Su alcuni possibili contributi utili alla dimostrazione dell'ipotesi di Riemann II (RH ed RHG)

F. Di Noto, A. Tulumello, G. Di Maria, M. Nardelli[1,2]

[1] Dipartimento di Scienze della Terra
Università degli Studi di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10
80138 Napoli, Italy

[2] Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Polo delle Scienze e delle Tecnologie
Monte S. Angelo, Via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

DUE FORMULE PER UNA STIMA PIU' PRECISA

DELL' N° NUMERO PRIMO E DI $\pi(N)$ TRAMITE

DUE FUNZIONI LOGARITMICHE CORRETTRICI

(Relazioni con il TNP e abbattimento dell'errore percentuale)

\-------------

La funzione p_j, com'è noto, è la funzione, o la formula, peraltro ancora da scoprire, per il calcolo dell' N°- esimo numero primo, in altre parole la cosiddetta "formula dei numeri primi".

Poiché, come Legendre dimostrò che non esiste nessuna funzione algebrica razionale che desse sempre numeri primi, tale funzione darà sempre risultati più o meno approssimativi, come del resto anche tutte le altre formule per la stima di diversi conteggi riguardanti i numeri primi, per esempio la funzione $\pi(N)$, ma anche, come esposto in un altro lavoro ("Note su una soluzione positiva per le due congetture di Goldbach"), il numero di coppie di gemelli fino a N o il numero delle coppie di Goldbach per N pari, specialmente di tipo $N = 10^n$.

Una di queste formule per la funzione $\pi(N)$ è dovuta com'è noto, proprio a Legendre (2) e che dà risultati migliori di quelli dati dalla formula analoga di Gauss (1):

$$\pi(N) = N / \log N \qquad (1)$$

$$\pi(N) = N / (\log N - 1{,}08366)$$

dove 1,08366 è il numero correttore di Legendre (e log N il log naturale)

utile per le suddette formule; per la formula di Gauss

si aveva $\pi(N) \approx \dfrac{N}{\log N - 1{,}8366}$

per esempio per N = 10.000:

stima: N/log N = 1 086

stima con 1,08366: N / (log N - 1.08366) = 1 231 ~ 1 229

valore reale: π(N) = 1 229

differenza vecchia stima: 1 229 – 1 086 = 143 differenza nuova stima : 1229 – 1231 = - 2

per N = 100.000:

N/log N = 8 686

N/(log N – 1,08366) = 9 588 ~ 9 592

$\pi(N)$ = 9 592

differenza vecchia stima: 9 592 – 8 686 = 906

differenza nuova stima 9 592 - 9 588 = 4.

come si può vedere dalle apposite tabelle pubblicate su Internet (articolo sul sito di Polimath “La distribuzione dei numeri primi” di D.K. Devlin, Davis & Hersh,, Jean Dieudonne’) i valori ottenuti con la formula di Legendre sono molto più vicini ai valori reali di $\pi(N)$ che quelli ottenuti dalla più semplice ma meno precisa formula di Gauss (al quale però non piaceva il numero di Legendre, e nemmeno ad altri matematici moderni, che lo considerano soltanto un reperto storico). In questo lavoro invece il nuovo numero correttore (o funzione correttrice) varia decrescendo sempre più lentamente da 1, 8036… a 1, mentre 1,08366 lo troviamo in prossimità di 10^{14} come circa 1,8335…; ma in questo nuovo contesto esso non ha importanza teorica o pratica, per cui sarà trascurato del tutto.

Questa nuova funzione c, variabile da 1,80 per N = 10 a 1 per

N tendente all’infinito, se riportata su un grafico (vedi Grafico 1 finale) assume una forma logaritmica capovolta, o iperbolica ma con c tendente a 1 anziché a 0; e i numeri primi, com’è noto, hanno sempre un comportamento logaritmico, e anche in questo caso non fa eccezione; esso conferma aritmeticamente il Teorema dei Numeri Primi (TNP), connesso all’ipotesi di Riemann (TNP conseguenza della RH).

Ma torniamo alla nostra suddetta funzione c per il calcolo approssimativo dell’ N° numero primo, che chiameremo più semplicemente $N = p_{N°}$. (valore dell’N° numero primo)

Una delle conseguenze del suddetto Teorema dei Numeri Primi, che i matematici indicano più brevemente con TNP), è che

$N \sim N \log N$, (che dovrebbe invece indicarsi come $N \approx N° \log N°$). A tal proposito, John Derbyshire nel suo recente e ottimo libro "L'ossessione dei numeri primi"(Bollati Boringhieri Ed.), scrive che: (pag.64) :

" …Ora, se il TNP è vero, $C = K/\log K$, e dunque l'N-esimo numero primo è proprio dalle parti di $NK: (K/\log K)$, ovvero intorno a $N \log K$. Dal momento che la maggior parte dei numeri primi dell'intervallo è dell'ordine di grandezza di K, posso scambiare tra loro K ed N, e dunque l'N – esimo numero primo è ~ N log N.

So che tutto questo sembra sospetto, ma in realtà non si tratta di una stima sbagliata, e permette di ottenere via via risultati proporzionalmente migliori sulla base del principio della tilde.

Predice, per esempio, che il trilionesimo numero primo sarà 27 631 021 115 929, in effetti il trilionesimo numero primo è **30 019 171 804 121** con un errore dell'8 per cento"

(In realtà l'errore e del 7,906 %, N.d.A.A, e con la nostra nuova formula si ridurrà allo 0,01%, come vedremo in seguito)

Gli errori percentuali a mille, un milione e un miliardo sono 13, 10, e 9 ".

Infatti, moltiplicando il numero N stimato (N_s) come trilionesimo

numero primo, per il numero correttore della funzione c relativo

alla potenza di 10 più vicina ad N avremo il numero stimato e privato di gran parte dell'errore percentuale tra la sua stima e il numero primo reale sopra menzionato:

27 631 021 115 929 x 1,08755649 = 30 050 296 339 955, che si trova molto più vicino al valore reale, con differenza molto minore rispetto alla vecchia e più semplice stima;

30 019 171 804 121 – 30 050 296 339 955 = 31 124 535 834

con il nuovo ma molto minore errore percentuale di circa lo 0,1036…% del valore reale, contro il 7,905…% non usando il numero correttore;

infatti 30 019 171 804 121 - 27 631 021 115 929 = 2 388 150 688 192,

con errore percentuale :

2 388 150 688 192/ 300 191 718 041,21 = 7,905% ;

e con 7,905 / 0,1036 = 76,25 volte minore senza il nostro numero correttore della funzione c, che trasforma la vecchia formula

$$N \approx \log N$$

nella nuova formula

$$N \approx \log N \cdot c$$

con N crescente e c decrescente da 1,80 per 10 a 1 per N tendente all'infinito, e con grafico logaritmico capovolto, o iperbolico, come già accennato prima (vedi Grafico 1 finale); c diminuisce quindi sempre più lentamente, avvicinandosi sempre più a 1, e quindi con sempre minore differenza tra valore stimato e valore reale, e quindi tendente a 0 (e il loro rapporto tendente a 1, come da Teorema dei Numeri Primi o TNP);

il numero correttore da usare è quello relativo alla

potenza di 10 immediatamente superiore alla stima N $\approx$ N log(N),

e troviamo è 1, 087750…; con il numero correttore precedente

1,08375569 la differenza tra stima e valore reale è maggiore,

circa il doppio (73 895 449 223 anziché 31 124 535 834), e

quindi meno precisa che con il numero correttore 1,087750….

Come abbiamo visto, tale rapporto o funzione correttrice

è già 1,05978504… per $N = 10^{23}$, vedi successiva Tabella 1,

e sarà ancora più piccola al crescere di 10^n.

Se l’errore percentuale decresce con il crescere di $N \sim N \cdot \log N$,

esso decresce ancora più rapidamente al crescere di $N \sim (N \cdot \log N) \cdot c$,

come abbiamo visto nell’esempio precedente per il trilionesimo numero primo, dove passa dal vecchio valore 7,905% al nuovo valore 0,1036 %

Questa funzione c, oltre che ad abbattere di molto l’errore percentuale tra stima e valore reale N dell’N° -esimo numero primo, conferma, con la sua forma logaritmica capovolta (c decresce da 1,80 a 1 all’inizio velocemente, poi sempre più lentamente, mentre la normale funzione logaritmica cresce velocemente all’inizio e poi sempre più lentamente, come anche la funzione logaritmica $\pi(N)$, detta anche funzione conteggio dei numeri primi) il Teorema dei numeri primi (TNP); e potrebbe avere a che fare anche con la funzione zeta di Riemann, utilizzata anche nel conteggio dei numeri primi con altre formule di maggiore precisione, ma usando la funzione zeta nella formula R(n) e l'integrale nella formula per Li(N), il logaritmo integrale (vedi nell'articolo prima accennato su Polimath).

TABELLA 1 con i valori di N, log N e del numero correttore c, stimato per comodità di calcolo con il rapporto tra 10^n anziché con il numero primo inferiore e immediatamente più vicino, per es. $97 \approx 100$, $997 \approx 1\,000$, ecc., poiché per 10^n

molto più grandi non conosciamo il valore esatto di tale numero

primo; e la differenza $10^n - \pi(10^n)$, cioè tra il valore reale

del 10^n - esimo numero primo e il suo valore stimato, è sempre più

piccola, a livello di qualche centesimo, millesimo ecc. del valore

reale ottenuto dal rapporto tra il valore reale del $\pi(N)$ – esimo

numero primo e la sua stima logaritmica $\pi(N) \cdot \log \pi(N)$;

che non pregiudica affatto il nostro concetto di numero

correttore c calcolato invece con il rapporto $10^n / \pi(N) \cdot \log \pi(N)$.

TABELLA 1 per la stima del numero correttore per ogni potenza di 10^n

$x = N = 10^n$	$\pi(x)$	$\ln(x)$	$\pi(x) \cdot \ln(\pi(x))$	$c = \dfrac{10^n}{\pi(x) \cdot \log \pi(x))}$
(a)	(b)	(c)	(d) = (b)·(c)	(a) / (d)
10^1	4	1,3862…	5,5451…	1,80366882…
10^2	25	3,2188 …	80,4718…	1,24266986…
10^3	168	5,1239…	860,8259…	1,16167501…
$10.^4$	1229	7,1139…	8743,0520…	1,14376535…
10^5	9592	9,1686…	87946,023…	1,13706107….
10^6	78498	11,2708…	884737,4898…	1,13027876…
10^7	664579	13,4069	8909950,201…	1,12234072…

10^{8}	5761455	15,5667…	89686845,03….	1,11499072…
10^{9}	50847534	17,7443…	902256042,5…	1,10833283…
10^{10}	455052511	19,9359…	9071891993	1,10230589…
10^{11}	4118054813	22,1386…	91168160830	1,09687416…
10^{12}	37607912018	24,3504…	915770720388	1,09197638…
10^{13}	346065536839	26,5698…	9194924633252	1,08755649…
10^{14}	3204941750802	28,7957…	92288589349164	1,08335575…
10^{15}	29844570422669	31,0270…	925988204082054	1,07927364…
10^{16}	279238341033925	33,2630…	9988329176260349	1,07661989…
10^{17}	2623557157654233	35,5033…	93144956474276609	1,07359543…
10^{18}	24739954287740860	37,7471…	933863901406885369	1,07081984…
10^{19}	234057667276344607	39,9943…	9360982842457642020	1,06826389…
10^{20}	2220819602560918840	42,2444…	93817209367183165948	1,06590252…
10^{21}	21127269486018731928	44,4970…	940102144297734783158	1,06371419…
10^{22}	201467286689315906290	46,7521…	9419030558779892701656	1,06168038…
10^{23}	1925320391606818006727	49,0093…	94358757430927711988689	1,05978504…
…	…	…	…	…

Altri esempi pratici: vogliamo stimare il valore del N° = 9800° numero primo (valore reale 102 317, prossimo a 100 000 = 10^7), possiamo ottenerlo sia moltiplicandolo per il suo logaritmo log (N) naturale e poi per il numero correttore più vicino alla potenza di 10 superiore a tale stima, ottenendo:

N° = 9 800 × 9,190137…× 1,13706107 = 102 407, molto vicino al valore reale 102 317, con una differenza di sole 90 unità;

(con il solo calcolo N° · log N° avremmo ottenuto

9 800 · 9,190137 = 90 063, con una differenza di

102 317 – 90 063 = 12 254, circa il 12 %

(valore esatto 11,97 = 12254/ 1023,17) contro 0,08% = 90/1023,17 ottenuto usando il numero correttore specifico c = 1,13706107;

e quindi la stima con nostro numero correttore è molto più precisa,

e tanto più precisa quanto più N° è vicino ad una potenza di 10, come

9 800 è vicino a 10 000.

Se invece volessimo stimare proprio il 10 000° numero primo,

dovremmo moltiplicare 10 000 per log (10 000) e poi per 1,13706107,

ottenendo:

10 000 · 9,21034037… · 1,13706107 = 104 727, con differenza

104 729 – 104727 = 2 in difetto sul valore reale 104 729 = 10 000°

numero primo, con errore circa 2 °/oooo; viceversa, non usando il numero correttore, si otterrebbe $N° = 10\,000 \cdot 9{,}21034037 = 92\,103$,

con differenza $104\,729 - 92\,103 = 12\,526 = 12{,}055\%$ di errore

percentuale per difetto sul valore reale 104 729.

Questa non è ovviamente una soluzione definitiva per la cosiddetta "formula dei numeri primi", che già Legendre dimostrò impossibile (poiché non esiste una funzione razionale che dia esattamente la successione di numeri primi, ma solo qualche serie limitata, il record attuale è di 23 numeri primi consecutivi); ma al momento la nostra formula $N \sim N° \cdot \log N \cdot c$ ci sembra la migliore in circolazione: ulteriori ricerche calcoleranno il numero correttore c per N° di forma 10^n molto maggiori di 10^{23} (c tende a 1 per $N° = 10^n$ molto elevati, vedi TABELLA 1, conseguenza pratica del TNP), e magari si troveranno ulteriori perfezionamenti (tipo suddivisione di ogni intervallo in 10 parti più piccole, ottenendo 10 · 23 = 230 valori decrescenti di c anziché solo 23, ecc) della suddetta tabella; la formula, se fosse perfetta (ma è ancora perfettibile, come sopra accennato), sarebbe la cosiddetta funzione p_j, presente, com'è noto, nella formula della funzione zeta di Riemann:

$$\xi(s) = \Pi \frac{1}{1 - p_j^{-s}}$$

dove p_j sarebbe la successione degli N° numeri primi, con N° numeri naturali, ed N = N° · logN · c

E l'ipotesi di Riemann è, com'è noto, uno dei famosi sette problemi del millennio (anzi ora sono sei, perché la congettura di Poincarè è stata di recente dimostrata dal matematico russo G. Perelman e perfezionata da due matematici cinesi).

Questa nuova nostra formula logaritmica $N \approx N \cdot \log N \cdot c$ può anche esser e usata per l'operazione inversa, la funzione $\pi(N)$, detta appunto funzione conteggio dei numeri primi per il conteggio dei numeri primi fino ad N.

Mentre però per il calcolo dell'N° numero primo si prendeva, dalla TABELLA 1, il numero correttore relativo alla potenza di 10 immediatamente più vicina al risultato $N \cdot \log N$, per l'operazione inversa si prende il numero correttore relativo alla potenza di 10 più vicina ad N

La formula $N \approx N \cdot \log N \cdot c$, con c relativo a 10^n vicina

a N log N (1) viene trasformata, per la funzione conteggio, nella

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\log N} \cdot c \quad \text{con c relativo a } 10^n \text{ più vicina a N} \qquad (2)$$

Per esempio poniamo N = 140;

a) se vogliamo stimare il valore del 140° numero primo,

usiamo la (1), e quindi

$140° \approx 140 \cdot \log 140 \cdot c \approx 140 \cdot 4{,}941642423 = 691{,}82$;

la potenza di 10^3 superiore a 691,82 è 10 = 1 000;

c relativo a 1 000 = 1, 16167501;

$140° \approx 140 \cdot 4{,}941642423 \cdot 1{,}16167501 = 803{,}68\ldots$

Il valore reale del 140° numero primo è 809, quindi abbiamo una discrepanza intera di $d = 809 - 803 = 6$; errore percentuale $6 / 8,09 = 0,74\%$, mentre con la vecchia formula abbiamo $d = 809 - 691 = 118$

errore percentuale $118 / 8,09 = 14,58\%$,

precisione della (1) $= 14,58 / 0,74 = 19,70$ volte rispetto alla più semplice ma meno precisa formula $N \approx \log N$

Viceversa, se vogliamo trovare $\pi(N)$, useremo l'altra formula:

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\log N} \cdot c \approx \frac{809}{6,6957\ldots} \cdot 1,16167501 =$$

$$120,8220274 \cdot 1,16167501 = 140,35\ldots,$$

che è un risultato esatto nella parte intera, 140 : infatti fino a N = 809 ci sono 140 numeri primi = π (809), e quindi con discrepanza d = 140 – 140 = 0 :

Con la formula più semplice N / log N abbiamo invece 809 / 6,69 = 120,92, con parte intera 120 e con discrepanza d = 140 – 120 = 20, con errore percentuale 20 / 1,40 = 14,28 %, mentre con la formula corretta l'errore percentuale è nullo, 0%. E così pure per N molto più grandi, per esempio N = 100 000: il centomillesimo numero primo è 1 299 709; con la vecchia formula N $\approx$ N log N abbiamo la stima 100 000 · 11,51292546 = 1 151 925,46

con discrepanza d = 1 299 709 – 1 151 925 = 147 784

errore percentuale 147 784 / 12 997,09 = 12,99 %;

con la nuova formula N ≈ N · log N · c abbiamo

1 151 925,46 · 1,12234072 = 1 292 852,85

1 151 925,46 · 1,13027876 = 1 301 996,881

dove 1,122340072 è il numero correttore relativo a

10 000 000, potenza di 10 superiore 1 151 925

e 1,12234072 e il numero correttore relativo a

1 000 000, potenza di 10 più vicino a

N log N = 1 151 925. Troviamo che tra le due discrepanze d’ = 12 92852 – 1299709 = - 6 857

e d’’ = 1 301 996 – 1 299 709 = 2 286,

la minore è la seconda, poiché 1 151 925 è più vicina a

1 000 000 = 10^6 che a 10 000 000 = 10^7; quindi possiamo ora

modificare la regola della scelta di c: si prende quello corrispondente

alla potenza di 10 più vicina al valore del prodotto N logN,

come in quest’ultimo esempio, anziché quella superiore.

Le due discrepanze di cui sopra significano errori

percentuali di

6 857 / 12 997,09 = 0,52 % per d’,

e 2 286 / 12 997,09 = 0,17 % per d’’,

per cui è preferibile, in questo caso, (e in casi simili) il numero correttore (in questo caso 1,13027876) corrispondente alla potenza di 10 più vicina ad N · log N, anziché quello relativo alla potenza di 10 immediatamente superiore.

In ogni caso, come negli altri esempi, l'errore percentuale si riduce a circa l' 1 %, e ancora sempre meno al crescere di 10^n ; per esempio, per il trilionesimo numero primo ($N = 10^{14}$) l'errore percentuale si riduce all0 0,01%, mentre con la vecchia stima l'errore era del 7,09%.

Viceversa, se vogliamo stimare meglio il numero $\pi(N)$ di numeri primi fino a $N = 10^{n>8}$, dobbiamo invece usare la formula

$$\pi (N) \approx \frac{N}{\log N} \cdot c', \qquad (3)$$

con c' (valori della nuova funzione correttrice c' relativi alle successive potenze di 10, secondo la TABELLA 2 seguente per N intermedi). c' sarà anch'esso valore intermedio, con lo stesso principio usato per la TABELLA 1 ; seguirà un esempio per tutti, e il Grafico 2 finale della nuova funzione correttrice c', un po' diversa dalla precedente funzione c; mentre questa decresce sempre, la funzione c', invece, cresce fino a 1,1592 per N = 1000, e poi decresce per le successive potenze di 10, secondo la TABELLA 2 e il relativo grafico 2.

Consultando tale Tabella, eventualmente in seguito estesa fino a 10^{23} , e suddivisa in 230 o 2 300 valori intermedi, sarà possibile calcolare velocemente $\pi(N)$ ottenendo valori con piccole discrepanze, e senza far uso di logaritmi integrali (per es. con Li (N), ecc.).

Tale estensione sarà fatta in successivi lavori. Con questo lavoro abbiamo voluto introdurre il concetto di funzione logaritmica correttrice c per una stima logaritmica più esatta dell' N° numero primo, e della funzione correttrice logaritmica c’ per una stima più precisa di $\pi(N)$: come si è visto, entrambe le funzioni sono logaritmiche, ma capovolte rispetto alla normale funzione logaritmica, e con qualche piccola differenza c’ cresce fino a $N = 1000$, poi decresce come la funzione c, ma con valori più piccoli, e ci sarà certamente qualche relazione matematica tra i valori di c e i valori di c’. Per esempio da

10^8 in poi c’ si approssima alla radice quadrata del corrispondente valore di c :

infatti, per $N = 10^8$, $c = 1,1149\ldots$ e $c' = 1, 061\ldots \approx 1,055 = \sqrt{1,1149\ldots}$
e per $N = 10^9$, $c = 1,1083$ e $c' = 1,053 \approx \sqrt{1,1083} = 1,05275\ldots$;

mentre per le prime potenze di 10, fino a 10^7 , c e c’ sono comparabili, per es. per $N = 10^5$, $c = 1,1437\ldots$ e $c' = 1,1319\ldots$

TABELLA 2 dei valori della funzione c' (nella colonna "e")

a	b	c	d	e	f = d · e	g = c - f
n	N =10^n	π (N)	π(N)' (1°stima) N /log N	c'= c/d	π(N)'' (2°stima≈π(N)) (N/logN)·c'	
1	10^1	4	4,34	0,9216…	4	4-4 = 0
2	10^2	25	21,73	1,1548…	25,10	25-25 = 0
3	10^3	168	144,92	1,1592…	168	0
4	10^4	1229	1085,77	1,1319…	1228,98	1
5	10^5	9592	8688,09	1,1040…	9591,65	1
6	10^6	78498	72382,46	1,0844…	78498	0
7	10^7	664579	620424,37	1,0711…	664579	0

8	10^8	5761455	5428704,82	1,0612…	5761454	1
9	$\mathbf{10^9}$	**50847534**	**48255095,74**	**1,0537…**	**50847534**	**0**
…	…	…	…	…	…	…
23	10^{23}	1925320391606818006727	9435875743092771198868	1, 019639	1888236877840225337611 3,6039…	0

Anche per 10^{23} c’ ≈ √ c, infatti 1,019639 ≈ 1,02907…= √ 1,059, sebbene un po’ più piccola, mentre per N = 10^8 ed N =10^9

c’ è leggermente più grande dei rispettivi valori di √ c.

Esempio di stima corretta con c’:

fino a N = 104 729 ci sono realmente π (104729) = 10 000 primi

ma fino a 102 401 ce ne sono π (102 451) = 9 800;

con la nostra stima corretta con c' avremo:

$$\pi\,(102\ 451) \approx \frac{N}{\log N} \cdot c' \approx \frac{102\ 451}{11{,}5371} = 8\ 880{,}13 \cdot 1{,}1040 = 9\ 803$$

(la potenza di 10 più vicina a 8880 è 10 000, alla quale

corrisponde il valore di c' = 1,1040) ; c'è una discrepanza

di 9803 - 9800 = 3, con errore percentuale 3/ 98,00 = 0,03 %;

mentre con la più semplice vecchia stima logaritmica abbiamo

9800 – 8880 = 920, con errore percentuale 920 / 98,00 = 9.38% :

la nuova stima è 9, 38 / 0,03 = 312 volte più precisa, abbattendo

anche qui l'errore percentuale, come nella stima dell' N° numero primo.

Ovviamente anche la TABELLA 2 può essere estesa fino a 10^{23} ,

ma il nostro successivo grafico 2 si limiterà ai primi 9

valori di c', e cioè fino a 10^9 come da precedente TABELLA 2.

Nota 1 sul confronto tra le stime di π (N) con la nostra formula

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\log N} \cdot c' \qquad (1)$$

e le stime con la formula relativa al logaritmo integrale

$$Li(N) \approx \int^{n} \frac{1}{\log N} \cdot dx \qquad (2)$$

a partire da 10^3 = 1 000 fino a 10^8 = 100 000 000.

Con la (1) avremo rispettivamente :

$$\pi\,(1\,000) \approx \frac{1\,000}{\log 1000} \cdot 1{,}1592 = 167{,}81 \approx \quad 168 \quad \text{valore reale (v.r.)}$$

$$\pi\,(10\,000) \approx \frac{10\,000}{\log 10\,000} \cdot 1{,}1319 = 1\,228{,}9 \approx \quad 1\,229 \quad \text{v.r.}$$

…	…	…	9 589	≈	9 592	v.r.
…	…	…	78 491	≈	78 498	v.r.
…	…	…	664 536	≈	664 589	v.r
…	…	…	5 760 941	≈	5 761 455	v.r.

Valori molto più precisi si ottengono ovviamente usando più cifre sia nel logaritmo di 10^n (qui limitate a otto cifre decimali) sia nelle cifre del numero c' della funzione c' (qui limitate a sole quattro cifre), fino ad ottenere una discrepanza sempre più prossima a 0 per qualsiasi N = 10^n ;

per esempio per N = 10^8 , log 10^8 = 18,42068074 (8 cifre decimali),

e c' = 1,061299232 (9 cifre decimali), e quindi

$$\frac{100\,000\,000}{18{,}42968074} \cdot 1{,}061299232 = 542858{,}025 \cdot 1{,}61299232 =$$

5 761 455,003 ≈ 5 761 455 = valore reale, con soltanto 0,003 di discrepanza.

Ne consegue, già con i suddetti calcoli più rapidi ma un po' meno precisi, la tabella seguente che confronta i valori delle stime di $\pi(N)$ ottenuti con la formula (1) e quelli ottenuti con la formula (2), prelevati da una tabella pubblicata dal già citato articolo web di K. Devlin ecc.

TABELLA 3 di confronto stime valori e loro differenze

$N = 10^n$	$\pi(N)$ v.r.	stime (2)	diff.	stime (1)	differenza
10^3	168	178	- 10	167	1
10^4	1 229	1 246	-17	1 228	1
10^5	9 592	9 630	-38	9 589	3
10^6	78 498	78 628	-130	78 491	7
10^7	664 579	664 918	-339	664 536	43
10^8	5 761 455	5 762 209	-754	5 760 941	514

Come si vede chiaramente, le stime (1) sono molto più precise delle stime (2), che comportano un calcolo integrale, assente nella formula (1).

Nota 2 sul calcolo proporzionale per 10 intervalli numerici crescenti tra 10^n e 10^{n+1} e per 10 intervalli decrescenti tra c' relativo a 10^n e c' relativo a 10^{n+1}, poiché c' è una funzione decrescente al crescere di 10^n.

Si divide la differenza tra i due c' in nove parti, e una parte (un nono) si sottrae da c, se il valore $N \cdot \log N$ è vicino o coincide con $2 \cdot 10^n$, o si sottraggono k decimi da c' se $N \cdot \log N$ è vicino a $k \cdot 10^n$.

Per esempio, se $N = 10^6$, il relativo numero c' è 1,0844, mentre il numero c' per 10^7 è 1,0711:

$1{,}0844 - 1{,}0711 = 0{,}0133$;

$0{,}0133 / 9 = 0{,}00147$ d = nono proporzionale inverso

Tabella 3 $c - k \cdot d$ per il calcolo di c' per $N = (k - 1) \cdot N$

c'	k	d	c''			$(k-1) \cdot N$	
1,0844 -	0	· 0,00147	= 1,0844	valido per		N = 1 000 000	$= 1 \cdot 10^6$
1,0844 -	1	· 0,00147	= 1,08293	valido per		N = 2 000 000	$= 2 \cdot 10^6$
1,0844 –	2	· 0,00147	= 1,08146	…	…	3 000 000	$= 3 \cdot 10^6$
…	…		1,07999	…	…	4 000 000	…
…	…		1,07852	…	…	5 000 000	…
…	…		1,07705	…	…	6 000 000	…
…	…		1,07558	…	…	7 000 000	…

…	…	1,07411	…	…	8 000 000	…
…	…	1,07264	…	…	9 000 000	…
…	…	1,0711	…	…	10.000 000	

Per esempio, per $\pi(N) = \pi\ (3\ 000\ 000)$,

con la formula (1) avremo

$$\pi\ (3000\ 000) \approx \frac{3\ 000\ 000}{14{,}91412285} \cdot 1{,}08146 = 217\ 537$$

numero non molto distante da quello reale, che però non conosciamo,

ma possiamo fare una stima con la formula di Legendre:

$$\pi\ (N) \approx \frac{3\ 000\ 000}{14{,}9141 - 1{,}08366} = \frac{3\ 000\ 000}{13{,}822634} = 217\ 035$$

valore più preciso della semplice stima $N / \log N$:

$$3\,000\,000 / 14{,}9141 = 201\,151$$

Un esempio più semplice ma più facilmente controllabile

è la stima di π (3000):

poiché c' relativo a 1000 è 1,1592 e c' relativo a

10 000 è 1,1319, un nono della loro differenza è

$$\frac{1{,}1592-1{,}1319}{9} = \frac{0{,}0273}{9} = 0{,}0033$$

che va moltiplicato per 3 (= 0,0099) e poi sottratto a 1,1592,

ottenendo c' relativo a 3000:

$$c' \approx 1{,}1592 - 0{,}0099 = 1{,}1493$$

per cui $\pi\,(3000) \approx \dfrac{3000}{\log 3000} \cdot 1{,}1493 = \dfrac{3000}{8{,}006367568} \cdot 1{,}1493$

$= 430,\, 64,$ valore reale $=$ 430, con discrepanza intera

$430 - 430 = 0.$

Viceversa, se vogliamo trovare il 430° numero primo = 2999

possiamo agire allo stesso modo:

poiché $430 \cdot \log 430 = 430 \cdot 6{,}063785209 = 2607{,}42764$

dobbiamo prendere c relativo a 1000, che è 1, 16167501,

c relativo a 10 000, che è 1,14376535, calcolarne la differenza

1,16167501 – 1,14376535 = 0,01790966; dividere per 9 tale differenza, ottenendo 0,001989962222, moltiplicarla per 2 (perché 2607 è circa 2 · 1 000 = 2 000) ottenendo 0,003979924444, e sottrarla a c relativo a 1 000, ottenendo 1,157695086, che è il numero c relativo a 2 000; moltiplicando questo numero c proporzionale per 2607, avremo 3 018, con discrepanza 3 018 -2 999 = 19, con errore percentuale 19 / 29,99 = 0,63 %; mentre senza il suddetto calcolo proporzionale avremmo avuto 2 607 · 1,16167501 = 3 028, con maggiore discrepanza 3 028 – 2 999 = 29, e quindi con maggiore errore percentuale 29 /29,98 = 0,96 %, in ogni caso sempre sotto l'1%, come in tutti gli altri esempi precedenti.

Errori percentuali ancora più piccoli si ottengono dividendo la differenza tra i due c consecutivi per 99, 999, ecc. ottenendo una stima ancora più precisa.

Moltiplicando infatti il nono della differenza per 2,6 (dalle prime due cifre di 2 607) e sottraendolo a c = 1,16167501, e poi moltiplicando il risultato per 2 607, si ottiene 3 001, con discrepanza 3001 – 2999 = 2, con errore percentuale 2 / 29,99 = 0,066 %, contro il 13 % originario con N ≈ log N

Nella stima proporzionale di π(N), bisogna tenere presente però che per π (N) fino a N = 1000, c' cresce invece di decrescere, e quindi i noni vanno sommati a c’, e non

sottratti, come per $N > 10^3$, e per tutte le potenze di 10^n

per la stima di N = N° numero primo, poiché in questo caso

c è sempre crescente, anche per le prime potenze di 10 (vedi

TABELLA 1).

CONCLUSIONE

Queste due nuove funzioni logaritmiche correttrici c e c', sebbene graficamente "capovolte" (la funzione c somiglia perfettamente al grafico della funzione zeta pubblicata sul libro di Derbyshire "L'ossessione dei numeri" a pag 96), permetteranno, come abbiamo visto, di abbattere a meno dell'1 % l'errore percentuale in entrambi i casi, stima dell' N° numero primo e di π (N), tramite le formule integrate con i valori di c e c' rispettivamente, e quindi di conoscere meglio la distribuzione dei numeri primi; pertanto esse faranno maggiore chiarezza sul

Teorema dei Numeri Primi detto anche TNP) e sulle sue note relazioni con l'ipotesi di Riemann con la quale è connesso. Probabilmente, le due nuove funzioni c e c' potrebbero, di conseguenza, se ulteriormente approfondite, essere utili anche alla dimostrazione dell'ipotesi di Riemann, possibilità che ovviamente verrà esplorata anche da noi in futuri lavori.

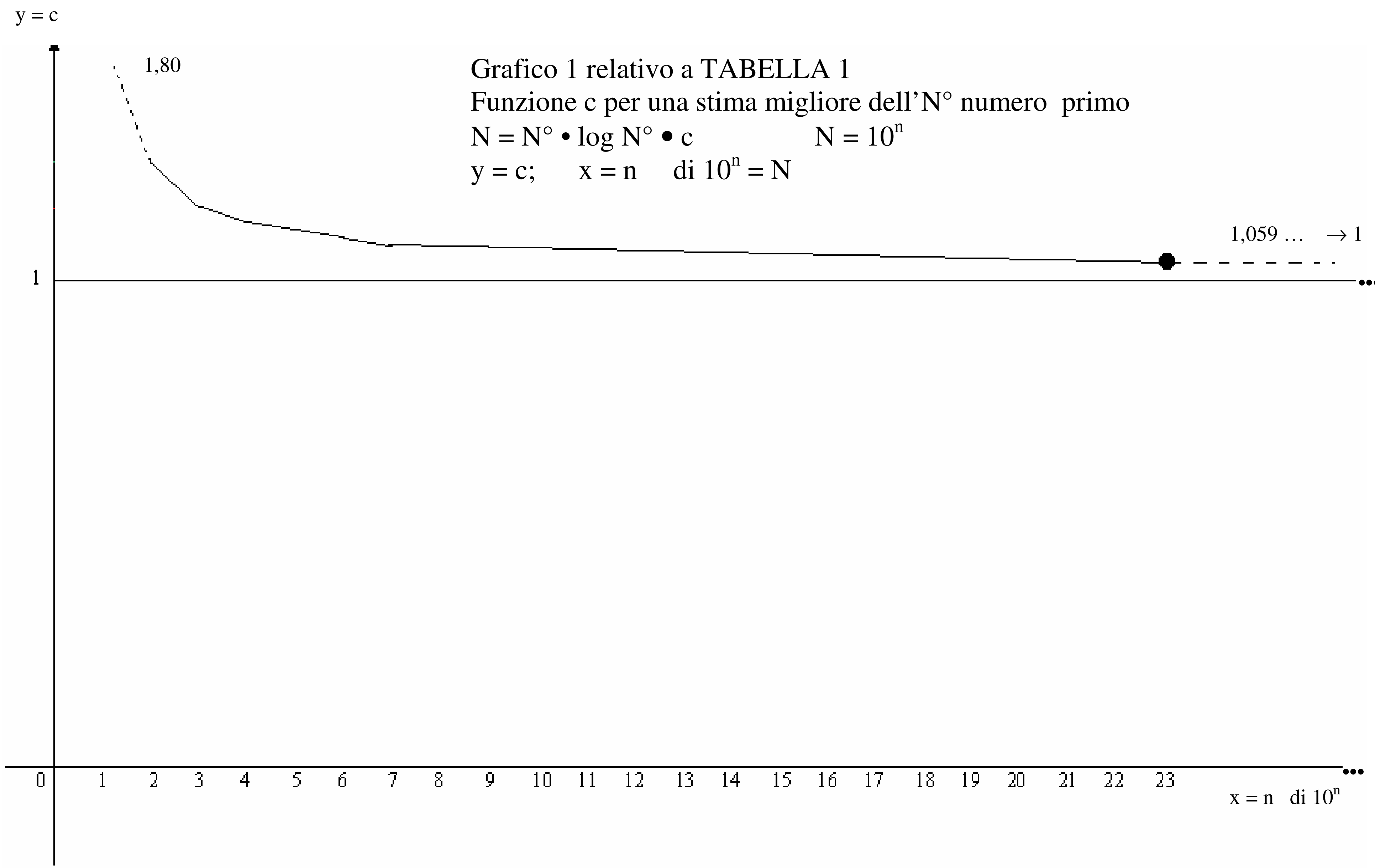
y = c
1,80
Grafico 1 relativo a TABELLA 1
Funzione c per una stima migliore dell'N° numero primo
N = N° • log N° • c N = 10^n
y = c; x = n di 10^n = N
1,059 … → 1
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
x = n di 10^n

Grafico 2 relativo a TABELLA 2

Funzione c’ per una stima migliore di π (N)

y = c’ x = n di N = 10^n

$$\pi(N) \simeq \frac{N}{\log N} \bullet c'$$