

# L'evoluzione della concezione strutturale degli archi in conci di pietra nell'età della meccanica e dell'ingegneria

---

Alberto CECCHI

---

## RIASSUNTO

*Nel XVII secolo si sviluppa con Galileo e Newton, per citare solo i grandissimi, una nuova scienza, la Meccanica Razionale. Da questo tempo la costruzione degli archi in conci di pietra, dopo quasi duemila anni di pratica, sarà propria solo di chi conosce la Statica, parte della Meccanica. Questo lavoro prende in esame quegli autori che ad iniziare da Varignon si sono occupati di questi argomenti. Il periodo termina con l'introduzione dei nuovi materiali elastici a partire dalla seconda metà del XIX secolo.*

## ABSTRACT

*In the seventeenth century a new science was developing, the Rational Mechanics, with Galileo and Newton, to name only the greatest. Then the construction of stone voussoir arches, after almost two thousand years of practicing, will belong only to those familiar with the Statics, part of Mechanics. This paper examines those authors, who have dealt with these arguments which concludes the season of stone arches, when in the second half of the nineteenth century industry supplied largely new elastic materials.*

## INTRODUZIONE

Galileo Galilei (1564,1642) scrive nel testo "Il Saggiatore," 1622, Cap. VI il suo pensiero sul significato della scienza, in polemica con la filosofia del gesuita di osservanza tolemaica Grassi, basata sui testi aristotelici. Secondo Galileo il fondamento della scienza è nell'esperienza e «*la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto*».

Alcuni decenni dopo, nel 1687, Isaac Newton (1642,1727) pubblica il suo testo fondamentale *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Afferma: "*Veteres mechanicam vero duplicem constituerunt :praticam et rationalem quae per demonstrationes accurate procedit*". Enunzia quindi i tre postulati della Meccanica razionale ed in particolare il secondo che richiede il parallelismo dei vettori forza e accelerazione: "*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae*

*et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur*". Nel corollario successivo egli associa il galileiano principio: "*corpus viribus coniunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis*." Indipendentemente da Leibnitz pone le basi del calcolo differenziale ed integrale strumento matematico indispensabile per la Meccanica.

Questa breve introduzione alla nuova filosofia della scienza in divenire nel XVII secolo (di cui abbiamo citato solo i filosofi più grandi) ci spiega il motivo per il quale la capacità di progettare l'arco in conci di pietra migra dalle figure che ne detenevano la conoscenza, che si erano succedute nei secoli, il pontifex romano, l'architetto medioevale, l'artista del rinascimento, all'uomo di scienza che conosceva le leggi della statica e che lentamente si trasformò nell'ingegnere moderno: alla fine del XVIII secolo nell'Europa continentale il modello fu la figura professionale istruita all'Ecole polytechnique e all'Ecole de ponts e chaussées.

Da lì a poco l'ingegnere avrebbe avviato un processo di trasformazione che avrebbe cambiato radicalmente la progettazione e la costruzione degli archi e dei ponti con le nuove tecniche ed i nuovi materiali resi disponibili dall'industria nella seconda metà del XIX secolo.

Il periodo oggetto del nostro lavoro è preceduto dal Rinascimento.

Ricordiamo che proprio Firenze aveva avviato ricerche sulla forma degli archi: ricordiamo le innovazioni del XIV secolo del Ponte Vecchio di Taddeo Gaddi, l'artista di Orsanmichele che traccia il primo arco circolare fortemente ribassato, rapporto 1:6, che consente un rapido flusso della corrente senza alzare eccessivamente la strada, ed il Ponte Santa Trinita del XVI secolo ancora più ribassato, il primo arco non circolare di sezione conica o forse a forma di catenaria. Così è stato proposto da Gizdulich, l'architetto, direttore dei lavori preposto alla ricostruzione del ponte dopo la Seconda Guerra Mondiale alla cui costruzione potrebbe avere collaborato accanto ad Ammanati, Michelangelo.



Fig.1 - Ponte Vecchio a Firenze



Fig.2 - Ponte Santa Trinità (Rilievo del XVIII secolo)

## LA CURVA DELLE PRESSIONI

La costruzione del poligono o curva delle pressioni è nozione centrale, come vedremo, nella progettazione dell'arco in conci di pietra, e più in generale negli archi. Esso è dunque il poligono funicolare delle forze applicate all'arco comprese le reazioni vincolari

Si comprende la sua importanza quando si riflette sul fatto che ciascun lato del poligono rappresenta la risultante delle forze che precedono o seguono la sezione.

Derivammo l'equazione vettoriale [CEC10] della curva funicolare di un sistema di forze piane applicate ad una curva piana chiamata arco

che connette due punti A e B, chiamati i vincoli. L'arco è sollecitato dalle forze  $f_i$ , applicate nei punti  $P_i$  e le reazioni  $f_A$  and  $f_B$ . I vincoli A e B sono tali da assicurare la rigidità del sistema e l'unica determinazione delle reazioni. Il poligono delle pressioni di un dato arco è unico.

Se consideriamo il punto C del lato  $C_i - C_{i-1}$  del poligono e il sistema di forze  $f_1, \dots, f_B$ , la cui risultante è il vettore  $(C_i - C_{i-1})$ , fig.1, è chiaro che:

$$\sum_B^i (P_k - C) \times f_k = 0 \quad (1)$$

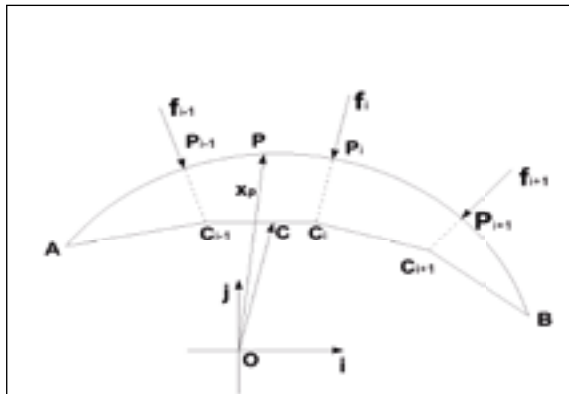


Fig.1 - Arco P, poligono funicolare delle pressioni C

cioè il momento risultante delle forze applicate da B a i rispetto al punto C del poligono funicolare è zero. Se f e m sono la risultante ed il momento risultante rispetto ad O delle forze applicate da B a i sull'asse dell'arco da (1) l'equazione vettoriale che definisce la curva delle pressioni è:

$$(C - O) \times f = m \quad (2)$$

Nel caso continuo l'equilibrio di un elemento di arco tra i punti P and P + dP, Fig.2, è descritto dalle equazioni [LEV23]:

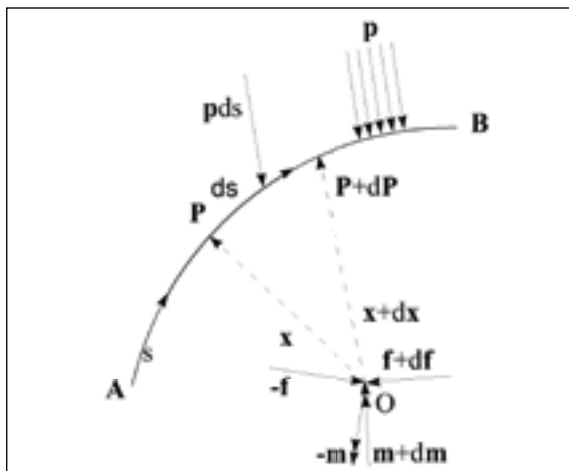


Fig.2 - Equilibrio di un elemento di arco

$$df + p ds = 0 \quad dm + (P - O) \times p ds = 0 \quad (3)$$

Consideriamo i punti  $P$  e  $P+dP$  sull'arco e i punti corrispondenti sulla curva delle pressioni  $C$  and  $C+dC$ .

Differenziando (2) e utilizzando (3), si ottiene

$$dC \times f = 0 \quad (4)$$

Quindi i vettori  $dC$  and  $f$  sono paralleli.

Si ottiene nel riferimento cartesiano  $O, i, j$  (Fig. 1), l'equazione:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_y}{f_x} \quad (5)$$

Differenziando (5):

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{f_y}{f_x} \right) = \frac{-f_x p_y + f_y p_x}{f_x^2} \quad (6)$$

Se  $p_x=0$  e  $p_y=p_y(x)$ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{p_y}{H} = 0 \quad (7)$$

dove

$$f_x = H \quad (8)$$

è la spinta dell'arco costante.

(7) è la ben nota curva funicolare di un carico verticale disteso su l'asse x dimostrata da Hutton nel 1772 e successivamente da Navier nel 1823 [NAV23].

Prendiamo ora in considerazione alcuni autori che hanno introdotto procedimenti innovativi nella statica dell'arco in conci di pietra.

### 1.M. Varignon *Nouvelle Mécanique ou Statique* [VAR87]

La costruzione del poligono funicolare compare nel trattato di meccanica del 1687 di Varignon appunto come configurazione di equilibrio di una fune priva di peso sottoposta ad un sistema piano di forze. La figura 1 è tratta dall'originale di Varignon e rappresenta la fune in equilibrio, il poligono delle forze  $E, F, G, H, R$ , il polo  $S$ , le proiettanti parallele alla direzione delle forze, e di lunghezza proporzionale alla loro intensità.

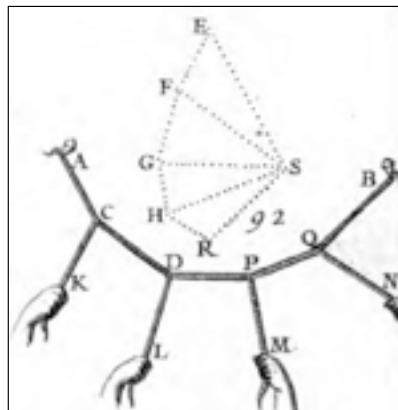


Fig. 1- La figura da Varignon rappresenta il poligono funicolare

### 2. P. de La Hire, *Sur la Construction Des Voûtes dans les Edifices* [LAH95], [LAH12]

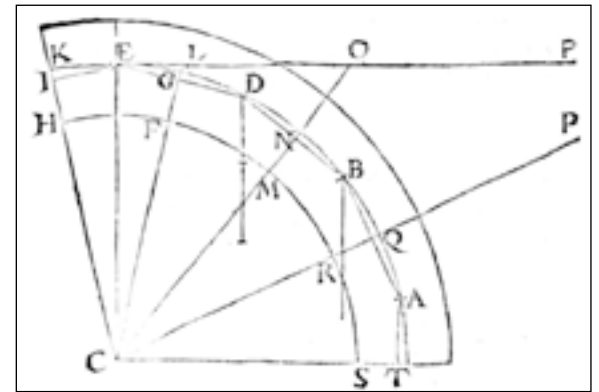


Fig. 1 - Equilibrio di un arco in conci secondo La Hire

La Hire è il primo autore ad applicare allo studio degli archi i nuovi procedimenti della statica.

Le ipotesi di La Hire sono le seguenti:

- Arco circolare
- Conci della stessa dimensione
- A, B, D, E rappresentano i baricentri dei conci
- Attrito nullo tra i conci, vincoli lisci

Considerando il concio KLE (Fig. 1), se il vincolo è liscio, le reazioni ortogonali al vincolo hanno la direzione EG ed EI. La forza peso equilibrante è naturalmente verticale: risulta quindi dalla similitudine del triangolo delle forze e del triangolo KCL, la lunghezza KL è proporzionale al peso. Passando al secondo concio, la reazione GD equilibra la GE. Dal triangolo di equilibrio delle forze GE, ND e peso si ha che esso deve essere proporzionale al segmento LO. Proseguendo, per il terzo concio la forza peso è proporzionale ad OP, mentre l'ultima forza è infinita. Secondo Timoshenko [TIM53] la spezzata IGNQT rappresenta un poligono funicolare utilizzato per la prima volta nello studio dell'arco e la linea KLOP rappresenta il poligono delle forze, seppur ruotato di 90°.

### 3. H. Gautier, *Traité des ponts* [GAU28]

Gautier è autore del primo trattato moderno di ponti. Egli è un teorico, ma anche il funzionario costruttore di ponti e strade del re di Francia, ed è amico del matematico La Hire: le sue opinioni sono pertanto particolarmente importanti.

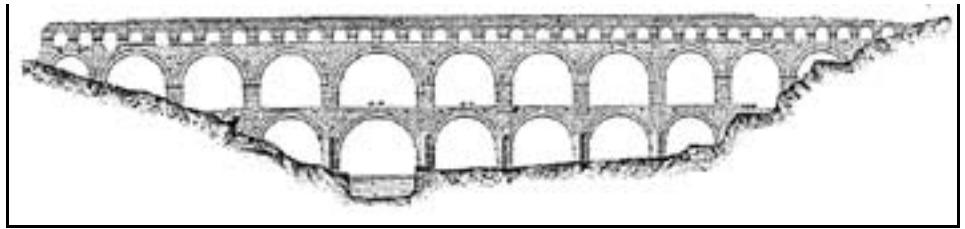
Riprendiamo qui alcune sue considerazioni sulla forma dei ponti.

A proposito delle forme dei ponti romani, da lui ancora considerati come modelli cui ispirarsi, e delle successive forme gotiche e rinascimentali, egli afferma:



**Fig. 1** - Frontespizio di Gautier. La Figura vuole rimarcare le differenze tra l'arco romano circolare, l'arco gotico e l'arco "nuovo" di forma ellittica: la bilancia il maggior peso dell'arco circolare rispetto a quello gotico

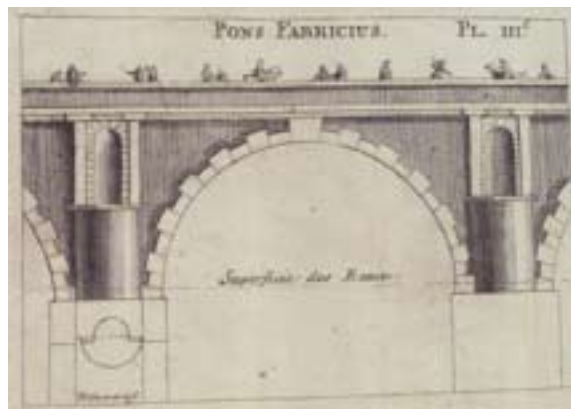
*Nous ne voyons pas que les Anciens ayant fait beaucoup de Ponts où les Arches soient fort surbaissées. Lorsque les Arches dans un même Pont ont été plus grandes les unes que les autres, leurs clefs cependant d'une même hauteur, ils ne les ont ainsi mises de niveau qu'en établissant la naissance de plus grandes Arches dans les piles au dessous de celles des plus petits a proposition de leur grandeur. Ils ont fait ainsi les Ponts toujours en plein centre, & plutot que de les surbaissier par des ellipses, ils ont mieux aimé se servir d'une portion d'un plus grand Arc, comme j'ai remarqué au Pont de Gard. (Figura 2)*



**Fig. 2** - Il Pont du Gard - Illustrazione da Albenga

*Le Goths, qui ont succédé au bon goût de l'Architecture Romaine, on fait de Ponts en plusieurs endroits de la France, avec des Arches Gothiques, c'est-à-dire, a tiers point. Prétendant par-là faire moins de poussée, soit dans les bâtiments publics, comme dans les Ponts que nous voyons en plusieurs endroits, soit dans les particuliers, de même que dans les Eglises que nous voyons bâtir de leur temps. Les Arches Gothiques élèvent trop la voie dans les Ponts.*

*Les modernes, au contraire, par un changement & une nouveauté ordinaire à tous les siècles, ont fait des Arches en ellipse, afin de diminuer la rampe de Ponts, & en faciliter la montée aux voitures: Viendra enfin quelqu'autre temps où l'on verra encore du changement dans les choses; auxquelles on sera prendre quelqu'autre figure particulière qui sera à la mode des hommes de ce temps & que leur plaira.*



**Fig. 3** - La Figura tratta da Gautier mostra un esempio di arco romano circolare: il Pons Fabricius a Roma

*On commence d'ammirer les arceaux surbaissés, encore davantage les plates-bandes; enfin tout ce qui est le plus composé où l'on force davantage la nature, où il y a le plus de travail, & où l'art s'en prend le plus, c'est ce qui est aujourd'hui le plus à la mode.*

*De ces trois manier d'Arches, on peut dire que celle qui est à tiers point, ou Gothique, est capable de porter un plus grand fardeau que celle qui est à plein centre; & celle-ci beaucoup plus que la surbaissée, ou celle qui est en ellipse; la première est la plus élevée, la seconde l'est moins, & la dernière est la plus rampante & la plus*

*basse. Les unes & les autres augmentent leurs poussées a proportions de leurs dispositions; & par conséquent on les emploie différemment, par rapport à leurs usages."*

**4. M.Frezier, *Théorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et de Bois pour la Construction des Voûtes* [FRE38]**

Frezier è autore di un trattato sul taglio delle pietre da utilizzare nella costruzione degli archi (Figura 1 – Tom 2, Livr. 4, p. 89 - seguenti).

In particolare nella figura 1 Frezier ci mostra il modo di tracciare una volta a tutto sesto con spessore variabile, un arco ellittico, un arco a sesto acuto, una cicloide, un arco zoppo ottenuto con spirale logaritmica, un arco simmetrico ottenuto con due tratti di parabola.

Ci fa inoltre vedere le configurazioni di equilibrio di una fune pesante, la cui equazione detta catenaria, fu determinata indipendentemente da Leibnitz, Huyghens, Bernoulli, nel anno 1691, rappresentata dalla catena ABG, e dalla simmetrica compressa ABS; ci dimostra come l'arco gotico sia quello più vicino alla catenaria e come tale curva esca dai suoi conci solo nella parte superiore nella quale Frezier ci rappresenta due coppie di lesioni tra i conci rappresentate da p e q. A tale proposito si noti che Frezier aveva compiuto delle esperienze sugli archi e pertanto la sua opinione era particolarmente importante.

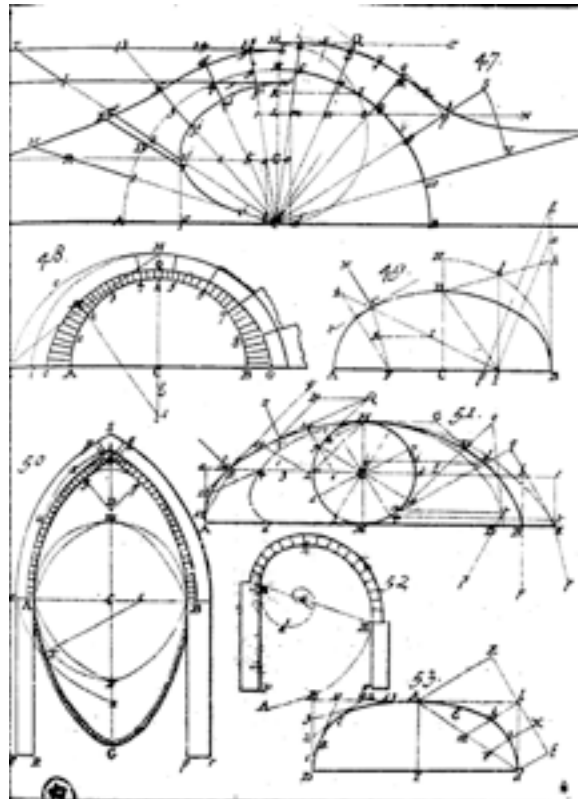


Fig. 1 – Tracciamento degli archi secondo Frezier

**5. G. Poleni, *Memorie Istoriche Della Gran Cupola del Tempio Vaticano*, [POL48]**

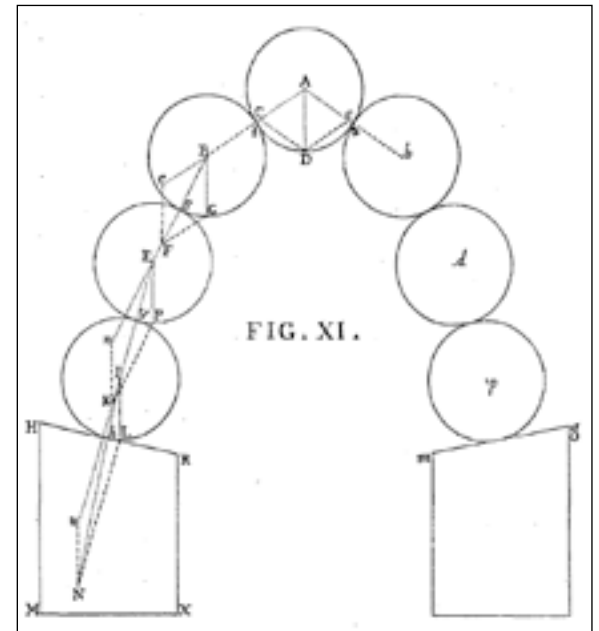


Fig. 1 – Le sfere in equilibrio senza attrito di Sterling

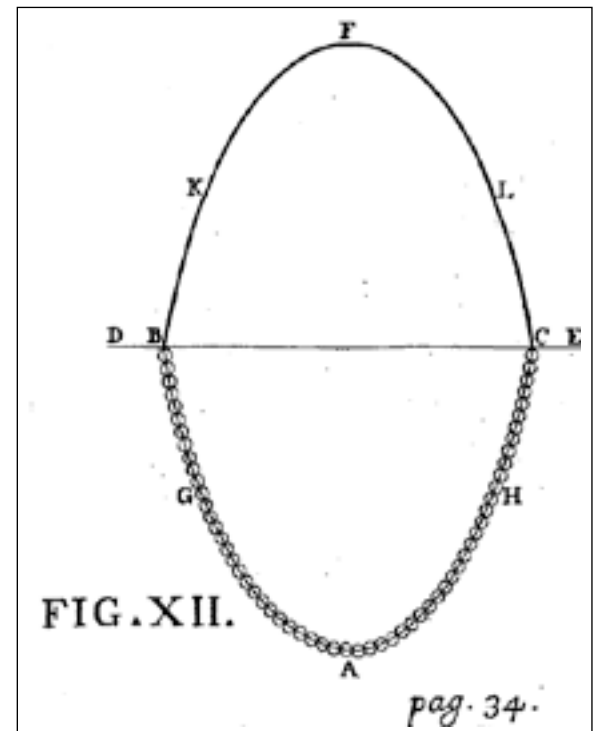


Fig. 2 – La catenaria a la catenaria inversa ottenuta da Poleni con una catena di anelli molto piccoli

Il matematico Poleni, professore nell'Università di Padova, dedica la sua memoria a Papa Benedetto XIV: essa ha come oggetto l'indagine sulle numerose lesioni che si erano manifestate sulla cupola progettata da Michelangelo, i cui lavori furono diretti da Della Porta (1588-1590).

Il Poleni inizia la sua dissertazione con la storia della cupola. Passa poi a considerare gli autori

che hanno trattato gli archi e le cupole. Egli dimostra conoscenze scientifiche appropriate e cita Gabriel Philippe de la Hire ed il suo contemporaneo Pietro Couplet.

Ricorda infine la curva catenaria ed in particolare gli scritti del 1691 di Guglielmo Leibnitz e Giacomo Bernoulli, i matematici che l'avevano dimostrata. Richiama David Gregory, 1697, il quale, secondo Poleni, è il primo a sostenere che le catenarie ci danno le curve degli archi più "sussistenti": *"Qualis tamen sit fornicis figura legitima, ad usque editas nostras demonstrationes ignoratam est."*

Cita poi Jacopo Stirling (1717 Oxoniae, secondo Poleni) e riporta nel suo testo la dimostrazione delle sfere, prive di attrito: *"come provano le parti di un arco, benché da niuna immaginabile frizione trattenuta, nonostante sussistono perfettamente"* data dallo stesso Stirling.

A partire dalla sfera di centro A (Fig. 1) il suo peso col triangolo delle forze viene diviso tra le sfere B e b. La reazione CB componendosi con il peso BG dà luogo alla risultante BS equilibrata dalla reazione FS della sfera di centro E. Così fino alla spalla dell'arco HR.

Poleni osserva acutamente che gli angoli  $\hat{C}AD > \hat{S}BG > \hat{V}EP$  ..... sono in sequenza e che pertanto *"quando sminuimento ben si considera, la considerazione ci conduce a rintracciare l'origine dei gotici archi"*. Prosegue affermando: *"già si è dimostrato che tali figure esser debbono curve catenarie. Le quali curve in pratica si possono esattamente delineare con un materiale strumento agilissimo ad adoperarsi; cioè con catenelle affatto flessibili..... Fu la giustezza di tali meccaniche costruzioni conosciuta dal valentissimo Leibnitzio: Si linea Catenaria phisice construat ope fili, vel catenae pendentis, eius ope exhiberi possunt quotcumque mediae proportionales, logarithmi inveniri datorum numerorum vel numeri datorum logarithmorum."*

Non vi è alcun dubbio che se le sfere di Stirling fossero infinitesime la curva ottenuta sarebbe una catenaria perfetta come Poleni mostra nel disegno contenuto nella stessa tavola.

Il disegno di Fig. 2 mostra altresì come siano possibili due situazioni di equilibrio perfettamente speculari, la catenaria e l'inversa.

Poleni dimostra infine come sia possibile tracciare una catenaria all'interno della sezione verticale della cupola (Fig. 3).

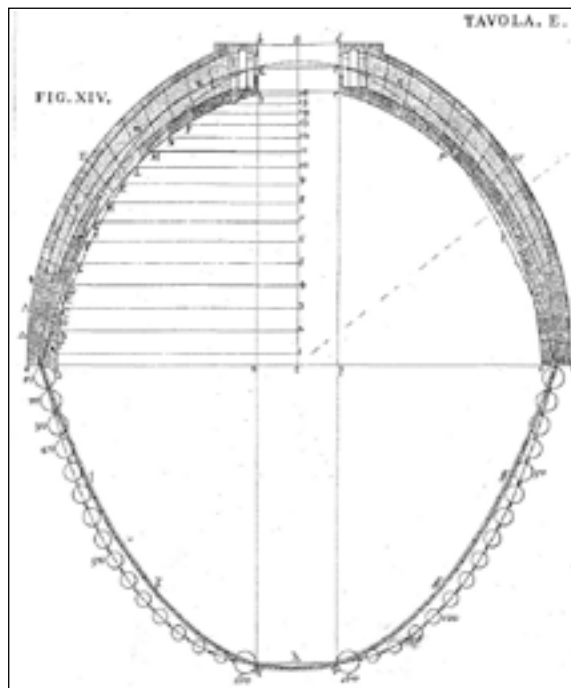


Fig. 3 - La curva catenaria all'interno della cupola di San Pietro

Dopo avere preso in considerazione le lesioni all'interno delle cupole di Firenze, Venezia, Padova e Montefiascone, avere riflettuto sul fatto che la cupola di Firenze a sesto acuto fosse più adatta di quella di Roma, ben più ribassata, a sostenere i pesi, e dopo avere esposto la numerosa bibliografia sull'argomento della cupola romana ed il rilievo accurato delle numerose lesioni esistenti espone i rimedi che lui propone come necessari, sostanzialmente due:

- risarcitura di tutte le lesioni con malta, mattoni e ove sia necessario con travertino, i materiali della cupola.
- posa in opera di cinque incatenamenti (Fig. 4) sulla cupola esterna oltre ai due (uno alla base della cupola, uno a 1/3 dell'altezza già posti in opera durante la costruzione forse dallo stesso Della Porta).

Questi lavori furono eseguiti da Vanvitelli, designato dal Papa architetto capo della Fabbrica il quale trovò durante i lavori che uno di essi era rotto.

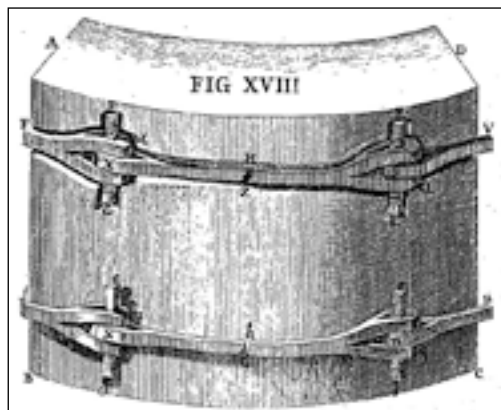
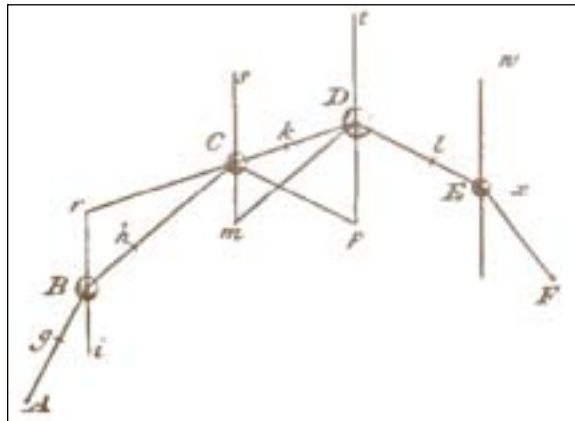


Fig. 4 - Catene della cupola



**6. W. Emerson, *Principles of Mechanincs*, [EME73]**

Il matematico inglese W. Emerson [7, Proposition LXVI], nei suoi Principi propose il seguente teorema: “*If several beams AB,BC,CD, etc. be joined together at B,C,D, and moveable about the points A,B,C,D be placed in a vertical plane, the points A,F, being fixt and through B,C,D, drawing ri, sm, tp perpendicular to the horizon. And if several weights be laid on the angles B,C,D etc. so that the weight on any angle C may be as than all the beams will be kept in equilibrium by these weights*”. (Fig.1)



**Fig. 1** – La figura da Emerson mostra le travi incernierate e le forze di equilibrio

La dimostrazione procede nel modo seguente.

La forza  $B_i$  è decomposta lungo le direzioni  $g$  e  $h$  in  $BA$  e  $BC$ . Per l'equilibrio dell'asta  $Bh=Ch$  ed applicando il teorema dei seni:

$$B_h = \frac{B_i \cdot \sin(\hat{B}i\hat{h})}{\sin(\hat{B}h\hat{i})} = Ch = \frac{C_m \cdot \sin(\hat{h}m\hat{C})}{\sin(\hat{C}h\hat{m})}$$

così con qualche passaggio algebrico Emerson trova la proporzione tra le forze equilibranti .

$$B_i : \frac{\sin(\hat{A}B\hat{h})}{\sin(\hat{A}B\hat{i})\sin(\hat{i}B\hat{h})} = C_m : \frac{\sin(\hat{h}C\hat{k})}{\sin(\hat{m}C\hat{k})\sin(\hat{h}C\hat{m})} = G \quad (1)$$

$G$  è il valore del rapporto costante dell'equazione (1).

Notiamo che questo problema (trovare le forze che equilibrano una assegnata catena cinematica) è l'inverso di quello risolto da Varignon nel 1687: trovare la configurazione di equilibrio di una catena cinematica o fune per un assegnato sistema di forze. Le due soluzioni tuttavia differiscono per un importante punto: il poligono di Varignon ha tre gradi di libertà mentre il problema di Emerson richiede la scelta

di un solo parametro, cioè la grandezza di una delle forze .

Emerson, d'altra parte, ignora nel testo completamente Varignon. La spiegazione potrebbe consistere nella circostanza che le guerre dei secoli XVII e XVIII tra Inghilterra e Francia crearono due mondi paralleli che largamente si ignoravano l'un l'altro.

**7. C. Hutton *Principles of Bridges*, [HUT72]**

Charles Hutton scrisse un saggio, *Principles of Bridges*, che ricevette scarsa considerazione dai suoi contemporanei. L'oblio di Hutton fu forse dovuto alla simultanea popolarità della teoria di Coulomb su gli archi: egli si dichiara essere un matematico attirato alla teoria dei ponti dalla caduta del ponte di Newcastle sul Tyne come conseguenza dell'inondazione del 1771 Hann [HAN43] scrisse che egli era un professore di matematica all'accademia militare di Woolwich.

Hann è l'unico autore che mette in rilievo il suo lavoro , *he set out by developing the properties of the equilibrated polygon which is extremely useful in equilibrium of structures*, problema che Hutton applica allo studio della forma dei ponti , identificando la curva d'intradosso dell'arco con la curva delle pressioni da lui chiamata “*arch of equilibration*” .

Hann comprese che questo era un utile strumento per gli ingegneri interessati non a trovare il poligono delle successive risultanti di un dato sistema di carichi ma a trovare i carichi che hanno un dato poligono come funicolare: questo rappresenta un tipico esempio di problema inverso nella meccanica delle strutture.

Hutton divide il saggio in cinque sezioni: *Il progetto dei ponti, Sugli archi, Sulle pile, Forza delle acque sulle pile, Un dizionario dei termini pratici peculiari*.

Qui noi facciamo riferimento solo all'argomento degli archi, anche se anche le altre offrono spunti importanti.

Nella sezione seconda, *Su gli archi*, nella terza preposizione, Hutton applica la preposizione LXVI di Emerson al caso dei ponti. Il suo proposito è: (fig.1): “*to find the proportion of the height of the wall above every part of an arch of equilibration. That is if GHIK be the top of a wall supported by the arch ABCD; it is required to find the portions of the perpendiculars BH, CI etc so that all the parts of the arch may be kept in equilibrium from falling by the weight or pressure of the superincumbent wall.*”

Riferendosi alla figura 1, traducendo il newtoniano linguaggio di Hutton in espressione moderna, si può osservare che

le forze applicate sono i pesi dell'arco e della massicciata stradale la cui altezza è  $h$ , cioè la distanza verticale  $h$  tra le due curve GK e AD mentre AD è assegnata. Quindi  $h\gamma = p$ , se  $\gamma$  rappresenta il peso specifico del materiale.

Prendi due punti  $P$  and  $P+dP$ , in un intorno infinitesimo  $ds$  dell'intradosso dell'arco.

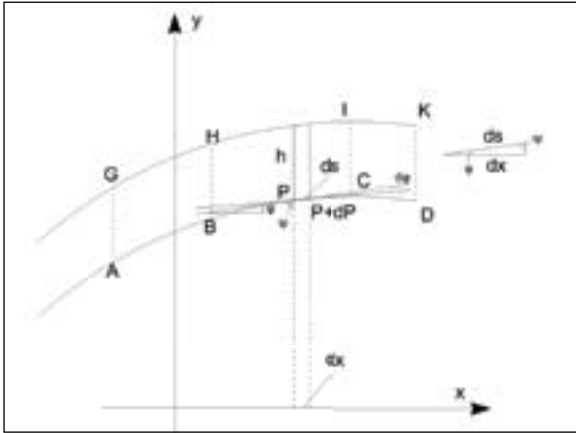


Fig. 1 – AD, GK rappresentano rispettivamente l'intradosso e l'estradosso del ponte

$$\gamma h dx = -\frac{G \cdot \sin d\varphi}{\sin \psi \cdot \sin(\pi - \psi)} = -\frac{G \cdot d\varphi}{\sin^2 \psi} \quad (1)$$

Poichè  $dx = ds \sin \psi$  e  $\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}$ , curvatura, risulta:

$$h = -\frac{G}{r\gamma \sin^3 \psi} = -\frac{G}{r\gamma \cos^3 \varphi} = -\frac{G d^2 y}{\gamma dx^2} \quad (2)$$

Nota che  $G$  è la costante che compare nella relazione di Emerson anche se né Hutton né Emerson rilevarono che  $G$  rappresenta la spinta orizzontale costante nell'arco definita tradizionalmente con la lettera  $H$ .

Nella proposizione IV:18 Hutton risolve vari esempi: il cerchio, l'ellisse, la parabola, l'iperbole, la cicloide. Mostriamo ad esempio l'arco circolare.

L'equazione della circonferenza di raggio  $r$ , nel piano  $x, y$  è:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3)$$

con le condizioni al contorno:  $y(\pm r) = 0$

Allora:

$$y'' = -\left[ x^2 (r^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} + (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (4)$$

Metti  $h(0) = h_0$  e  $y''(0) = -\frac{1}{r}$

Quindi:

$$G = h_0 \gamma r \quad (5)$$

e:

$$h = -h_0 r y'' \quad (6)$$

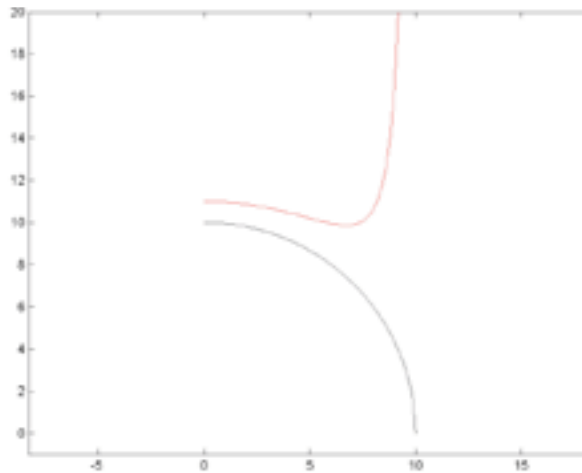


Fig.2 – Curva circolare di equilibrio e curva di estradosso di una metà del ponte

L'ordinata  $z$  dell'estradosso è:

$$z = y + h = y - h_0 r y'' \quad (7)$$

Il risultato richiede un commento:

$$\lim_{x \rightarrow \pm r} y'' = -\infty$$

Quindi l'estradosso alle estremità dell'arco semicircolare dovrebbe essere infinitamente alto per rispettare la richiesta proprietà che  $G$  sia costante.

Hutton osserva *“the curve is quite inconvenient for the form of the extrados of any bridge; however a straight horizontal line might be used instead of it, if the materials of which the arch is built could be so chosen, as that they might increase in their specific gravity and this again would be quite impracticable ...”*.

Ma Hutton trova il modo di applicare questo esempio: è sufficiente considerare un arco ribassato, cioè un segmento circolare avente un'apertura di  $30^\circ$ - $45^\circ$

Hutton risolve nei *“Principles”* (Proposition V) un altro problema di grande interesse nella costruzione di strade: trovare la curva di intradosso quando la curva di estradosso è una retta orizzontale, problema importante nelle costruzioni stradali. Egli lo chiamò *The riverse* come è naturale.

Si troverà lo stesso problema in Föppl [FOP00].

La forma dell'intradosso è una catenaria invertita.



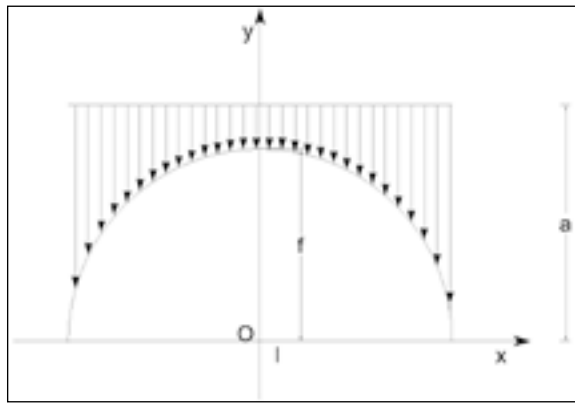


Fig. 3 - Catenaria, "arch of equilibration" di una strada orizzontale

Questo problema ha come incognite sia il carico unitario  $p$ , cioè l'altezza  $h$  e la forma della curva; si tratta quindi di un problema di tipo misto ed ha tre costanti di integrazione:

$$p = -\gamma(a - y) \quad (8)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\gamma(a - y)}{G} \quad (9)$$

Da cui posto

$$\frac{G}{\gamma} = \alpha^2 \quad (10)$$

$$y = A \cosh \frac{x}{\alpha} + B \sinh \frac{x}{\alpha} + a \quad (11)$$

Questa funzione è pari rispetto all'asse  $y$ :  $B=0$ .

$$x = \frac{l}{2}$$

$$y = 0; \text{ per } x = 0, y = f$$

Perciò:

$$G = \gamma l^2 \left( \frac{1}{2 \operatorname{arccosh} \left( \frac{a}{a-f} \right)} \right)^2$$

$$A = f - a$$

Eredità di Hutton

Il destino di "Principles of Bridges" fu strano. La questione sollevata da lui era la risposta teorica ai bisogni di costruttori di archi del suo tempo. Già riferimmo di Hann.

Culmann lo ignora mentre cita Moseley [MOS43] ("Der erste, der den Unterschied zwischen Druck- und Stütz-Linie klar und scharf hervorgehoben hat, ist, so viel uns bekannt, Moseley") e attribuisce il concetto di curva delle pressioni a Moseley.

Moseley conosce il saggio di Hutton ma

minimizza il suo contributo e riferisce il suo lavoro solo all'equilibrio di un arco in conci privi di attrito: "The equilibrium of the arch according to this single condition (no friction) constituted the theory of the arch so long in vogue and so well known from the works of Emerson, Hutton.

Culmann [CUL66] attribuisce l'equazione(7) dell'introduzione a Buernfeind [BAU46].

Ma Hutton fu ignorato persino in trattati di storia, quali Todhunter-Pearson [TOD93], Timoshenko [TIM53], Truesdell [TRU68]. Anche lo studioso italiano Albenga [ALB58], specialista nella costruzione dei ponti ed eminente storico lo ignora.

**8. C.A. Coulomb** *Essai sur une application des règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique relatifs a l'Architecture* [COU73]

Nella memoria Coulomb si propone di applicare le sue esperienze sull'attrito, riassumibili nella celebre formula:

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi$$

all'equilibrio di un arco in conci di pietra.

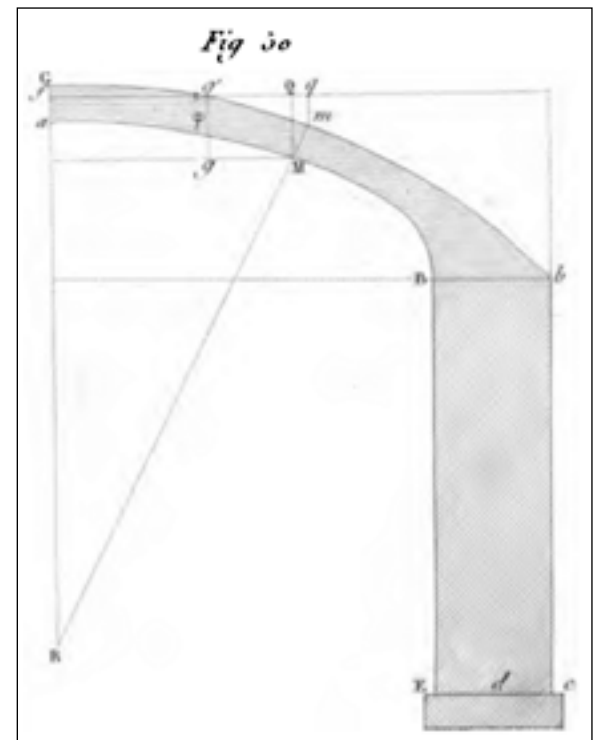


Fig. 1 - Disegno di Coulomb per un arco

Il modello meccanico di Coulomb è il seguente: archi in conci di pietra dotati di attrito ed eventualmente connessi con malta resistente allo scorrimento dotata quindi di coesione. Egli considera due condizioni di collasso per l'arco: lo scorrimento relativo dei conci e la loro rotazione relativa. La resistenza allo schiacciamento delle

pietre è ritenuta elevata, sufficientemente da non poter essere raggiunta in pratica.

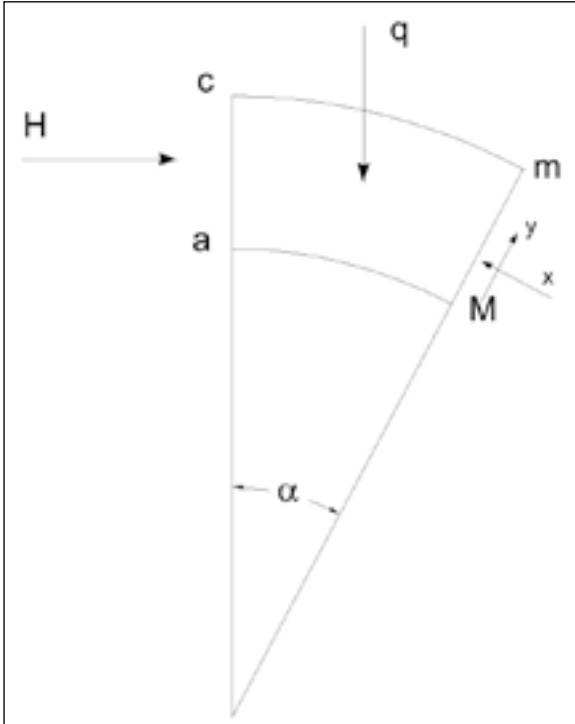


Fig. 2 – Equilibrio di un arco

Consideriamo la prima condizione. La figura originaria di Coulomb è rappresentata in Figura 1, ove si suppone un arco simmetrico dotato quindi solo di spinta orizzontale H in chiave. Con riferimento alla Figura 2 supponiamo che l'arco di ampiezza  $\alpha$  si trovi in due situazioni limite:

L'arco scende: per cui la forza y di attrito trasmessa dal concio contiguo è diretta verso l'alto. Poiché la risultante delle forze è nulla, si hanno le seguenti due equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} H + y \sin \alpha - x \cos \alpha &= 0 \\ q - y \cos \alpha - x \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$x = H \cos \alpha + q \sin \alpha \quad (1)$$

$$y = -H \sin \alpha + q \cos \alpha \quad (2)$$

e posto  $\mu = \tan \varphi$ , si ha che nell'equilibrio limite

$$-H \sin \alpha + q \cos \alpha = (H \cos \alpha + q \sin \alpha) \mu$$

e quindi

$$H = \frac{q \cos \alpha - \mu q \sin \alpha}{\mu \cos \alpha + \sin \alpha} \quad (3)$$

Il valore trovato di H è quindi il minimo compatibile con l'equilibrio; ma poiché la

relazione deve essere verificata per ogni valore di  $\alpha$  compreso tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$ , ampiezza del semiarco, si tratta di una tipica relazione di max-min, nell'intervallo considerato.

Se l'arco sale:

$$x = H \cos \alpha + q \sin \alpha \quad (4)$$

$$y = H \sin \alpha - q \cos \alpha \quad (5)$$

$$-H \sin \alpha + q \cos \alpha = (H \cos \alpha + q \sin \alpha) \mu$$

e quindi

$$H = \frac{q \cos \alpha + \mu q \sin \alpha}{-\mu \cos \alpha + \sin \alpha} \quad (6)$$

Il valore trovato di H è quindi il massimo compatibile con l'equilibrio; ma poiché la relazione deve essere verificata per ogni valore di  $\alpha$  compreso tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$ , ampiezza del semiarco, si tratta di una tipica relazione di min-max nell'intervallo considerato.

Quindi per l'equilibrio:

$$\frac{q \cos \alpha + \mu q \sin \alpha}{-\mu \cos \alpha + \sin \alpha} = H_{\min-\max} \geq H \geq H_{\max-\min} = \frac{q \cos \alpha - \mu q \sin \alpha}{\mu \cos \alpha + \sin \alpha} \quad (7)$$

Osserviamo che in queste relazioni non è stata presa in considerazione la coesione della malta, che potrebbe essere messa in conto per tramite la formula di Coulomb prima esposta, anche perché Coulomb avverte con chiarezza: “*Le frottement est souvent assez considérable dans les matériaux que l'on emploie a la construction des voûtes, pour que les différent voussoirs ne puissent point glisser l'un contre l'autre.*”

Coulomb conosceva certamente le esperienze sugli archi di Frezier, che conducevano a ritenere che la rotazione fosse il principale motivo di instabilità degli archi.

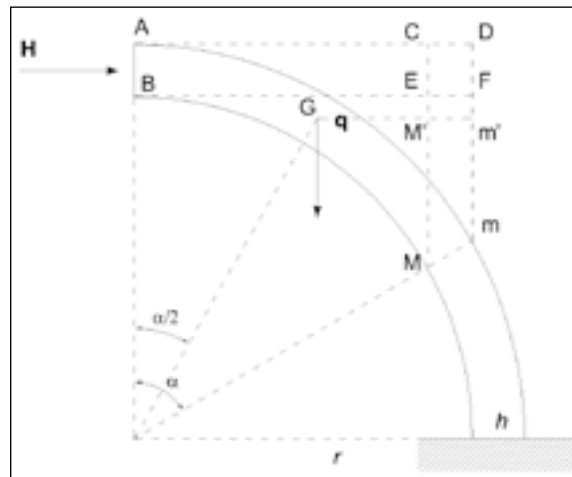


Fig. 3 – Collasso di un arco per rotazione

Con riferimento alla Figura 3, consideriamo la sezione mM, sede di un giunto tra i conci; la rotazione dell'arco di ampiezza  $\alpha$  può avvenire intorno ad m ed intorno ad M.

Rotazione intorno ad m  
La rotazione intorno ad m non avviene se:

$$Hm\bar{F} \leq q\bar{G}m' \quad (8)$$

La spinta H è applicata in B, affinché il valore di H sia massimo.

Rotazione intorno ad M  
La rotazione intorno ad M non avviene se:

$$HCM \geq q\bar{G}M' \quad (9)$$

La spinta H è applicata in A, affinché il valore di H sia minimo.

Queste due disuguaglianze devono sussistere per qualunque valore dell'angolo  $\alpha$ . Perciò la prima condizione rappresenta un massimo, mentre la seconda condizione un minimo.

Coulomb precisa che, come abbiamo seguito, affinché sia verificata la prima condizione (rotazione attorno ad m), occorre che la spinta H sia applicata in B mentre per la seconda condizione (rotazione attorno ad M), occorre che la spinta sia applicata in A. Inoltre, secondo l'autore, non occorre determinare i limiti di H con metodi esatti, ma per tentativi: in particolare suggerisce l'angolo di  $45^\circ$  che il giunto mM forma con l'orizzontale, valore che gli deriva da esperienze.

### 9. M. Navier, *Résumé des Leçons Données a l'Ecole des Ponts et Chaussées* [NAV38]

Nelle sue famose lezioni, Navier riprende il problema degli archi con le ipotesi di Coulomb, precisandone i contenuti. Prende in considerazione i quattro meccanismi di collasso di un arco simmetrico.

La Figura 1-Fig35 mostra il meccanismo di collasso per scorrimento verso il basso della zona centrale dell'arco, ciò che fa allargare l'arco alle sue basi.

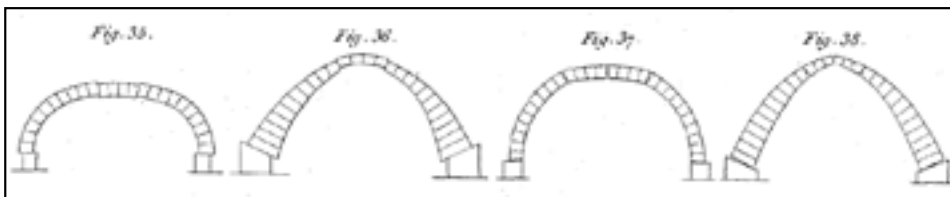


Fig. 1 – Meccanismo di collasso per traslazione e rotazione

La Figura 1-Fig36 presenta il meccanismo di collasso per scorrimento verso l'alto della zona centrale dell'arco, ciò che ha come conseguenza il restringimento della base dell'arco.

La Figura 1-Fig37 mostra un meccanismo di collasso per formazione di cinque cerniere: in chiave all'estradosso, sulle reni all'intradosso e sulle spalle all'estradosso.

La Figura 1-Fig38 mostra un meccanismo di collasso per formazione di cinque cerniere: in chiave all'intradosso, sulle reni all'estradosso e sulle spalle all'intradosso.

Interessante e nuova è l'applicazione di questi metodi alla piattabanda, per la quale Navier dimostra che l'equilibrio è sempre possibile, anche in assenza di attrito. Con riferimento alla Figura 2 ed alle formule di Coulomb si ha:

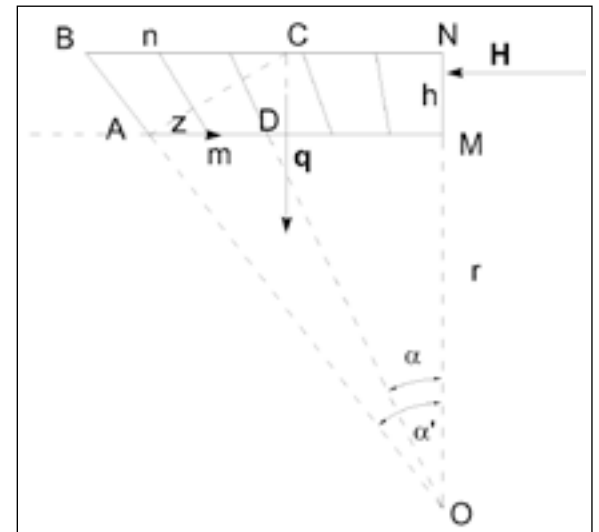


Fig. 2 – Equilibrio di una piattabanda

se la forza di attrito è nulla:

$$H = x \cos \alpha \quad (1)$$

$$q = x \sin \alpha = (\overline{AM} - z) h \gamma \quad (2)$$

Per cui

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(\overline{AM} - z) h \gamma}{H} \quad (3)$$

condizione che si realizza se le divisioni dei conci passano per uno stesso punto O. Quindi in tale caso l'equilibrio alla traslazione risulta soddisfatto.

Equilibrio alla rotazione intorno ad A

La reazione è ortogonale ad AO ed è pertanto inclinata  $\alpha'$  rispetto all'orizzontale

$$h = \overline{DA} \operatorname{tg} \alpha' \quad (4)$$

Nell'equilibrio limite, le tre forze, H, la reazione vincolare e il peso q passano per lo stesso punto C. Perciò se il baricentro è a destra di C, si genera una coppia stabilizzante, se è invece a sinistra di C la coppia è instabilizzante. Poiché  $\overline{DA} = \frac{\overline{AM}}{2}$ , si trova che lo spessore minimo compatibile con l'equilibrio è

$$h_{\min} = \frac{\overline{AM}}{2} \operatorname{tg} \alpha' \quad (4)$$

Equilibrio alla rotazione intorno ad B

L'equilibrio intorno a B è sempre soddisfatto. Difatti se H si trova in N, non dà momento rispetto a B, e la forza q dovrebbe essere nulla. Se invece H si trova in M, la coppia oraria può essere equilibrata solo da una forza peso diretta verso l'alto.

**10. John Weale:** *The Theory, Practice, And Architecture Of Bridges Of Stone, Iron, Timber, And Wire* [WEA43]

Nel testo, che raccoglie vari autori, vi sono memorie interessanti oltre quella già ricordata di Hann, ed in particolare la traduzione in inglese del testo di Gauthey [GAU09].

a. Gauthey, *Traité de la construction des ponts*, [GAU09]

Ai fini del nostro studio, interessante è la descrizione degli archi da utilizzare nei ponti, di cui possiamo osservare l'evoluzione rispetto al testo di Gautier, di circa 100 anni precedente.

Archi semicircolari ribassati

Il centro è situato all'altezza della fondazione o a quello di magra, ma può essere posto anche sopra tali livelli.

Archi policentrici (Flat Vaults)

Tali archi non sono completamente determinati dalla luce e dalla freccia; le uniche condizioni riguardano le tangenti che devono essere rispettivamente verticali alle spalle ed orizzontali al vertice. La semi-ellisse soddisfa tale condizione: ha però l'inconveniente di obbligare l'architetto a cambiare la forma dei conci che compongono l'arco. Per cui i costruttori preferiscono utilizzare curve composte di un certo numero di archi di cerchio, in modo da dare a tali archi la forma più conveniente.

Archi policentrici descritti da tre archi di cerchio

In questo caso l'arco policentrico è composto da tre archi di ampiezza  $60^\circ$  ciascuno e Gauthey ne descrive il metodo di tracciamento (Figura 1).

Definiti  $AC = CB = a$  la metà dell'ampiezza dell'arco e  $CD = b$  la sua freccia, i centri dei due archi che partono dalle due spalle dell'arco si troveranno sul segmento AB nei punti F e G, mentre il centro del terzo arco sarà situato nel punto E sul prolungamento del segmento DC. Una volta definito un centro, ad esempio il centro G, gli altri due possono essere facilmente determinati.

Sia  $CG = x$ ; poiché per costruzione il raggio dell'arco centrale è DE, che è uguale al raggio passante per EG, e poiché il triangolo FGE è equilatero, si può scrivere la seguente relazione:

$$CE + CD = FG + GB$$

e quindi

$$x\sqrt{3} + b = x + a$$

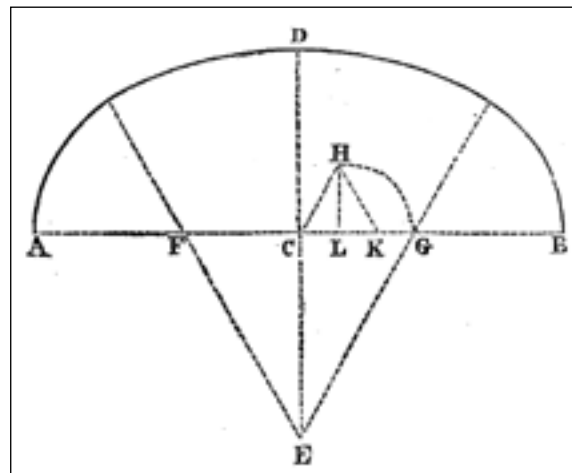


Fig. 1 – Arco policentrico descritto da tre archi di cerchio

Risolvendo, si ha:

che rappresenta la posizione del centro G sul segmento AB.

$$x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} (a - b)$$

Archi policentrici descritti da più di tre archi

Numerosi sono stati i metodi adottati per determinare la posizione del centro e la lunghezza dei raggi degli archi di cerchio che vanno a definire la policentrica dell'arco.

Gauthey riporta il metodo con cui sono stati tracciati gli archi del Ponte di Neuilly (Figura 3).

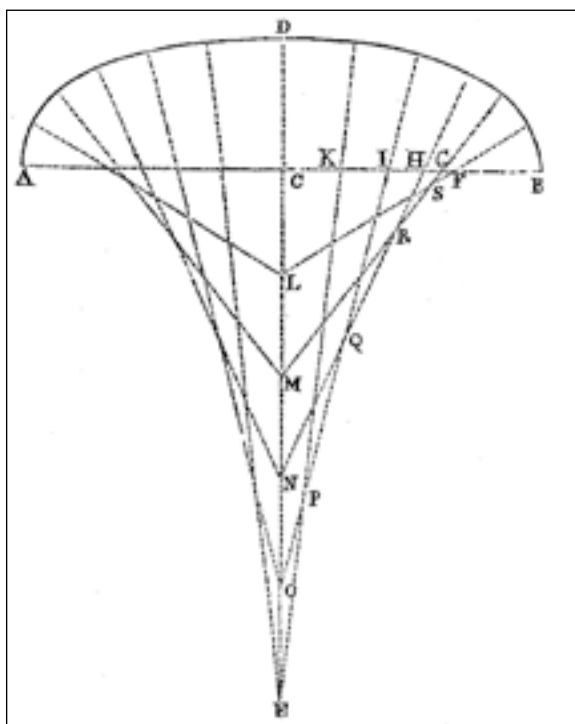


Fig. 2 - Arco policentrico descritto da più di tre archi di cerchio

Una volta determinato il raggio FB del primo arco che spicca dalla spalla, si prolunghi l'innalzamento dell'arco CD di una quantità arbitraria tale che  $CE = 3CF$ . Si divida, quindi, il segmento CE in cinque parti uguali ed il segmento CF in cinque parti proporzionalmente ai numeri 1,2,3,4,5. Unendo i punti trovati con i segmenti LF, MG, NH, OI, EK, i punti S (dato dall'intersezione del segmento LF con il segmento MG), R (MG con NH), Q (NH con OI), P (OI con EK), E, F rappresentano i centri degli archi di cerchio che formano l'arco policentrico.

È evidente come in tale procedimento la quota CD dell'arco dipenda dai valori arbitrari attribuiti ai segmenti CE e CF, mentre solitamente essa rappresenta, insieme all'ampiezza AB, uno dei dati del problema.

Occorre quindi definire un procedimento analitico in modo che la quota CD dell'arco trovata sia effettivamente quella stabilita a priori.

Sia  $AC = CB = a$ , metà dell'ampiezza dell'arco,  $CD = b$ , il suo innalzamento sull'orizzontale.  $x$  e  $y$  rappresentano rispettivamente i valori assegnati a CF e CE, mentre  $n$  e  $m$  ne rappresentano i valori determinati arbitrariamente attraverso il procedimento descritto. Sia inoltre  $z$  la spezzata definita dai punti EPQRSF, ricavata a partire dai valori assegnati di  $x$  e  $y$ , mentre sia  $s$  quella calcolata a partire dai valori di  $m$  e  $n$ . Si ha quindi la seguente relazione:

$$z + a - x = y + b$$

Se si suppone che la figura ricavata a partire dai valori assegnati di  $x$  e  $y$  sia simile alla figura ECF ottenuta dai valori di  $n$  e  $m$  determinati arbitrariamente, si avrà:

$$y = \frac{mx}{n} \quad z = \frac{sx}{n}$$

Allora la relazione

$$x = \frac{n(a-b)x}{m+n-s}$$

rappresenta il valore da assegnare a CF affinché l'ampiezza e l'innalzamento dell'arco siano quelli assunti a priori.



Fig. 3 - Gli archi del ponte di Neully di Rondelet tracciati con una policentrica

b. Moseley, On the Theory of the Arch [MOS43]

Oltre alla memoria di Gauthey nel testo di Weale, vi è un lavoro di Moseley, ben noto nel XIX secolo, dal titolo "On the Theory of the Arch". Inizia con la seguente affermazione: "A structure may yield under the pressure to which is subjected either by the slipping of certain of his surfaces of contact upon one another, or by their turning over upon the edges of one another; and these two conditions involve the whole question of its stability".

Questi due modelli di rottura dell'arco sono quelli già presi in considerazione da Coulomb.

L'innovazione principale dell'autore, secondo Culmann [CUL66], è l'aver introdotto nel procedimento due curve: la "Line of Pressure" e la "Line of Resistance". In realtà il concetto di curva delle pressioni era già contenuto nell'arch of equilibration di Hutton.

Si consideri la struttura MNLK di Figura 1, composta da una singola fila di conci non cementati, di qualsivoglia forma e si pensi che

essa sia sezionata da una qualsiasi superficie geometrica 1,2. Sia la  $aA$  risultante delle forze che agiscono sulla parte MN12; siano poi le superfici di contatto dei conci che compongono la struttura rispettivamente 3,4, 5,6, 7,8, 9,10 e siano  $bB$ ,  $cC$ ,  $dD$  ed  $eE$  le risultanti, che corrispondono ai diversi piani di intersezione. Se ciascuna risultante interseca la superficie all'esterno della struttura costringerà la massa a ribaltarsi intorno al vertice di contatto. Se invece la risultante interseca la superficie all'interno, la massa sarà stabile.

Se, ad esempio, la risultante delle forze che agiscono sulla parte MN12 fosse stata  $a'A'$ , allora la porzione MN12 si sarebbe ribaltata intorno a 2; se invece la risultante fosse stata  $a''A''$ , MN12 si sarebbe ribaltata intorno ad 1.

Moseley afferma anche di aver chiamato la spezzata ABCDE *Curve delle Pressioni* ("Line of Pressure"): essa si ottiene componendo la risultante  $aA$  delle forze agenti sul concio MN12 con la risultante delle forze agenti sul concio 1243 (ad esempio il peso), ottenendo quindi la risultante  $bB$ ,...,etc.

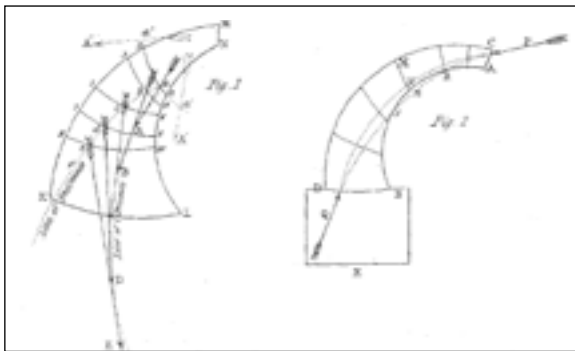


Fig. 1 – Arco policentrico descritto da tre archi di cerchio

Siano  $a,b,c,d,e$  i punti di intersezione delle risultanti con le superfici di contatto 12, 34, 56, 78, 910. La spezzata congiungente i punti abcde prende il nome di *Curva di Resistenza* ("Line of Resistance"). Se i punti che formano la Curva di Resistenza si troveranno all'interno della massa della struttura, il sistema risulterà stabile; se invece tale curva non intersecherà anche una sola superficie di contatto, la massa tenderà a ribaltarsi.

Questa condizione è pertanto necessaria per la stabilità della struttura. Ma ve ne è anche una seconda, relativa alla stabilità contro lo slittamento di un concio rispetto ad un altro. Per ottenere questa condizione, occorre osservare che la risultante corrispondente a ciascuna superficie di contatto deve avere la direzione all'interno del *cono di attrito*. Il cono di attrito

è quel cono che ha come asse la normale alla superficie di contatto e come angolo al vertice il doppio di quello la cui tangente trigonometrica è l'angolo di attrito delle due superfici.

La teoria dell'equilibrio di una struttura ad arco in conci, secondo Moseley, è connessa alla determinazione di queste due curve: la Curva di Resistenza determina il punto di applicazione della risultante della curva delle pressioni su ciascuna superficie di contatto, mentre la Curva delle pressioni ci fornisce la direzione di ciascuna risultante.

Per quanto riguarda i due modelli visti in precedenza, egli fornisce dei criteri del tutto simili a quelli di Coulomb e di Navier. Afferma però che al momento della stesura non ne conosceva i contenuti.

Naturalmente la curva delle pressioni e la curva di resistenza per questa via rimangono indeterminate: per determinarle egli suggerisce di prendere di  $H$  il valore minimo in chiave, senza darne però una giustificazione: in questo modo definisce la curva delle pressioni.

Il modello di rottura più coerente con le idee di Moseley è quello rappresentato in Figura 2, coerente con uno dei modelli di Coulomb. Il metodo che ne scaturisce è quello di determinare la curva delle pressioni o con il metodo del poligono funicolare che passa per tre punti o con quello che presentiamo successivamente: poligono funicolare che ha un lato per una retta orizzontale assegnata in chiave e passa per un punto  $F$  sulla spalla

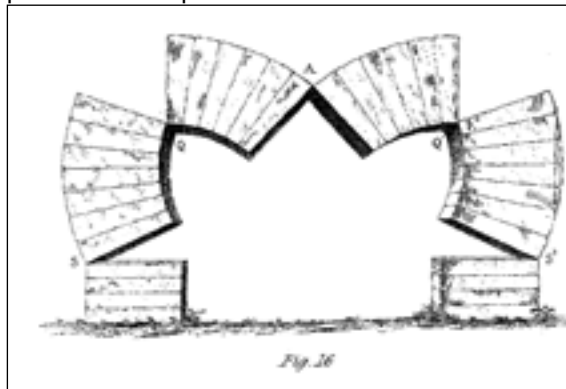


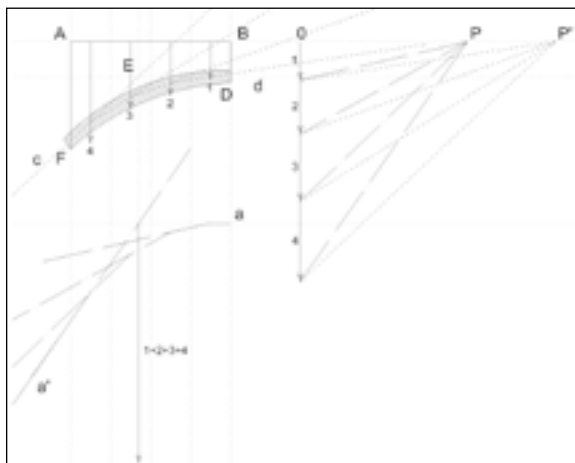
Fig. 2 – Rottura di un arco simmetrico secondo Moseley. Criterio della minima spinta in chiave

Il poligono funicolare è unico, perché si tratta di tre condizioni lineari: si applichi la costruzione al seguente arco.

L'arco, tratteggiato in figura, sostiene una carreggiata stradale orizzontale. Suddivisa la struttura in tronchi siano 1, 2, 3, 4 le forze relative applicate nei rispettivi baricentri. Si costruisca quindi il poligono delle forze con riferimento al polo



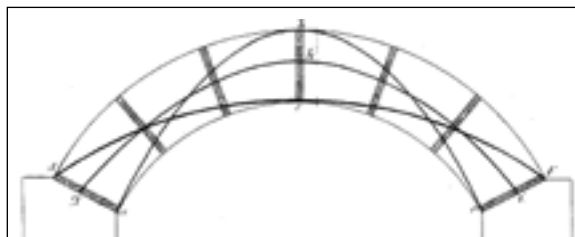
P, il quale si trova sull'orizzontale per O. Si tracci il poligono delle forze aa' (Figura 3). La risultante 1-2-3-4 passa per il punto di incontro di a con a'. Sia d la retta orizzontale assegnata: per d si tracci un nuovo poligono funicolare, ricercando il punto E di incontro di d con la risultante delle forze. Si unisca il punto F assegnato con il punto E. Si tracci dall'estremità della forza 4 la parallela alla direzione FE e si determini il vero polo P' del sistema di forze, che soddisfa ai requisiti del problema.



**Fig. 3** – Poligono funicolare che passa per un punto per una retta orizzontale assegnata

La curva non deve avere ulteriori punti di incontro con le curve di estradosso o di intradosso: in tal caso l'arco diviene un meccanismo. Per un arco reale la curva delle pressioni deve trovarsi all'interno dell'arco.

**11. W. H. Barlow, On the existence (practically) of the line of equal Horizontal Thrust in Arches, and the mode of determining it by Geometrical Construction, [BAR46]**



**Fig.1** – Dimostrazione di Barlow della possibilità di ottenere vari tipi di equilibrio

Il disegno di Barlow, presentato in una memoria all'Institution of Civil Engineer, con sede Westminster, mostra (Figura 1) un arco in conci di pietra su cui era stato compiuto un esperimento molto interessante: lo strato di malta tra i conci era in realtà costituito da tre cunei di legno che potevano essere estratti e riposti.

Estraendo e riponendo i cunei l'esperienza dimostrava come l'equilibrio fosse possibile

con vari percorsi della curva della pressioni: naturalmente per l'equilibrio la curva deve trovarsi all'interno dello spessore dell'arco.

## 12. K. Culmann, Die graphische Statik [CUL66]

Nel suo famoso trattato Culmann introdusse una serie di innovazioni rispetto ai suoi predecessori.

In primo luogo è a tutti gli ingegneri ben nota la polarità e la antipolarità d'inerzia, derivata dalle proprietà proiettive che si generano tra punti e rette del piano, opera del XVII secolo di Desargues [DES81]. In particolare Culmann introdusse la nozione di *nocciolo centrale d'inerzia*, come luogo degli antipoli delle rette che non tagliano la sezione. Introdusse poi molte costruzioni grafiche basate sul poligono funicolare, tra cui la costruzione del poligono per tre punti, per cui il testo risultava molto noto fino a pochi decenni or sono, fino a che i metodi grafici sono stati sostituiti da metodi numerici adatti all'elaboratore elettronico.

## Archi

Culmann dedica uno dei suoi capitoli allo studio degli archi. In questo primo studio egli non differisce dai suoi predecessori per quello che riguarda la concezione strutturale dell'arco come un insieme di conci di pietra collegati nei giunti. Attribuisce grande importanza alla posizione della curva delle pressioni all'interno dell'arco (Figura 1): "... ein Gewölbe stabil ist, wenn es möglich ist in zwei Gewölbefugen des Gewölbes, zwei Reaktionen  $Q$  und  $Q_1$ , dass sie mit dem Gewichten der einzelnen zwischen ihnen liegenden Wölbstücke und deren Belastungen zusammengesetzt eine Drucklinie geben, deren einzelne Strecken die entsprechenden Fugen so weit im Innern des Gewölbes schneiden, dass um keine Fugenkante ein wirkliches Kantenstättfinde..."



**Fig. 1** – Curva delle pressioni all'interno di un arco

Cioè, in buona sostanza, un arco è stabile quando è possibile, in due sezioni, trovare due reazioni, le quali con i pesi danno luogo ad una curva delle pressioni (*Drucklinie*), che taglia l'arco nel suo interno, in modo da non toccare nessun spigolo dei giunti.

“...von allen Drucklinien, welche eingezeichnet werden können, ist diejenige die wirkliche Drucklinie des Gewölbes, welche sich der Axe desselben in der Art am meisten nähert, dass der Druck in den am stärksten comprimierten Fugen kanten ein Minimum ist...“, cioè, di tutte le curve delle pressioni, che possono essere disegnate nel modo detto, la vera è quella che si avvicina di più all'asse, in modo che la pressione nel giunto più fortemente compresso sia minima.

La curva delle pressioni insomma deve stare sempre all'interno della sezione, non incontrare il suo contorno e precisa successivamente che è importante che stia all'interno del nocciolo di inerzia (*Centralkern*), così che essa sia di fatto tutta compressa. Ricordiamo in particolare che per la sezione rettangolare il nocciolo di inerzia è il cosiddetto terzo medio.

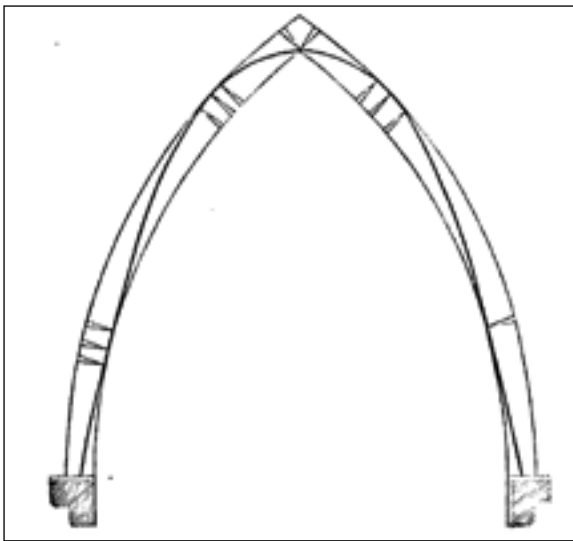


Fig. 2 – Spinta massima nella chiave dell'arco

Culmann disegna poi, per alcuni archi, le curve delle pressioni che portano al collasso della struttura (Figura 2 e Figura 3), riconducendosi ai modelli di Navier e degli altri già esposti.

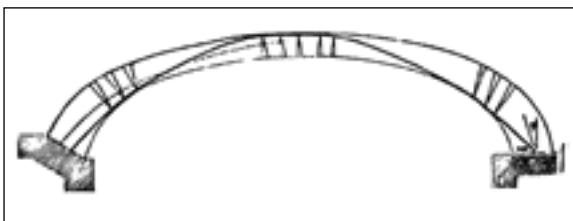


Fig. 3 - Spinta minima nella chiave dell'arco

Con Culmann tramonta il periodo dell'arco in conci di pietra che aveva dominato la tecnologia per duemila anni: il modello meccanico che lo aveva rappresentato era quello di Coulomb che, come abbiamo visto, non prevedeva una soluzione unica del problema; altri materiali con comportamento almeno inizialmente di tipo elastico – lineare si affacciano sulla scena delle costruzioni.

Con i nuovi materiali elastici lineari, acciaio e successivamente calcestruzzo armato, con l'introduzione di vincoli dal comportamento cinematico esatto, diveniva possibile una soluzione determinata con l'introduzione delle equazioni di congruenza accanto a quelle di equilibrio.

### 13. J. Heyman. *The Masonry Arch*, [HEY66], [HEY77], [HEY82]

Negli ultimi anni Heyman ha acquistato grande fama tra coloro che si occupano di problemi storici legati agli archi in conci di pietra. Indubbiamente egli rappresenta un'innovazione rispetto al passato, in quanto applica i teoremi del calcolo a rottura a questo problema.

Il suo testo più noto sull'argomento è “*The Masonry Arch*” del 1982.

Egli parte da una critica al modello tardo ottocentesco di arco elastico, dimostrando che questo modello non è soddisfacente nei confronti dell'arco in conci di pietra, sia per quanto riguarda le condizioni di vincolo, sia per i materiali che lo costituiscono, poco resistenti a trazione, sia per i movimenti che ne influenzano la statica, spostamenti che spesso non possono essere considerati infinitesimi, come vuole la teoria. Egli recupera invece le teorie precedenti a tale modello ed in particolare la teoria di Coulomb, basata esclusivamente sull'equilibrio.

Il modello meccanico che Heyman prende in considerazione è un modello rigido-plastico. Le ipotesi da lui poste, sostanzialmente identiche a quelle di Coulomb, sono le seguenti:

- Il collasso per slittamento tra i conci non può avvenire
- La muratura non ha resistenza a trazione
- La muratura ha una resistenza a compressione infinita

La prima ipotesi era già contenuta nella trattazione di Coulomb, in quanto egli aveva avvertito che per i materiali utilizzati comunemente nelle costruzioni questo tipo di collasso era da escludere, nonostante egli lo avesse preso in considerazione.

Anche la seconda ipotesi risale a Coulomb e prevede che i conci siano appoggiati l'uno sull'altro. Coulomb eventualmente prendeva in esame la resistenza della malta solo per lo slittamento e non per il ribaltamento. La possibilità che la malta avesse una resistenza a trazione è presa in considerazione da Navier.

La terza ipotesi, anch'essa di fatto contenuta nella teoria di Coulomb, è un'ipotesi tesa a semplificare il modello ed è giustificata dal fatto che nei casi concreti la tensione di lavoro nell'arco è molto più piccola di quella di rottura della pietra.

La rottura della muratura avviene per rotazione intorno all'estremità di un concio e formazione di una cerniera.

Se  $N$  è lo sforzo normale trasmesso dalla cerniera (ciò che porterebbe a tensioni di valori infinito), il momento trasmesso è  $M = \pm Nh$ .

Il dominio di rottura nel piano  $MN$  è pertanto il seguente (Figura 1):

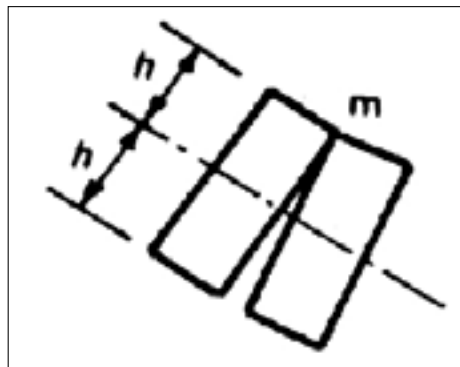


Fig. 1 – Rottura per rotazione relativa tra i conci

Ne consegue che staticamente ammissibile è qualunque punto all'interno del dominio e quindi, come era già ben noto fino da La Hire, la curva delle pressioni deve essere all'interno della muratura.

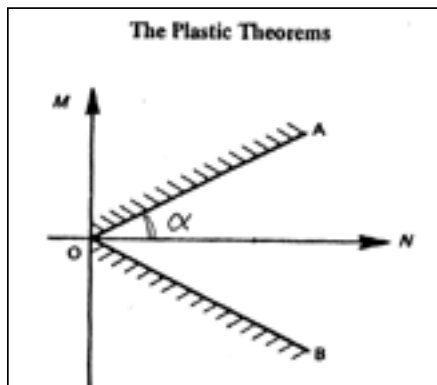


Fig. 2 – Dominio di resistenza

Il ragionamento di Heyman prosegue con l'enunciazione del Teorema di Plasticità (*Lower Bound – Teorema Statico*): “se si può trovare una curva delle pressioni che giaccia intermente all'interno della muratura, l'arco è in sicurezza”

A differenza dei meccanismi di collasso applicati alle strutture duttili, che prevedono un moltiplicatore dei carichi, ed introducono quindi un fattore di sicurezza rispetto al carico di lavoro, Heyman propone un *fattore di sicurezza geometrico*: “the amount by which the actual arch must shrunk to reach its thinnest possible state”, cioè “la quantità della quale l'arco reale che deve essere ridotto per raggiungere il minimo spessore”, compatibilmente con l'equilibrio dell'arco, tale cioè che la curva delle pressioni sia ancora contenuta all'interno dell'arco (Figura 3).

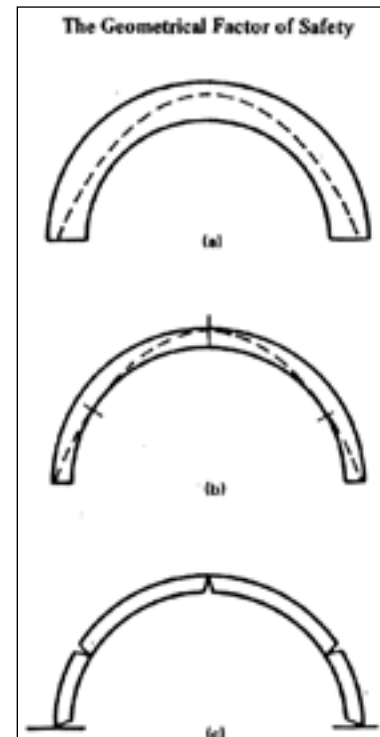


Fig. 3 – Fattore di sicurezza geometrico

La tre strutture di Figura 3 mostrano un'applicazione schematica dell'idea di fattore di sicurezza geometrico; dalla situazione schematizzata in a, si passa allo schema b, nel quale l'intradosso e l'estradosso dell'arco vengono ridotti fino alla formazione del meccanismo di collasso rappresentato in c, con cinque cerniere, trattandosi di arco simmetrico.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [CEC10] A. CECCHI, *The arch of equilibration of Charles Hutton (1772)* in *Meccanica*, Issue 45, 829:833, 2010
- [LEV23] LEVI-CIVITA T & AMALDI U., *Lezioni di meccanica razionale*, Bologna, 1923
- [VAR87] VARIGNON M., *Nouvelle Mécanique ou Statique*, Paris, 1687
- [LAH95] LA HIRE, M., *Traité de Mécanique*, Imprimerie Royale, Paris, 1695
- [LAH12] LA HIRE, M., *Sur la Construction Des Voûtes dans les Edifices*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1712
- [TIM53] TIMOSHENKO, S. P., *History of Strength of Materials*, Mc Graw Hill, New York, 1953
- [GAU28] GAUTIER, H., *Traité des ponts*, Parigi, 1728
- [FRE38] FREZIER, M., *Théorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et de Bois pour la Construction des Voûte*, Tome I,II,III Strasbourg, 1738
- [POL48] POLENI, G., *Memorie Istoriche Della Gran Cupola del Tempio Vaticano*, Stamperia del Seminario, Padova, 1748
- [EME73] EMERSON, W., *The Principles of Mechanics*, G. Robinson, London, 1773
- [HUT72] HUTTON C., *The principles of bridges*, T. Saint, London, 1772
- [HAN43] HANN J., *Theory of Bridges* in Weale, J., *The Theory, Practice, And Architecture Of Bridges Of Stone, Iron, Timber, And Wire*, J. Weale, London, 1843
- [FOP00] FÖPPL A., *Vorlesungen über technische Mechanik*, B. G. Teubner, Lipsia, 1900
- [MOS43] MOSELEY, H., *On the Theory of the Arch* in Weale, J. *The Theory, Practice, And Architecture Of Bridges Of Stone, Iron, Timber, And Wire*, J. Weale, London, 1843
- [CUL66] CULMANN, K., *Die graphische Statik*, I Edition, Meyer & Zeller, Zurich, 1866
- [BAU46] BAUERNFEIND C. M., *Die Pauli'sche Gewölbetheorie*, Bd. 4, Stuttgarter Eisenbahn-Zeitung, 1846
- [TOD93] TODHUNTER, I. AND PEARSON, K., *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time*, Cambridge University Press, Cambridge
- [TIM53] TIMOSHENKO, S. P., *History of Strength of Materials*, Mc Graw Hill, New York, 1953
- [TRU68] TRUESDELL, C., *Essays in the History of Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1968
- [ALB58] ALBENGA, G., *I ponti, L'esperienza, La teoria, La pratica*, UTET, Torino, 1958
- [COU73] COULOMB, C. A. *Essai sur une application des règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique relatifs a l'Architecture*, Mémoires de Mathématique et de Physique présentes a l'Académie Royale des Sciences par divers Savants, 1773
- [NAV38] NAVIER, M. *Résumé des Leçons Données a l'Ecole des Ponts et Chaussées*, Chez Carilian Goeury, Paris, 1838
- [WEA43] WEALE, J. *The Theory, Practice, And Architecture Of Bridges Of Stone, Iron, Timber, And Wire*, J. Weale, London, 1843
- [GAU09] GAUTHEY, M., *Traité de la construction des ponts*, Paris, 1809
- [BAR46] BARLOW, W. H., *On the eaistence (practically) of the line of equal Horizontal Thrust in Arches, and the mode of determining it by Geometrical Construction*, Minutes Proceedings Institution of Civil Engineers, London, 1846
- [DES81] DESARGUES G., *Brouillon Projet d'atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, 1639 in R. TATON, « L'Œuvre mathématique de Girard Desargues », Paris, Vrin, 1981<sup>2</sup>
- [HEY82] HEYMAN, J., *The Masonry Arch*, Chichester, Ellis Horwood, 1982
- [HEY77] HEYMAN, J., *Equilibrium of Shell Structures* (Oxford Engineering Science), Oxford University Press, 1977
- [HEY66] HEYMAN, J., *The Stone Skeleton*, Int. Journal Solids and Structures, 2, 1966
- [NAV23] NAVIER, M., *Rapport et mémoire su les ponts suspendus* Imprimerie Royale, Paris, 1823

Alberto CECCHI si e' laureato in Ingegneria civile presso l'Universita' di Bologna; e' inserito nel Gruppo di Ricerca ministeriale ICAR/08 – Scienza delle Costruzioni.

- "Visiting professor" presso il Dipartimento di Ingegneria - Brown University (Providence R.I., USA) nell'Anno Accademico 1984-85.

- Ha tenuto i corsi di: "Meccanica Computazionale delle strutture", Università di Perugia; "Statica", Università di Firenze; "Scienza delle Costruzioni", Università di Firenze; "Analisi strutturale di costruzioni storiche", Università di Firenze.

- Ha compiuto missioni di aiuto e controllo della statica degli edifici in regioni colpita da sisma: 1976, Giugno, Gemona – Terremoto del Friuli; 1980, Dicembre, Solofra – Terremoto dell'Irpinia; 1981, Lezioni attinenti al restauro ed alla riparazione di costruzioni colpite dal terremoto a Solofra e a Potenza; 2009, Maggio, San Demetrio nei Vestini – Terremoto dell'Abruzzo

- Compie ricerche: in Ingegneria Strutturale, con particolare riferimento alla Dinamica delle Strutture ed all'Ingegneria Sismica; nella Computer Vision ed in particolare nelle applicazioni della disciplina al rilievo dei monumenti architettonici e del restauro, nell'Analisi Strutturale di Costruzioni Storiche. Autore di circa cinquanta pubblicazioni di ingegneria strutturale negli argomenti indicati.

