri $N = 1, 2, 3, \dots$ e i *logoi* $\mu(n) = [D : L]$ esiste una cosa – uno *hen*, Ω – definito dalla successione-ω – oppure no.

Se esiste, allora il suo luogo si trova là dove Achille raggiunge Ettore, dove si verifica l'*uguaglianza* dell'età del giovane che diventa sempre piú vecchio con quella del vecchio che diventa sempre piú giovane: il *logos* $\Psi = [2^* : 1]$, verso il quale convergono i *logoi* $[D : L]$, il quale è uguale alla *giusta misura* $M(\delta)$ della diagonale. La funzione χ diviene invertibile:

$$\Phi = \chi^{-1}.$$

L'universo delle misure imperfette ma pronunciabili con parole finite di *logoi* diviene *perfetto*, chiuso con il *logos* $\Psi = [2^* : 1]$, ineffabile in un discorso finito di parole, definito con la relazione omoiotetica dei due sotto-insiemi semiaperti $\mu(d)$ e $\mu(p)$ dell'universo $\mu(n) = [D : L]$.

L'alternativa dell'*essere o del non essere* di Ω, dell'*Uno*, è indecidibile. Si può sostenere che la congiunzione di entrambe le negazioni: l'*Uno*, Ω, « né è né non è » (οὔτε ἔστι - οὔτε οὐκ ἔστι; Plat., Parm. 157A). È violato il *terzo escluso*. Si può sostenere che non sussistono né l'uguaglianza, né la disuguaglianza omoiotetica (οὔτε ὅμοια οὔτε ἀνόμοια; Parm. 164A).

Probabilmente uno degli aspetti piú significativi dell'interpretazione di Platone è l'aver dato indicazioni sul superamento del *terzo escluso* nel processo della misura infinita: οὔτε ἴσον οὔτε ἄνισον (Parm., 140BD, 149CE). Se si afferma l'esistenza dello *hen* Ω, del *logos* Ψ, ciò significa non soltanto accettare la ricorsione transfinita, ma oltre a ciò anche la forza, *dynamis*, capacità della generazione dell'essere dal non-essere, della trasformazione di Ω, dell'*Uno* non-essente in un Ω, un *Uno* essente. Questo *hen* Ω, *misura* $M(\bar{\delta})$, o *logos* Ψ, designa, nel dominio ontico dell'acronico essere e del diacronico divenire, il *luogo* dello ἐξαίφνηϲ (Parm. 156D3), dell'*Istantaneo*, il luogo dove il non essere si capovolge nell'essere – la lacuna, ■, che separa i due sottoinsiemi ζ e ζ^* nella *sezione di Dedekind* viene improvvisamente riempita con l'essere un logos non-pitagorico:

$$\Psi = [2^* : 1].$$

« I pitagorici sostenevano l'esistenza del vuoto; il mondo lo respira dall'infinito *pneuma*; ed il vuoto è il principio separatore delle differenze di determinazione nel dominio dei numeri » (Arist., phys. 213b22-29). Forse questo è anche il senso del titolo περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν dell'opera perduta di Democrito: « sulle linee irrazionali e la compattezza » – (il vocabolo ναστόϲ significa compattezza: *senza lacune*).

Ciò che in questo modo sorge è l'*Uno allo stesso tempo molto e infinito* (ἓν ὡϲ πολλά ἐστι ἄπειρα) – un processo in cui l'*infinito* viene concepito *come un Uno* (ἀπείρου... εἰς ἕν) oggetto attuale, un processo dove gli *opposti cessano la loro inimicizia* e *mediante l'introduzione di un numero, una misura e armonia* (σύμμετρα καὶ σύμφωνα) – mediante l'*Aufhebung* dell'ἄπειρον, dell'infinito illimitato – *mediante la sua mescolanza con il limitato, si produce la musica perfetta* (μουσικὴν... τελειώτατα) *ciò che può sia misurare, sia essere misurato* (ἔμμετρον καὶ ἅμα σύμμετρον). *È una generazione all'essere della misura connessa con la limitazione* (γένεσις εἰς οὐσίαν... τοῦ πέρατος μέτρων). Platone descrive nel *Filebo* questo processo come *meraviglioso secondo la sua natura* (πεφυκότα ταυμαστόν; Fileb. 14C1, 25B-26D) – e Georg Cantor (1883) si riferisce a questo passo [6] nel quale egli ravvisa una notevole somiglianza con le sue idee – mentre in *Epinom.* 990D l'autore accenna alla generazione di una relazione di *similitudine* (ὁμοίωσις) *tra numeri che secondo la loro natura non sono simili* (οὐκ... ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν) – secondo l'esempio della geometria piana: $2 = 1.2 = 2^*.2^*$ – e parla di essi come di un *prodigio – ceratmente divino – che oltrepassa ciò che è umano* (θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον).

Dietro all'argomento di Zenone sta l'alternativa, indecisa ed indecidibile, delle due proposizioni assiomatiche, RT e non-RT.

Inaftti da entrambe derivano conseguenze o triviali o paradossali, a seconda del modello scelto per la rappresentazione. Sussiste pertanto l'obbligo dell'esercizio, della *ginnastica dialettica*, di esaminare tutte le conseguenze che derivano tanto dall'assunzione dell'essere quanto dall'assunzione del non essere (cfr. Parm. 135E-136A).

« Zenone paralogizza » – scrive Aristotele (phys. 239b5). Ma chi paralogizza: Zenone, che rifiuta l'infinito in atto, accettandone le conseguenze – oppure Aristotele, che pure rifiuta l'infinito attuale ma accetta come verità necessarie le conseguenze dell'assunzione opposta?

[6] *Op. cit.*: 204.

Etica e politica - Teoria e pratica della misura

Questo processo non riguarda in questo senso soltanto la geometria, ma anche l'esistenza della *giusta misura*, τὸ μέτριον, nel campo *del bene e del male* (κακοὶ καὶ ἀγαθοί), riguardo la teoria e l'azione risp. la scienza politica, πολιτικὴ τέχνη, risp. ἐπιστήμη. La *teoria della misura*, la μετρητική [7], come viene indicato nel campo del *bene e del male* l'agire etico-politico, il compimento del *buono e bello* (ἀγαθὰ καὶ καλά), è parimenti quella che descrive nel campo delle grandezze geomteriche il *sorgere o genesis* della *giusta misura* (τοῦ μετρίον γένεσιc), come un processo infinito di eccessi e difetti che si alternano nell'*antanairesis*. Essa è l'*azione buona* – anche lo *stato di buona salute* (τὸ εὖ πράττειν), con un bel gioco di parole – la *salvezza* (σωτερία, σώζειν; cfr. Pol. 259AC, 283C-285C; Prot. 356C-357C; Legg. 817C-820C).

Forse gli uditori delle sue lezioni *Sul bene* potevano apprendere di piú su questa connessione etico-politica della teoria della misura delle grandezze geometriche [8].

Enriques e la leggenda di Zenone

L'alternativa *essere o non essere* per il *logos* dell'uguaglianza è indecidibile per mezzo di una inferenza logica.

Ma la *crisi* del Parmenide (Frg. 8) richiede una *decisione*. L'atto della decisione, κρίσιc, può venire eseguito solo al di là del dominio della logica, in un *iperuranio* che può cogliere in sé il medesimo e l'opposto come risultato di una decisione.

La sostanza con cui è riempito questo luogo secondo la sua essenza, è la *libertà*, sinonimo del *soggetto* in quanto

[7] Filodemo parla di μετρολογία; cfr. FILODEMO, *Storia dei filosofi. Platone e l'Academia* (Pherc. 1021 e 164), ed. trad. e commento T. Dorandi, Napoli 1991: 31, 126.

[8] Cfr. K. GAISER, *Platons ungeschriebene Lehre*, Stuttgart 1968: 73-88, 352-354.

portatore e agente della libertà: è la prerogativa del soggetto libero di decidere l'alternativa logicamente indecidibile, e sta ad esso, solo alla sua libertà, di scegliere l'eterodossia contraddicente alla ortodossia stabilita, di attribuirle il valore logico della verità.

Gli argomenti di Zenone sono il risultato della consapevolezza di questa libertà. I suoi teoremi sono la sua manifestazione, i suoi *logoi* il suo manifesto.

La tradizione sostiene [9] che Zenone – « spirito nobile in filosofia ed in politica » – avrebbe organizzato una cospirazione per mandar via il tiranno: il piú forte e veloce, il cui nome non è noto, lo avrebbe però catturato, torturato e ucciso. « Sa fin fut héroïque » – scrive Enriques, che si sofferma alquanto sull'argomento [10].

La tradizione non può venire accertata. La sua verità storica sta nel simbolo. Alla sarcastica domanda del tiranno « voyons ce que t'apprendra la philosophie », Zenone, secondo Enriques, avrebbe risposto: « à mépriser les tyrans ».

Enriques non dà la sua fonte: Essa è però nota: l'*Apologetico* di Tertulliano [11]. Però presso Tertulliano la risposta di Zenone è: *contemptum mortis.*

Una svista? Piuttosto una sostituzione consapevole. Nell'anno 1936 non vi era incertezza su come si chiamassero *les tyrans,* Enriques ha considerato un compito della filosofia di imparare a intendere i loro nomi come sinonimo di *mors,* e disprezzarli.

[9] DIOGENE LAERTIO, *De vitis, dogmatibus et apophtegmatibus clarorum philosophorum libri x,* Amstelodami 1692: ix 26.

[10] In ENRIQUES-DE SANTILLANA, *Pythagoriciens et Éléates,* Paris 1936: 47.

[11] *Opera,* Lipsiæ 1853: I 300.

Indice

Finito di stampare nel mese di luglio 1994
presso Tip. Art. Aldo Palombi
per conto della OTET s.r.l., via degli Aurunci, 35 - Roma

1. Renato Laurenti, *Introduzione alla Politica di Aristotele.*
2. Manfred Buhr, *Ragione e rivoluzione nella filosofia classica tedesca.*
3. Arbogast Schmitt, *Autocoscienza moderna e interpretazione dell'antichità.*
4. Ernesto Grassi, *Il dramma della metafora. Euripide, Eschilo, Sofocle, Ovidio.*
5. Giovannni Mastroianni, *Pensatori russi del Novecento.*
6. AA.VV., *L'esperienza e l'uomo nel pensiero di Franco Lombardi.*
7. Imre Toth, *I paradossi di Zenone nel Parmenide di Platone.*

Lire 24 000

ISBN 88-85391-19-2