

**PROPOSTA DI DIMOSTRAZIONE  
DELLA VARIANTE RIEMANN DI  
LAGARIAS (RH1)**

**(Ed equivalente all'ipotesi di Riemann RH, con  $RH1 = RH$ )**

**Francesco Di Noto e Michele Nardelli<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>Dipartimento di Scienze della Terra Università degli Studi  
di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10  
80138 Napoli, (Italy)

<sup>2</sup>Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"  
Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Polo delle  
Scienze e delle Tecnologie  
Monte S. Angelo, Via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

# PROPOSTA DI DIMOSTRAZIONE DELLA VARIANTE RIEMANN DI LAGARIAS (RH1)

(Ed equivalente all'ipotesi di Riemann RH, con  $RH1 = RH$ )

-----

## INTRODUZIONE

Dal blog matematico del Prof Cerruti (Università di Torino)

“<http://alpha01.dm.unito.it/personalpages/cerruti/luglio04->

gennaio28.html “ , pag. 35 di 47, leggiamo che:

“...Esistono molte formulazioni della RH, ad essa logicamente equivalenti, ma in apparenza totalmente diverse! Ne vediamo insieme quattro, che denoteremo come RH1 (oggetto di questo lavoro, N.d.A.A), RH2, RH3, RH4. Una qualunque di esse è vera (o falsa) solo se è vera (o falsa) la RH.

Iniziamo da quella che mi sembra più comprensibile da parte dei non addetti ai lavori, dovuta a Lagarias (2000).

La chiamo RH1

RH1

Denotiamo con  $H_n$  la somma degli inversi dei primi  $n$  interi positivi

$$H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$$

Denotiamo con  $\sigma(n)$  la somma dei divisori di  $n$ .

La RH è equivalente al fatto che, per ogni  $n$  maggiore di 1,

$$\sigma(n) < H_n + e^{H_n} \cdot \log(H_n)$$

dove  $\log$  è il logaritmo naturale, in base  $e$ .

Per capire cosa dice la RH1, vediamo un caso particolare.  
 Poniamo  $n = 20$ .

Troviamo  $H_{20} = 3,59774$ ,  $e^{3,59774} = 36,5156$ ,  $\log(3,59774) = 1,2803$ ,  
 $\sigma(20) = 42$

Allora la RH1 è confermata per  $n = 20$  in quanto

$$42 < 3,59774 + 36,5156 \cdot 1,28031 = 50,349$$

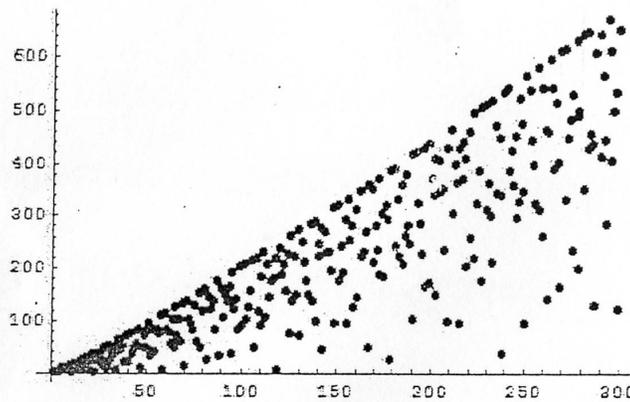
Nella figura 1 sottostante vediamo segnate le differenze

$$L(n) = H_n + e^{H_n} \cdot \log(H_n) - \sigma(n) \quad (1)$$

per  $n$  che varia da 2 a 300:

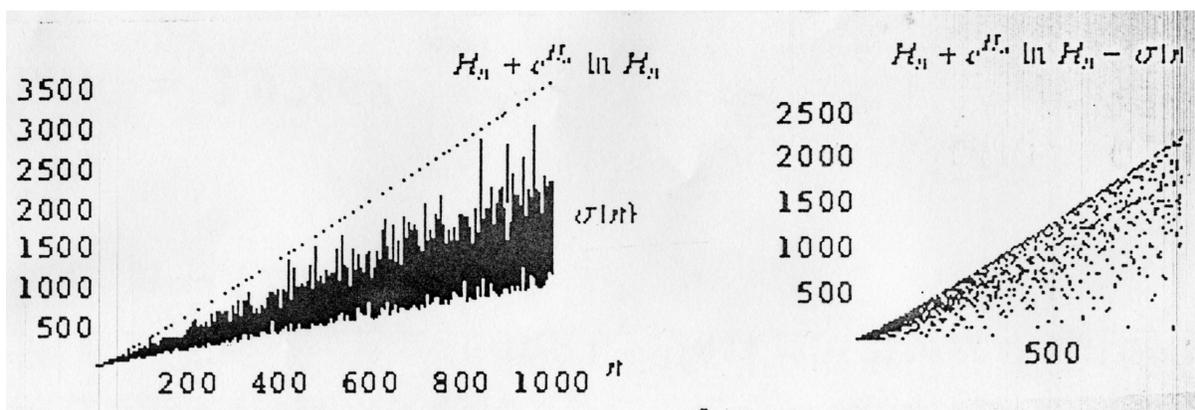
**Fig. 1**

Nella figura sottostante vediamo segnate le differenze  $L(n) = (H_n + e^{H_n} \log(H_n)) - \sigma(n)$  per  $n$  che varia da 2 a 300



(Nota degli Autori: un'altra immagine più estesa, fino a  $n = 1000$ , e anche più idonea al nostro scopo, è tratta dalla voce "Riemann Hypothesis" del sito [mathworld.wolfram.com](http://mathworld.wolfram.com), e che riportiamo qui sotto: si nota facilmente come la linea inferiore del primo grafico  $H_n + e^{-\sigma(n)} \ln H_n$  si allontana gradualmente dall'ascissa, il che si ripercuote poi sul secondo grafico  $H_n + e^{-\sigma(n)} \ln H_n - \sigma(n) = L(n)$  fino a  $n = 500$ , più estese delle nostre figure 1 e 2, fino a  $n = 300$ , rendendo più chiara la nostra dimostrazione che i contro esempi  $L(n) = 0$  ed  $L(n) < 0$  non possono esistere, cosicché RH1 = RH sono entrambe vere ed equivalenti.

**Fig. 2**



**“Come si vede, alcuni individui si staccano dalla massa e giungono pericolosamente vicino a 0.**

**Tra 50 e 300 si raggiungono i valori più bassi di  $L(n)$  per  $n = 60$  e  $n = 120$**

$$L(60) = 2,97668$$

$$L(120) = 6,06265$$

**RH1 è equivalente a RH, una di esse è vera se e solo se è vera l'altra. Chiunque riuscisse a provare che  $L(n)$  è maggiore di 0 per ogni  $n$ , cioè che i puntini in figura non vanno mai sotto l'asse delle ascisse, per quanto si estenda il grafico, guadagnerebbe fama imperitura e un milione di dollari.**

**Si rimane stupiti dall'assenza in RH1 di qualsiasi riferimento ai numeri complessi o ai numeri primi. Ovviamente il legame esiste, ma è molto nascosto”.**

**Lo scopo di questo nostro lavoro è di dimostrare che**

$$(Ln) \geq 0 \text{ per ogni } n, \quad (2)$$

**specialmente per i fattoriali  $n!$  e tutti i numeri  $n$**

**cosiddetti abbondanti, cioè quelli con molti fattori primi e**

**quindi con più divisori e con la loro somma più grande**

**(e quindi più pericolosa) rispetto ad altri numeri meno**

**abbondanti o ”difettivi”;** per esempio i numeri primi  $p$ , che

**hanno come fattori 1 e se stessi e quindi  $\sigma(p) = p + 1$ .**

**Anche Jeff Lagarias, nel suo lavoro “An Elementar Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis (May 5, 2001) al quale si riferisce il Prof. Cerruti quando parla della RH1 nel suo blog, parla al paragrafo 2, dei numeri abbondanti colossali (Colossal Abundant Numbers), esposti in seguito in una interessante tabella ( Table 1), che useremo per la nostra proposta di dimostrazione, contenente alcuni fattoriali e loro multipli, per esempio**

$$7! = 5\ 040$$

$$5\ 040 \times 11 = 55\ 440$$

$$5\ 040 \times 143 = 720\ 720 \quad \text{con } 143 = 11 \times 13$$

$$5\ 040 \times 286 = 1\ 441\ 440 \quad \text{con } 286 = 2 \times 11 \times 13$$

**e così via, **tutti multipli di 60** (numero citato dal Prof.**

**Cerruti nel suo esempio, insieme a  $120 = 2 \times 60$ ), e quindi**

**interessanti per la nostra dimostrazione: se essi, che**

**insieme a tutti i loro multipli sono i più pericolosi,**

soddisfano l'equivalenza tra la RH1 e la RH tramite le relazioni equivalenti (1) e (2), anche tutti gli altri numeri intermedi, primi compresi, la soddisferanno, poiché hanno una  $L(n)$  più alta e quindi più lontano dall'ascissa. I valori minimi di  $L(n)$  con  $n$  numeri abbondanti, formeranno, come vedremo, una linea minima inferiore che si allontanerà sempre più dall'ascissa al crescere di  $n$  abbondante, mentre, all'opposto, per tutti gli altri  $n$  meno abbondanti e difettivi, i valori di  $L(n)$  si distribuiscono al di sopra di tale linea; mentre i valori di  $L(p)$  con  $p$  primo essendo i più alti possibili, si troveranno tutti su una linea massima superiore.

Ovviamente, non ci saranno valori di  $L(p)$  al di sopra della linea massima (superiore) e neanche valori di  $L(n)$  con  $n$  abbondante, al di sotto della linea minima inferiore.

E quindi non ci sarà mai un valore di  $L(n) \leq 0$  (eventuale, ma impossibile contro esempio nel possibile caso che

avessimo ragione noi); il che conferma e dimostra

l'equivalenza proposta da Lagarias tra la RH1 e la RH.

### DIMOSTRAZIONE (prima parte)

Cominceremo la nostra dimostrazione osservando i valori di  $L(n)$  per numeri  $n$  abbondanti piccoli, per poi estendere i risultati a  $n$  abbondanti molto grandi, cosiddetti colossali, nella seconda parte.

Abbiamo visto nei due soli esempi del Prof. Cerruti, i numeri 60 e 120, con i loro rispettivi piccoli valori di  $L(n)$  proprio perché essi sono multipli del primo numero abbondante

$n = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ , con  $\sigma(12) = 12 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ , e con rapporto  $\sigma(n) / n = 28 / 12 = 2,3333\dots$ ;

rapporto che cresce lentamente al crescere di  $n$  abbondante, e che anche Lagarias riporta nella sua TABLE 1 per i numeri cosiddetti “abbondanti colossali”.

Noi troviamo, come vedremo nelle nostre tabelle, che tale

**rapporto è tuttavia sempre minore del rapporto**

$$r' = (H_n + e^{H_n} \cdot \log(H_n)) / n$$

**(l'altro rapporto analogo a  $\sigma(n) / n$ ), ma non preso in considerazione da Lagarias, e che invece è molto importante per la dimostrazione. I numeri 60 e 120, poiché multipli di 12, sono quindi anch'essi abbondanti, cioè più grandi della somma dei loro divisori propri, cioè  $s(n) > n$ , al contrario dei numeri difettivi (o deficienti), che sono più piccoli dei suoi divisori propri, cioè  $s(n) < n$ ; proprio al contrario dei numeri difettivi sono i numeri primi, esempi di numeri abbondanti sono i multipli di 12, e più in generale, i fattoriali  $n!$  e i loro multipli  $n! \cdot k$ , come già accennato prima.**

**I numeri abbondanti hanno più fattori primi, più divisori e quindi una loro somma più alta che in altri numeri, e di conseguenza una differenza  $L(n)$  più piccola; da qui la loro presunta “pericolosità” per l'equivalenza tra RH1 e RH, pericolosità che, come dimostreremo, è del tutto infondata.**

**Ci baseremo su alcuni multipli di 60, perché contengono molti fattoriali, e loro multipli, da  $5!$  in poi:**

$$\begin{array}{rclcl}
60 \times 1 & = & 60 & = & 4! \times 2,5 = 24 \times 2,5 \\
60 \times 2 & = & 120 & = & 5! \\
60 \times 12 & = & 720 & = & 6! \\
60 \times 84 & = & 5\,040 & = & 7! \\
\dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Esaminando invece i numeri abbondanti multipli di 12, i risultati non cambierebbero, poiché essi sono già compresi nei fattoriali, per es.  $120/12 = 10$ ,  $720/12 = 60$ ,  $5040/12 = 420$ .

Per brevità di calcolo, prenderemo in esame solo i multipli di 60 che, come tutti i numeri abbondanti, hanno valori di  $L(n)$  più bassi come fatto osservare nella figura 1. Tutti gli altri numeri hanno  $L(n)$  più alte, e quindi, non essendo pericolosi per l'equivalenza di Lagarias tra RH1 ed RH, li trascureremo del tutto.

Accenneremo solo ai numeri primi, tutti difettivi, avendo un valore  $\sigma(p) = p + 1$  e quindi una elevata differenza  $L(p)$  che nella figura 1 si posiziona sempre sulla linea massima (superiore). Tutti gli altri numeri compresi tra i numeri primi e i numeri abbondanti hanno, come accennato, le loro  $L(n)$  comprese tra le due linee, e i soli numeri abbondanti hanno le loro  $L(n)$  sulla linea minima (inferiore), che pur essendo vicinissima all'ascissa, non la toccherà mai, anzi si

**allontanerà lentamente sempre più, sia pure con piccole irregolarità, confermando l'equivalenza  $RH1 = RH$ .**

**Infatti i numeri abbondanti  $n$  hanno un valore  $\sigma(n)$  molto alto rispetto a quello dei numeri primi  $\sigma(p)$ , e quindi si avvicina pericolosamente al relativo valore di  $H_n + e^{-\frac{1}{H_n}} \cdot \log(H_n)$ , (che cresce invece in modo più uniforme e regolare di  $\sigma(n)$ ) rendendo più piccola la differenza  $L(n)$  che tuttavia, ricordiamo, non tocca mai l'ascissa, ne tanto meno va sotto di essa (in entrambi i casi, se fosse  $L(n) \leq 0$ , allora  $RH1$  ed  $RH$  non sarebbero più equivalenti).**

**Ecco perché ci baseremo soltanto sui numeri abbondanti  $n$  multipli di 60 prima e sui numeri abbondanti colossali poi, trascurando tutti gli altri, meno pericolosi per l'equivalenza  $RH1 = RH$  di Lagarias. Se non riuscissero tali numeri ad invalidare tale equivalenza, non riuscirebbero certamente nemmeno tutti gli altri numeri: ne quelli meno abbondanti, ne tanto meno i numeri primi, e la  $RH1$  è salva insieme alla  $RH$ .**

10 000  
10

Poiché la RH è valida fino a numeri enormi, tipo 10,  
(dopo non si sa ancora bene) citato da John Derbyshire nel suo libro  
“L’ossessione dei numeri primi”, Bollati Boringhieri Editore, vedi  
Nota 1, possiamo ritenere che la RH1 sia valida anch’essa fino a tale  
numero enorme, e solo dopo di tale numero si potrebbe trovare un  
contro esempio anche per la RH1, sempre nel caso che essa e la RH  
siano false (nel caso della RH il contro esempio sarebbe, com’è noto,  
uno o più zeri fuori dalla retta critica  $\frac{1}{2}$ ).

Con la nostra dimostrazione, si raggiunge l’assoluta  
certezza che  $L(n)$  sarà sempre positiva e che quindi sia la RH1  
sia la RH sono vere.

Baseremo la prima tabella sui calcoli per i **multipli di 60 fino a  
720**, e la seconda tabella sui calcoli per i numeri abbondanti colossali  
riportati dal Prof. Lagarias nel suo articolo, ma anche sui rapporti  
 $r' = (H_n + e^{H_n} \cdot \log(H_n)) / n$  ed  $r = \sigma(n) / n$   
(Lagarias prende in considerazione soltanto il secondo rapporto)  
dimostrando che  $r' > r$ , cioè che il primo rapporto è sempre  
maggiore del secondo per ogni  $n$ , e che di conseguenza la differenza

**$L(n)$  è sempre positiva per ogni  $n$ , cosa che ovviamente conferma l'equivalenza  $RH1 = RH$  per ogni  $n$ .**

**Se riguardiamo la figura 1, e uniamo con un tratto i valori minimi di  $L(60)$  e di  $L(120)$ , e cioè 2,97668 e 6,06265, già possiamo renderci conto (figura 2.) che questo tratto si allontana lentamente dall'ascissa (tocca anche il valore  $L(240)$ , anch'esso basso, e che come vedremo è di circa 30,85... come del resto confermato approssimativamente anche dalla figura 1 non molto precisa nei dettagli, ma molto indicativa pur se approssimata). Questo proprio perché, i multipli di 60, essendo anch'essi abbondanti, hanno  $L(n)$  più piccole mentre tutti gli altri numeri fino a 240, essendo meno abbondanti, hanno  $L(n)$  più grandi e quindi non possono ricadere al di sotto di tale linea minima inferiore, e sotto la quale, se estesa all'infinito, non ci saranno mai  $L(n)$ , essendo essa stessa il limite per le  $L(n)$  dei numeri abbondanti; mentre ovviamente la linea superiore riporta tutte le  $L(p)$  dei numeri primi; tra le due linee, naturalmente, come già detto, le  $L(n)$  di tutti gli altri numeri intermedi tra i primi e gli abbondanti.**

**Le due linee formano in pratica un angolo con origine in**

$y = 0$  e  $x = 0$ , che si estende all'infinito, e con due zone vuote di valori: una al di sopra della linea superiore e l'altra al di sotto della linea inferiore, anche se, come vedremo, tali linee non sono perfettamente rette, avendo, almeno quella inferiore, delle piccole variazioni in più o in meno, che tuttavia non sono influenti per la dimostrazione.

Ed è proprio questo che vogliamo dimostrare con i calcoli: che sotto tale linea inferiore infinita non ci saranno mai valori di  $L(n)$  di numeri abbondanti, normali o "colossali" che siano, e quindi la RH1 e la RH sono salve, cioè entrambe vere.

**Nella nostra prima tabella ci limiteremo ai multipli di 60 fino a  $720 = 12 \cdot 60$ , con accenno a  $7! = 5040$ , trovando un buon riscontro alla nostra ipotesi sulla linea inferiore, che è alla base della nostra dimostrazione.**

Per i calcoli ci baseremo sull'approssimazione della serie armonica  $H_n \approx \log(n) + 0,57721$  (costante di Eulero – Mascheroni), tratta dalla voce "Serie armonica" della nota Enciclopedia libera "Wikipedia" su Internet, e così pure sulla voce "Tavola dei divisori" per i numeri  $\sigma(n)$ , anziché calcolarli singolarmente volta per volta

al crescere di  $n = 60 \cdot k$ .

Qui ricordiamo brevemente che l'angolo dei valori delle  $L(n)$  somiglia moltissimo all'analogo angolo - seppure meno ampio - dell'andamento ciclico del numero delle coppie di Goldbach: anche qui c'entrano i numeri abbondanti multipli di forma  $6n$  e ancora meglio di forma  $12n$  e che hanno, per precisi motivi aritmetici, più coppie di Goldbach rispetto ad altri numeri pari di forma  $6n \pm 2$ ,  $6n \pm 4$ , non divisibili per 3 e quindi meno abbondanti, mancando in essi il fattore 3 (Vedi Grafici finali 1 e 2, e il nostro lavoro

“Connessione Goldbach – gemelli – Polignac” sul sito

<http://xoomer.alice.it/stringtheory>

con Nota riassuntiva sull'Archivio Solar del Consiglio Nazionale delle Ricerche).

Quindi, possibile remota connessione, almeno dal punto di vista grafico, tra la nostra soluzione della Congettura di Goldbach, i numeri abbondanti e la RH1; e quindi, indirettamente, e più in generale:  $\text{Goldbach} \rightarrow \text{RH1} \rightarrow \text{RH}$ , connessione teorica che verrà magari meglio approfondita in seguito nei dettagli.

Mentre la RH classica riguarda la distribuzione dei soli numeri

**primi sulla retta numerica e anche degli zeri della funzione zeta sul piano complesso e sulla retta critica, la RH1 riguarda la distribuzione dei numeri primi e dei numeri composti (abbondanti) sul piano numerico, in particolare sull'angolo da noi ipotizzato, tramite le differenze  $L(n)$ : le  $L(p)$  sulla linea superiore e le  $L(n)$  con "n" numeri abbondanti (nel nostro calcolo i multipli di 60) sulla linea inferiore, tutte le altre diffuse entro il suddetto angolo, vedi figura 2.**

**TABELLA 1** relativa ai numeri di forma  $60 \cdot k$  fino a  $720 = 60 \cdot 12$

(risultati approssimati a sole due cifre decimali, più che sufficienti)

<b>k</b>	<b>n=60·k</b>	$H_n$	$\frac{H_n}{e}$	$\log(H_n)$	$\frac{H_n}{e} \cdot \log(H_n)$	$H_n + \frac{H_n}{e} \cdot \log(H_n)$	$\sigma(n)$	$L(n)$
1	60	4,67	106,80	1,54	164,63	169,31	168	1,31
								reale 2,97
2	120	5,36	213,68	1,67	358,82	364,19	360	4,19
								reale 6,06
3	180	5,77	320,37	1,75	561,49	567,26	546	21,26
4	240	6,05	426,82	1,80	768,79	774,85	744	30,85
5	300	6,28	533,92	1,83	981,08	987,36	868	119,36
6	360	6,46	640,74	1,86	1 195,69	1 202,15	1 170	32,15
7	420	6,61	747,48	1,88	1 412,52	1 419,52	1 344	75,13
8	480	6,75	854,22	1,90	1 631,30	1 638,05	1 512	126,05
9	540	6,86	961,01	1,92	1 851,84	1 858,71	1 680	178,71
10	600	6,97	1 067,78	1,94	2 073,92	2 080,89	1 860	220,89
11	660	7,06	1 174,58	1,95	2 297,12	2 304,19	2 016	288,19
12	720	7,15	1 281,33	1,96	2 521,66	2 528,82	2 418	110,88
...	...	...	...	...	...	...	...	...
84	5 040	9,10	8 967,44	2,20	19 804,60	19 813,70	18 890	923,70
...	...	...	...	...	...	...	...	...

**Si nota bene che quando  $k$  è primo,  $L(n) = L(60 \cdot k)$  è un po' più grande dei valori vicini per  $L(60 \cdot k)$  con  $k$  non primo, e specialmente se anche  $k$  è abbondante; per es.  $k = 12$  di  $n = 60 \cdot 12 = 720$ , con  $L(720) = 110,72$ , minore di  $L(60 \cdot 11) = L(660) = 288,19$ .**

**$L(n)$  tende a diminuire, quindi, per  $n$  prodotto di numeri entrambi abbondanti, come 60 e 12 nell'esempio sopra riportato di  $n = 60 \cdot 12 = 720$ , pur tuttavia senza scendere pericolosamente verso il valore  $L(n) \leq 0$ ; mentre per il prodotto tra un numero abbondante ed un numero primo,  $L(n)$  sale rispetto ai valori vicini nella Tabella 1. Questa può essere costruita anche con i multipli di 12, di 36, di 120, ecc., i risultati finali sull'andamento di  $L(n)$  non cambiano, essendo leggermente dipendenti in ogni caso da  $k$  primo o composto e più o meno abbondante, come negli esempi di cui sopra.**

**Altre eventuali tabelle utili ai fini della dimostrazione :**

**TABELLA 3**

con i rapporti  $r = \sigma(n) / n$  con  $n$  multipli di 60 (vedi Tabella 1)

<b>k</b>	<b>n</b>	<b><math>\sigma(n)</math></b>	<b><math>r = \sigma(n) / n</math></b>
1	60	168	2,8
2	120	360	3
3	180	546	3,03 k primo,
4	240	744	3,1
5	300	848	2,82 k primo,
6	360	1 170	3,25
7	420	1 344	3,2 k primo,
8	480	1 512	3,15
9	540	1 680	3,11
10	600	1 860	3,1
11	660	2 016	3,05 k primo,
12	720	2 418	3,35
...	...	...	...
84	5 040	18 890	3,74
...	...	...	...

Anche qui si nota che se  $k$  è primo, il rapporto è un po' più piccolo dei rapporti vicini (precedente e successivo), vedi per  $k = 5$  e  $k = 11$ ; il che comporta alla fine un valore di  $L(n)$  leggermente più alto, e quindi più favorevole all'equivalenza  $RH1 = RH$ ,

vedi TABELLA 1. Idem per i numeri abbondanti colossali, che vedremo nelle successive tabelle.

Il valore di  $H_n + e^{-H_n} \cdot \log(H_n)$  cresce più velocemente di  $\sigma(n)$  perché, oltre ad  $H_n$  (sempre più irrilevante al crescere di  $n$ ), contiene un esponenziale e prodotto (gli elementi che crescono di più), mentre  $\sigma(n)$  è una semplice somma, esattamente la somma dei divisori di  $n$ , e che raggiunge i valori più alti (ed in teoria i più pericolosi) per  $n$  abbondanti, abbondanti colossali e loro multipli  $n \cdot k$ , specialmente se  $k$  è anch'esso un numero composto e/o abbondante, come prima accennato.

Ma in pratica, come mostrano le tabelle e i grafici,  $\sigma(n)$  non raggiunge mai la somma dei primi due elementi, e quindi la loro differenza  $L(n)$  è sempre positiva.

Vediamo ora un altro rapporto,  $r' = \frac{H_n}{N} \cdot \log(H_n)$

e le differenze, sempre positive, con  $r = \frac{\sigma(n)}{n}$  e quindi  $d = r' < r$

relazione che equivale alla  $L(n)$  della RH1.

Si trova che, in ogni caso,  $d$  è sempre positiva e compresa tra 1 e 1,5, sia per i multipli di 60 sia per i numeri abbondanti

colossali.

TABELLA 4 dei rapporti  $r'$  ed  $r$  per  $n$  multipli di 60

$k$	$n$	$H_n + e^{-\frac{H_n}{n}} \cdot \log(H_n)$	$r'$	$\sigma(n)$	$r$
1	60	169,31	2,82	168	2,8
2	120	364,19	3,03	360	3
3	180	567,26	3,15	546	3,03
4	240	774,85	3,22	744	3,1
5	300	981,36	3,27	868	2,89
6	360	1 202,15	3,33	1 170	3,25
7	420	1 419,13	3,37	1 344	3,2
8	480	1 638,05	3,41	1 512	3,15
9	540	1 858, 71	3,44	1 680	3,11
10	600	2 080,89	3,46	1 860	3,1
11	660	2 304,19	3,49	2 016	3,05
12	720	2 528,82	3,51	2 418	3,35
...	...	...	...	...	...
84	5 040	19 813,70	3,93	18 890	3,74
...	...	...	...	...	...

Notiamo che  $r'$  cresce regolarmente al crescere di  $n$ , mentre  $r$  cresce leggermente un po' in modo meno regolare: di meno se  $k$  è primo, di più se  $k$  è composto o abbondante anch'esso, pur mantenendosi in ogni caso inferiore a  $r'$ , cosa molto importante e decisiva per mantenere l'equivalenza  $RH1 = RH$  con valori di  $L(n)$  sempre positivi.

Vediamo ora le differenze  $d$  positive  $d = r' - r$

**TABELLA 5**

<b>n</b>	<b>r'</b>	<b>r</b>	<b>d = r' - r</b>
<b>60</b>	<b>2,82</b>	<b>2,8</b>	<b>0,02</b>
<b>120</b>	<b>3,03</b>	<b>3</b>	<b>0,03</b>
<b>180</b>	<b>3,15</b>	<b>3,03</b>	<b>0,12</b>
<b>240</b>	<b>3,22</b>	<b>3,1</b>	<b>0,12</b>
<b>300</b>	<b>3,27</b>	<b>2,89</b>	<b>0,38</b>
<b>360</b>	<b>3,33</b>	<b>3,25</b>	<b>0,08</b>
<b>420</b>	<b>3,37</b>	<b>3,2</b>	<b>0,17</b>
<b>480</b>	<b>3,41</b>	<b>3,15</b>	<b>0,26</b>
<b>540</b>	<b>3,44</b>	<b>3,11</b>	<b>0,33</b>
<b>600</b>	<b>3,46</b>	<b>3,10</b>	<b>0,36</b>
<b>660</b>	<b>3,49</b>	<b>3,05</b>	<b>0,44</b>
<b>720</b>	<b>3,51</b>	<b>3,35</b>	<b>0,16</b>
...	...	...	...
<b>5 040</b>	<b>3,93</b>	<b>3,74</b>	<b>0,19</b>
...	...	...	...

La differenza  $d = r' - r$ , seppure leggermente oscillante, si mantiene sempre positiva e compresa tra 0 e 0,5 - cosa che succede ugualmente, come vedremo più avanti, anche con i numeri abbondanti colossali: ciò potrebbe significare l'esistenza di qualche possibile relazione con la RH e gli zeri non banali della funzione zeta ipotizzati sulla retta critica reale  $\frac{1}{2} = 0,5$  ? - Ciò si potrebbe

**verificare in seguito con ulteriori lavori dedicati a questa possibilità..**

**E circa proprio la funzione zeta, riportiamo come nota alla prima parte di questo lavoro, un brano tratto dal libro di John Derbyshire “L’ossessione dei numeri primi” (Bollati Boringhieri ed.) pag. 373, sulla possibile falsità della RH dopo un certo enorme numero:**

**“ ...In una conversazione successiva, in un altro posto, chiedi ad Andrew se esistono buone ragioni matematiche per credere che l’ipotesi (di Riemann, N.d.A.A.) sia falsa. Sì, rispose, ce ne sono.**

**Puoi, per esempio, scomporre la funzione zeta in parti differenti, ognuna delle quali ti dice qualcosa di diverso sul comportamento di zeta. Una di queste parti è la cosiddetta funzione S.**

**Nell’intero intervallo su cui è stata studiata finora la funzione zeta – vale a dire, per argomenti sulla retta critica fino all’altezza di circa**

**<sup>23</sup>  
10 - S varia tra - 1 e +1 . Il valore noto più elevato è circa 3,2.**

**Ci sono valide ragioni per pensare che se S dovesse raggiungere un valore prossimo a 100, allora la RH potrebbe essere in difficoltà.**

**La parola chiave in questo caso è << potrebbe >> ; il fatto che S raggiunga un valore vicino a 100 è una condizione necessaria perché la RH sia in difficoltà, ma non sufficiente. I valori della funzione S possono essere così elevati? Beh, sì. A dire il vero, Atle Selberg dimostrò nel 1946 che S è una funzione illimitata: vale a dire che alla fine, se proseguite abbastanza lungo la retta critica, supera qualunque numero! La velocità di crescita di S è così incredibilmente lenta che le altezze in questione superano l’immaginazione, certamente però S alla fine arriverà al valore 100. Allora fino a dove dobbiamo esplorare la retta critica per trovare un valore così elevato?**

**Andrew : << probabilmente intorno a un valore di T pari a**

10 000  
 10  
 10 >> . Molto oltre l'intervallo permesso dalle nostre attuali capacità di calcolo, allora? << Oh si, molto oltre >> .”

**Seconda parte, dedicata ai numeri abbondanti colossali in relazione all'equivalenza RH1 = RH.**

....

Dall'articolo del Prof. Jeffrey Lagarias “An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis” riportiamo la Table 1 con i cosiddetti numeri abbondanti colossali , tra i quali alcuni fattoriali (  $3! = 6$  ,  $5! = 120$ ,  $7! = 5040$ ) e alcuni loro grandi multipli, insieme ai loro fattori primi e loro potenze, e ai loro rapporti  $r = \sigma(n) / n$  , molto importanti, come abbiamo visto nella nostra dimostrazione iniziale con alcuni multipli di 60.

Vi mancano però i rapporti  $r' = (H_n + e \cdot \log(H_n)) / n$ , anche questi molto importanti per dimostrare che la differenza  $d = r' - r$  è sempre positiva, come Lagarias aveva supposto per  $(L(n))$  per l'equivalenza tra RH1 ed RH.

**TABLE 1** riportata nel lavoro del Prof. Lagarias

<b>n</b>	<b>Factorization of n</b>	<b><math>\frac{\sigma(n)}{n}</math></b>
2	2	1,500
6	2·3	2,000
12	$2^2 \cdot 3$	2,333
60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	2,800
120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	3,000
360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	3,250
2520	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	3,714
5040	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	3,838
55440	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	4,187
720720	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	4,509
1441440	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	4,581
4324320	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	4,699
21621600	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	4,855
367567200	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$	5,141
6983776800	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	5,412
160626866400	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 23$	5,647
321253732800	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 23$	5,692
9316358251200	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 29$	5,888
288807105787200	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 31$	6,078
2021649740510400	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \dots 31$	6,187
6064949221531200	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \dots 31$	6,238
224403121196654400	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \dots 37$	6,407

**Con la successiva TABELLA 7, ripetiamo i calcoli come per la Tabella 1, con le approssimazioni del caso (per la serie armonica, e ora anche per  $\sigma(n) \approx n \cdot \frac{\sigma(n)}{n}$ , sia pure indirettamente non disponendo dei valori precisi di  $\sigma(n)$  ma solo il suo rapporto con  $n$ ; e tuttavia attendibili ai fini della nostra dimostrazione; i risultati finali di  $L(n)$ , anche se un po' approssimati, forse per difetto, e quindi i rapporti  $r'$  ed  $r$  e le loro differenze  $d = r' - r$ , non sono molto lontani da quelli reali, ottenibili da calcoli un po' più accurati dei nostri).**

## TABELLA 7

per i numeri abbondanti colossali a partire da  $n = 2520$  fino a  
 $n = 160\ 626\ 866\ 400$ .

(valori iniziali approssimati a due cifre decimali)

$n$  ;  $H_n$ ;  $\log(H_n)$ ;  $e^{\frac{H_n}{\log(H_n)}}$  ;  $H_n + e \cdot \log(H_n)$ ;  $\approx \sigma(n)$   $L(n)$

( valori di  $L(n)$  approssimati per difetto)

---

2520	8,40	2,12	4484,25	9556,73	9359	197,73
5040	9,10	2,20	8967,44	19813,70	19343	470,18
55440	11,50	2,44	98617,85	240865,88	232127	8738,88
720720	14,06	2,64	1281756,11	3388772,70	3249726	139046,70
4324320	15,85	2,76	7688650	21248371	20319979	928392
21621600	17,46	2,86	38439226	109943891	104972868	4971023
367567200	20,29	3,01	653266193	1966723222	1889662975	77060246
6983776800	23,24	3,14	12407785340	39034892710	3776200040	1238692668
160626866400	26,37	3,27	285287950800	933604818926	907059914600	26544901330

## TABELLA 8

Calcolo e confronto  $r'$ ,  $r$ ,  $d = r' - r$ ,  $r'' = r' / r$  con  $r'' > 1$

n	$r'$	r	$d = r' - r$	$r'' = r' / r$
2 520	3,7923	3,7138	0,0785	1,02113
5 040	3,9312	3,8378	0,0934	1,02433
55 440	4,3446	4,1860	0,1577	1,03766
720 720	4,7019	4,5089	0,193	1,04280
4 324 320	4,9136	4,6989	0,2147	1,04569
21 621 600	5,0849	4,855	0,2299	1,04735
367 567 200	5,5306	5,1409	0,3897	1,07580
6 983 776 800	5,5893	5,412	0,1869	1,03286
160 626 866 400	5,8122	5,647	0,1652	1,02925

Come si può vedere anche qui per i numeri abbondanti colossali, la differenza  $d = r' - r$ , è sempre positiva e compresa tra 0 e 0,5 come nella Tabella 5 per i multipli di 60; e quindi potremmo, in via ancora provvisoria, ipotizzarla come una possibile legge generale per tutti i numeri abbondanti ancora più grandi, cosa che si vedrà con ulteriori calcoli effettuati con computer molto più potenti e veloci, per confermarla in via definitiva, e possibilmente anche per evidenziare qualche eventuale e interessante relazione con la RH, con la quale ha in comune il numero 0,5 : **differenza d massima 0,5 nella**

**RH1, linea critica  $0,5 = \frac{1}{2}$  nella RH. Il rapporto  $r'' = r' / r$  è inoltre sempre maggiore di 1, conseguenza di  $L(n)$  sempre positiva, come richiesto dall'equivalenza  $RH1 = RH$ .**

## **CONCLUSIONI FINALI**

**Dalle ultime due Tabelle 7 e 8, si osserva chiaramente che, al crescere dei numeri abbondanti colossali (ognuno dei quali è il numero abbondante colossale moltiplicato di solito per un nuovo numero primo più grande dell'ultimo numero primo fattore di  $n$  precedente (vedi Table 1)) i valori delle rispettive  $L(n)$  crescono sempre più posizionandosi sulla linea minima inferiore, che così si allontana sempre più dall'ascissa  $x$ , e quindi non la toccherà mai anche se sarà estesa all'infinito; il che ovviamente significa che  $L(n)$  non sarà mai uguale a zero ne tanto meno negativa, quindi non produrrà mai un contro esempio  $L(n) \geq 0$ , e di conseguenza  $RH1 = RH$ , entrambe vere. Le differenze  $d = r' - r$  sono così sempre positive e oscillanti leggermente tra 0 e 0,5, come accennato nella prima parte (oscillazioni dovute, ricordiamo, a  $k$  primo, cosa favorevole poiché fa crescere  $L(n)$ , o a  $k$  composto, che invece la fa**

diminuire leggermente ma non in maniera pericolosa, cioè mai fino a zero). E così pure il rapporto  $r'' = r' / r$ , sempre maggiore di 1, e anch'esso leggermente oscillante come la differenza  $d = r' - r$  per gli stessi motivi (k primo o composto). Tale rapporto, se fosse uguale a 1, significherebbe ovviamente una differenza  $d = 0$  e quindi un contro esempio della equivalenza  $RH1 = RH$ .

Il concetto di  $r'$  non è stato considerato dal Prof. Lagarias, che si è limitato soltanto al rapporto  $r = \frac{\sigma(n)}{n}$ , vedi Table 1, e che ci è stato tuttavia utile per calcolare approssimativamente  $\sigma(n)$  per i numeri abbondanti colossali trattati nella nostra Tabella 7, il che ci ha consentito un calcolo approssimativo ma attendibile di  $r'$ ,  $r$ ,  $d$ ,  $r''$ ; constatando sia la positività di  $d$ , sia la sua variabilità tra 0 e 0,5.

E questo ci è stato molto utile per comprendere meglio questi comportamenti aritmetici (differenze e rapporti) della  $RH1$ , e che ci hanno consentito di dimostrarla, come pure i “rapporti verticali” tra ogni  $n$  abbondante colossale e il precedente, tra  $L(n)$  e la precedente, che ci offre altre prove indirette (rapporti simili) dell'equivalenza  $RH1 = RH$  e quindi della verità di entrambe, come

vedremo nelle successive Tabelle 9 e 10:

**TABELLA 9 DEI RAPPORTI VERTICALI  
PER NUMERI ABBONDANTI COLOSSALI**

$n/n$ precedente	$L(n) / L(n)$ precedente $\approx n/n$ prec.
<b>5040 / 2520 = 2</b>	<b>4 70 / 197 = 2,38 <math>\approx</math> 2</b>
<b>55440 / 5040 = 11</b>	<b>8 738 / 470 = 18,59 <math>\approx</math> 11</b>
<b>720 720 / 55 440 = 13</b>	<b>139 046 / 8 738 = 15,91 <math>\approx</math> 13</b>
4 324 320 / 720 720 = 6 = 2 · 3	928 392 / 139 046 = 6,67 $\approx$ 6
21 621 600 / 4 324 320 = 5	4 971 023 / 928 392 = 5,35 $\approx$ 5
367 567 200 / 21 621 600 = 17	77 060 246 / 4 971 023 = 15,50 $\approx$ 17
6 983 776 800 / 367 567 200 = 19	1238692668 / 77 060 246 = 16,07 $\approx$ 19
160 626 866 400 / 6 983 776 800 = 23	26544904330 / 1 238 692 668 = 21,42 $\approx$ 23

Come si vede, il rapporto tra  $L(n)$  e il valore di  $L(n)$  precedente è molto vicino al rapporto tra  $n$  e il valore di  $n$  precedente, e più precisamente, è maggiore per i primi cinque valori per un numero  $n$  composto colossale, e minore dopo i primi cinque valori; relazione che potrebbe variare leggermente in meglio con calcoli più accurati, e che è molto importante, poiché indica chiaramente che  $L(n)$  cresce all'incirca come  $n$ , cioè con lo stesso fattore con cui cresce  $n$

(infatti i suddetti rapporti verticali consecutivi tra i due valori di  $n$  ed  $L(n)$  sono simili, e potrebbero essere anche più vicini se calcolati con più accuratezza).

Ciò significa chiaramente che  $L(n)$  di un numero colossale successivo a  $n$  cresce quindi quasi con la stessa velocità di  $n$ , velocità che dipende dal fattore con cui cresce  $n$ : per esempio, se  $n$  cresce di un fattore  $p$  ( numero primo, come nella Table 1), o anche non primo, anche  $L(n)$  cresce quasi del fattore  $p$ , primo o non primo come indica la quasi uguaglianza dei rapporti verticali della Tabella 9.

Lo stesso succede, con le variazioni del caso (dovute alle oscillazioni di  $L(n)$ , fattori piccoli e decimali ), per i rapporti verticali relativi ai numeri  $N$  multipli di 60, e cioè  $n = 60 \cdot k$ , come da successiva Tabella 10.

## TABELLA 10 DEI RAPPORTI VERTICALI

PER NUMERI ABBONDANTI DI FORMA  $n = 60 \cdot k$

(valori di  $L(n)$  stimati con le approssimazioni della serie armonica)

n / n precedente	L(n) / L(n) precedente	$\approx$ n / n precedente
120 / 60 = 2	4,19 / 1,31 = 3,19 (valori reali 6,06 / 2,97 = 2,04)	$\approx$ 2 $\approx$ 2
180 / 120 = 1,5	21,26 / 4,19 = 5,07	$\approx$ 1,5
240 / 180 = 1,33	30,85 / 21,26 = 1,45	$\approx$ 1,33
300 / 240 = 1,25	119,36 / 30,85 = 3,86	$\approx$ 1,25
360 / 300 = 1,2	32,15 / 119,36 = 0,26	$\approx$ 1,2
420 / 360 = 1,16	75,13 / 32,15 = 2,33	$\approx$ 1,16
480 / 420 = 1,14	126,05 / 75,13 = 1,67	$\approx$ 1,14
540 / 480 = 1,12	178,71 / 126,05 = 1,41	$\approx$ 1,12
600 / 540 = 1,11	220,89 / 178,71 = 1,23	$\approx$ 1,11
660 / 600 = 1,1	288,19 / 220,89 = 1,30	$\approx$ 1,1
720 / 660 = 1,09	110,82 / 288,19 = 0,38	$\approx$ 1,09
... ..	....	...
5040 / 720 = 7	923,70 / 110,82 = 8,33	$\approx$ 7

In quest'ultimo caso,  $k = 84$  di  $60 \times 84 = 5040$  non è n successivo a

$k = 12$  di  $60 \times 12 = 720$ , ma il principio è ugualmente valido anche per  $k$  non consecutivi.

Si nota che pur essendo qualche rapporto verticale minore di 1, cosa dovuta alle oscillazioni di  $L(n)$  per  $k$  primo o  $k$  composto, ciò non influisce negativamente sulla equivalenza  $RH1 = RH$ .

Si nota anche che il rapporto verticale  $n / n$  precedente tende a 1, ma nemmeno questo influisce negativamente sulla suddetta equivalenza, poiché  $L(n)$  cresce sempre con  $n$ , allo stesso modo che con i numeri abbondanti colossali, e cioè con un fattore molto vicino al rapporto  $n / n$  precedente, sia  $n$  abbondante colossale o abbondante “semplice” come i multipli di 60.

**Possiamo quindi concludere che, moltiplicando un numero  $n$  abbondante colossale per un numero primo o per una sua potenza (vedi Table 1) per ottenere un altro numero colossale abbondante  $n'$ , le rispettive differenze  $L(n)$  crescono con un fattore quantitativamente molto simile (primo o sua potenza), il che significa che  $L(n)$  cresce sempre in ogni caso per qualsiasi numero abbondante successivo e grande quanto si voglia, allontanandosi sempre più dall'ascissa e quindi non fornendo mai contro-esempi**

**dell'equivalenza  $RH1 = RH$ , che quindi così sono entrambe vere.**

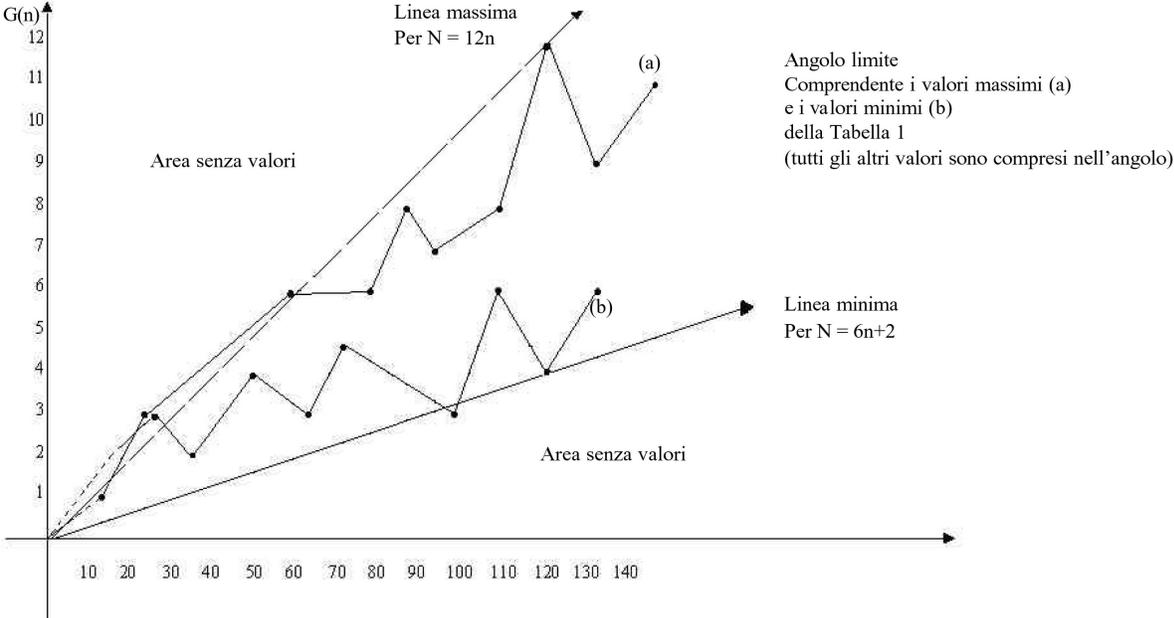
**In altre parole,  $n' = n \cdot p$  comporta che  $L(n') \approx L(n) \cdot p$ ,  
e di conseguenza qualsiasi  $L(n)$  non sarà mai nulla o negativa, per cui  
si avrà sempre  $L(n) > 0$  (soluzione positiva dell'equivalenza di  
Lagarias  $RH1 = RH$  tra la sua variante  $RH1$  e l'ipotesi classica di  
Riemann  $RH$ ) e mai  $L(n) \leq 0$ , cioè l'assenza totale di contro  
esempi, quale che sia  $n$  numero abbondante colossale.**

**Francesco Di Noto-Michele Nardelli**

# NOTA 1

GRAFICO 1

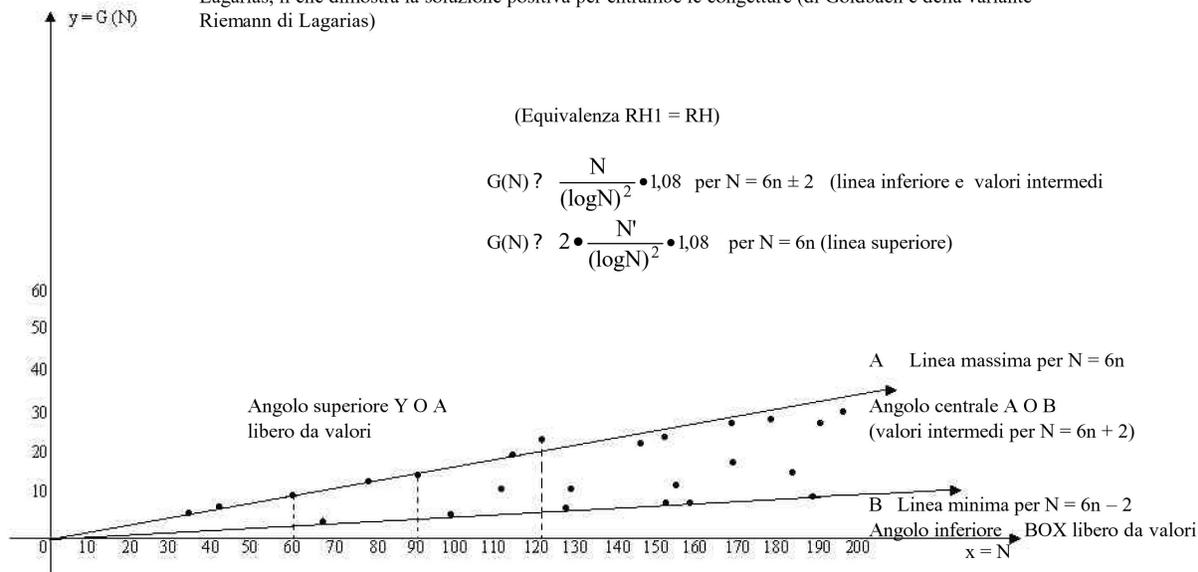
a) minimo  $G = 6n+2$   
 b) massimo  $G = 12n$



## Grafico 2

Goldbach – Grafico  $G(N)$  per  $RH1 = RH$

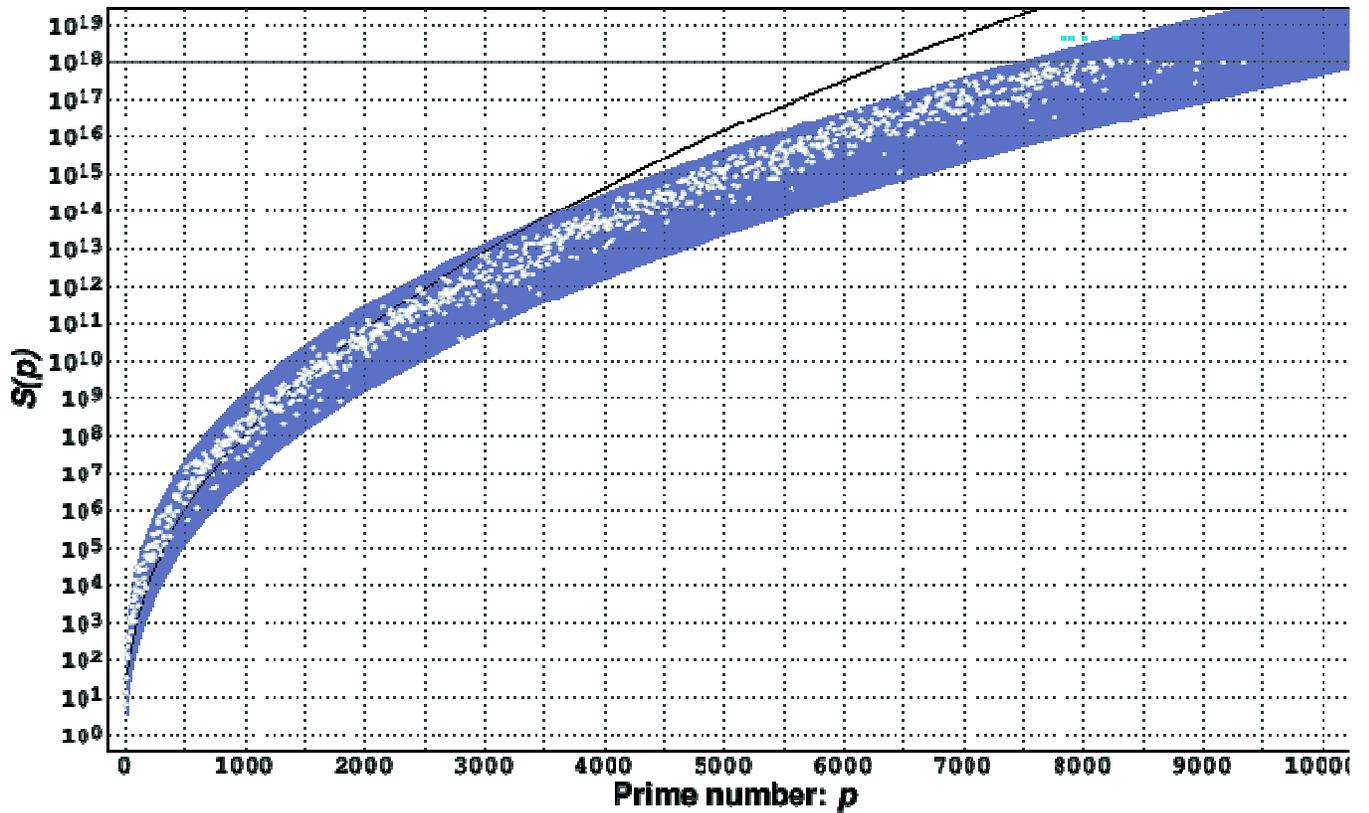
Angolo A O B con alcuni valori di  $G(N)$  = simile all'angolo con valori di  $L(n)$ : angolo inferiore BOX libero da valori e quindi di controesempi  $G(N) = 0$  ed  $L(N) = 0$  nel caso dell'equivalenza  $RH1 = RH$  di Lagarias, il ch  dimostra la soluzione positiva per entrambe le congetture (di Goldbach e della variante Riemann di Lagarias)



**Evidenziamo, inoltre, i seguenti due grafici, presi dal lavoro “Goldbach conjecture verification” presso il link “Goldbach conjecture verification.htm”. Questi sono molto interessanti per le coppie di Goldbach e quindi per quello da noi detto a proposito della relativa congettura.**

The following figure presents a graph with the available values of  $S(p)$ ; the cyan dots represent data which is not known for certain to be a first occurrence.

Grafico 3



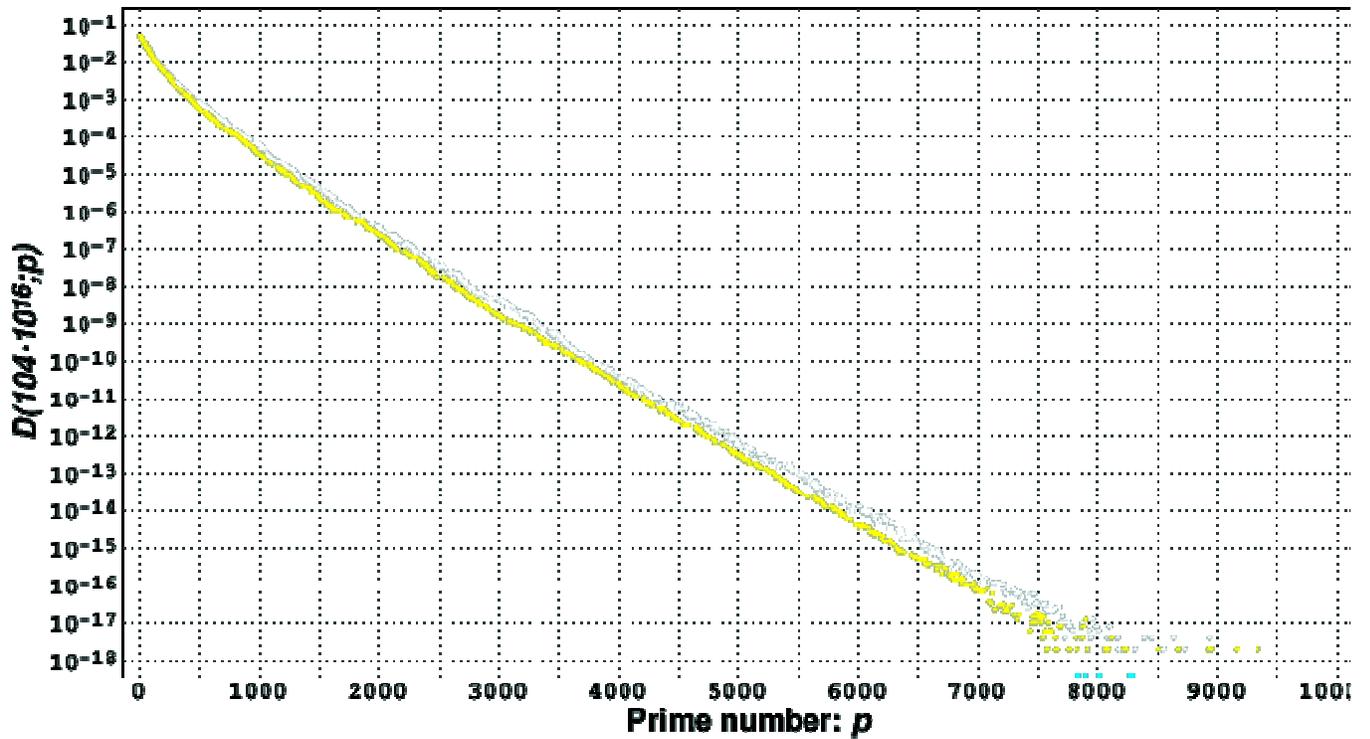
The values of  $S(p)$  are bounded, for our empirical data, by the functions

$$S_{\min}(p) = 0.06 p^{0.4} e^{-0.4} \quad \text{and} \quad S_{\max}(p) = 11.05 p^{0.4} e^{-0.4}$$

For large  $p$  the values of  $S(p)$  appear to be slowly approaching the upper bound; hence, the asymptotic growth rate of  $S(p)$  probably has a different functional form. For all our data  $p$  can be reasonably well approximated by  $0.33(\log S(p) \log \log S(p))^2$ .

Let  $D(x;p)$  be the **relative frequency of occurrence** of the prime  $p$  in the minimal Goldbach partition of the even numbers not larger than  $x$ . The following figure presents a graph of this function, computed for our current verification limit of the Goldbach conjecture.

Grafico 4



Besides the expected near exponential decay of  $D(x;p)$ , it is interesting to observe that there exists a distinct difference of behavior in the values of this function when  $p$  is a multiple of three plus one (white dots) and when it is not (yellow dots). Cyan dots represent primes of minimal Goldbach partitions known to occur before  $10^{18}$ , but which are outside of the interval used to make this graph.

**NOTA 2 Considerazioni e tabelle utili ad una possibile soluzione positiva della congettura di Goldbach, possibilmente collegata (dalla somiglianza dei due grafici  $G(N)$  ed  $L(n)$ ) alla equivalenza di Lagarias  $RH1 = RH$ , oggetto di questo lavoro.**

-----

**La formazione delle coppie di Goldbach dipende principalmente sia dal numero  $m$  di multipli dispari di 3 fino ad un qualsiasi numero  $N \geq 4$ , sia anche dalla forma aritmetica del numero  $N$ , che può essere:**

- a)  $N = 6n$  (multiplo di 3, 6 e 12, e quindi comprende tutti i successivi numeri abbondanti, presi in considerazione dalla eguaglianza di Lagarias (dove essi hanno un  $\sigma(n)$  molto elevato rispetto agli altri numeri non abbondanti, mentre per la congettura di Goldbach essi hanno un più elevato numero  $G(N)$  di coppie di Goldbach rispetto ai numeri di tipo b)**
- b)  $N' = 6n \pm 2$ , e quindi non multipli di 3, 6, 12, e quindi non abbondanti).**

**Nel primo caso, i multipli  $3n$  nella formazione delle coppie**

**di Goldbach , (coppie p e q tali che  $p + q = N$  oppure  $N'$ )**  
**si accoppiano tra di loro con maggiore frequenza, dando così**  
**più possibilità agli altri numeri dispari, e quindi spesso**  
**primi, di formare più coppie di Goldbach rispetto ai numeri**  
 **$N'$  di forma  $N' = 6n \pm 2$ ; nel secondo caso, b), molti (ma non**  
**tutti) multipli dispari di 3, e quindi non primi, si accoppiano**  
**sia tra di loro, sia con i numeri primi, ostacolando ma in ogni**  
**caso non impedendo del tutto la formazione di coppie di**  
**Goldbach (per definizione formate da due numeri primi p e q**  
**tali che  $p + q = N$  oppure  $N'$ ); ed ecco perché i numeri  $N'$**   
**hanno meno coppie di Goldbach rispetto ai numeri N pari**  
**vicini (precedenti o successivi ad ogni numero N) , e di numeri**  
**pari N ce ne sono ovviamente uno ogni tre: per esempio**  
**6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24...mentre di numeri  $N'$**   
**ce ne sono due su tre, contigui ad ogni N.**

**Il rapporto tra il numero di coppie di Goldbach  $G(N)$**   
**e il numero di coppie di Goldbach per  $N'$  pari precedente o**

successivo ad N, varia, per N maggiori di 30, da 1,5 a 2 o a volte anche di più per N più grandi, (vedasi tabelle successive) e riflette il rapporto simile tra il numero m ed m' dei multipli dispari di 3 esistenti fino ad N o fino ad N' :

$$m = \frac{N}{6}, \quad m' \approx \frac{N'}{6}$$

E negli altri due rapporti r ed r' tra m ed m' con i numeri delle coppie di Goldbach G(N) e G(N') :

$$r = \frac{m}{G(N)} \quad r' = \frac{m'}{G(N')}$$

constateremo ancora che r è sempre inferiore ad r', per via del maggior numero di coppie di Goldbach per  $N = 6n$ ;

Da qui deriva anche che  $G(N) \approx \frac{N}{r}$  e  $G(N') \approx \frac{N'}{r'}$

Poiché r ed r' crescono con m ed m', e quindi con N ed N', notiamo che mentre questi ultimi crescono di due unità alla volta (per es.  $N' = N + 2$ ), m ed m' crescono di  $\frac{2}{6} = 0,333 = \frac{1}{3}$  alla volta, cioè meno di due unità alla volta come per N ed N'; m ed m' crescono di una unità per ogni tre numeri N di forma

$6n$ , per esempio da 4 per  $24 = 6 \times 4$  a 5 di  $30 = 6 \times 5$ , e pure di un' unità per numeri  $N'$  di forma  $6n \pm 2$ , per esempio da 4,33 di  $26 = 24 + 2$ , a 5,33 di  $32 = 30 + 2$ ; da 4,66 di  $28 = 30 - 2$  a 5,66 di  $34 = 36 - 2$ , ecc. Tale crescita di  $m$  ed  $m'$  si ripercuote, sebbene in modo non perfettamente lineare, anche su  $r$  ed  $r'$ , e sappiamo che i rapporti tra i numeri di una serie numerica ( $N, N', N', N, \dots$ ) che cresce regolarmente di due unità, con numeri  $r$  ed  $r'$  che invece crescono più lentamente sia pure irregolarmente (crescita collegata a quella di 0,33 di  $m$  ed  $m'$ ), sono gradualmente crescenti :

$$G(N) \approx \frac{N}{r} ; \quad G(N') \approx \frac{N'}{r'} , \quad \text{con } r' \approx (\log N')^2 , \text{ infatti le altre}$$

formule per  $G(N)$  e  $G(N')$ :  $G(N) \approx \frac{N}{(\log N)^2}$  e  $G(N') \approx \frac{N'}{(\log N')^2}$

con  $\log N$  e  $\log N' =$  logaritmi naturali di  $N$  e di  $N'$ .

Ecco anche perché  $G(N)$  e  $G(N')$  crescono sempre sia pure leggermente irregolarmente verso l'alto, e non scendono mai verso  $G(N) = G(N') = 0$ , unico esempio teorico ma impossibile

**di contro-esempio per la congettura di Goldbach.**

**Tutto ciò risulterà più chiaro dalla seguente tabella dei rapporti in gioco dei loro incrementi unitari, ecc. e degli effetti dei multipli dispari di 3 nella formazione delle coppie di Goldbach, tramite i numeri  $m$  ed  $m'$ ; naturalmente anche i multipli dispari di altri numeri primi hanno la loro parte, ma i multipli dispari di 3, essendo i più numerosi, hanno il ruolo maggiore; infatti i multipli dispari di  $p = 11$  fino a 100 sono  $\frac{100}{22} = 4,54 \approx 4$  (e cioè 33, 55, 77, 99), contro i  $\frac{100}{6} = 16,6$  multipli dispari di 3, molto più numerosi; ovviamente fino a 100 ci sono anche i  $\frac{100}{10} = 10$  multipli dispari di 5, e i  $\frac{100}{14} = 7,1$  multipli dispari di 7, e così via, che impediscono la formazione di altre coppie di Goldbach, ma lasciandone  $G(N')=G(100)=6$ .**

**Baseremo per maggiore semplicità la nostra successiva Tabella 1 sui soli multipli dispari di 3, che hanno il maggiore effetto positivo sulla formazione delle coppie di Goldbach, per**

**$N = 6n$ , trascurando tutti gli altri (se si prendessero in considerazione, con calcoli più complicati, alla fine si avrebbe il numero esatto delle coppie i Goldbach per ogni  $N$  oppure  $N'$  pari; qui ci interessa sottolineare che in ogni caso tale numero aumenta sempre, sia pure con piccole oscillazioni non influenti ai fini della congettura di Goldbach; le oscillazioni sarebbero influenti solo se potessero arrivare fino a  $G(N)$  oppure  $G(N') = 0$ , solo in tal caso la congettura sarebbe confutata).**

**TABELLA 1 per N ed N' fino a 48**

n	N	G(N)	N'	G(N')	m = N/6	m' = N'/6	r = m/G(N)	r' = m'/G(N')	$\frac{N}{(\log N)^2} \approx G(N)$	$\frac{N'}{(\log N')^2} \approx G(N')$
0			4	1			0,6	0,6	2,08	1
1	6	1			1		1	1	1,86	1
			8	1			1,3	1,3	1,85	1
			10	2			1,6	0,8	1,88	2
2	12	1			2		2	2	1,94	2
			14	2			2,3	1,16	2,01	2
			16	2			2,6	1,33	2,08	2
3	18	2			3		1,5	1,5	2,15	2
			20	2			3,3	1,66	2,22	2
			22	3			3,6	1,22	2,30	3
4	24	3			4		1,33	1,33	2,37	4
			26	3			4,33	1,44	2,45	3
			28	2			4,6	2,33	2,52	2
5	30	3			5		1,66	1,66	2,59	3
			32	2			5,33	2,66	2,66	2
			34	4			5,66	1,41	2,73	4
6	36	4			6		1,5	1,5	2,80	4
			38	2			6,33	3,16	2,87	2
			40	3			6,66	2,22	2,94	3
7	42	4			7		1,75	1,75	3,00	4
			44	3			7,33	2,44	3,07	3
			46	4			7,6	1,09	3,13	4
8	48	5			8		1,6	1,6	3,20	5
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

## TABELLA 2 semplificata per N ed N' molto più grandi

(centinaia e migliaia) e confronto tra  $G(N)$  e  $\frac{N}{(\log N)^2}$ ,  $G(N')$ , e  $\frac{N'}{(\log N')^2}$

**constatando come questi due ultimi valori siano sempre  
minori dei rispettivi valori reali di  $G(N)$  e di  $G(N')$**

**(il fenomeno si ripete a tutte le scale):**

N	N'	G(N)	G(N')	>	$\frac{N}{(\log N)^2}$	$\frac{N'}{(\log N')^2}$
	100		6			4,7 < 6
	200		8			7,12 < 8
300		21			9,22 < 21	
	400		14			11,14 < 14
	500		13			12,94 < 13
600		32			14,66 < 32	
	700		24			16,31 < 24
	800		21			17,90 < 21
900		48			19,41 < 48	
	1000		28			21,00 < 28
	1100		28			22,43 < 28
1200		54			23,87 < 54	
...	...	...	...		...	...
	2000		37			34,62 < 37
3000		104			46,80 < 104	
	4000		65			58,14 < 65
	5000		76			68,92 < 76
6000		168			79,28 < 168	
	7000		119			89,30 < 119
	8000		106			99,05 < 106
9000		242			108,56 < 242	
	10000		127			117,88 < 127
	11000		153			127,03 < 153
12000		302			136,02 < 302	
...	...	...	...		...	...

Dalle due tabelle precedenti si nota chiaramente come la velocità di crescita di  $G(N)$  è più alta di quella di  $G(N')$ , per via dei multipli dispari di 3 che regolano in buona parte la formazione di più coppie di Goldbach per  $N = 6n$ , come detto prima, rispetto a  $N' = 6n \pm 2$ ; e anche la relazione empirica, a tutte le scale (unità, decine in Tabella 1, centinaia e migliaia ecc., in Tabella 2):

$$G(N) \approx G(N-2) + G(N+2)$$

(per le decine, centinaia, migliaia, ecc. sarà invece

$$G(N=3 \times 10^n) \approx G(N-2 \times 10^{n-1})$$

dove  $N-2 = N'$  precedente a  $N = 6n$ , e  $N+2 = N'$  successivo ad  $N = 6n$ ;

esempio per unità  $G(30) \approx G(28) + G(32)$   
 $3 \approx 2 + 2 = 4$

esempio per decina  $G(30) \approx G(20) + G(40)$   
 $3 \approx 2 + 3 = 5$

esempio per centinaia  $G(300) \approx G(200) + G(400)$   
 $21 \approx 8 + 14 = 22$

**1° esempio per migliaia  $G(3000) \approx G(2000) + G(4000)$**

$$104 \approx 37 + 65 = 102$$

**2° esempio per migliaia  $G(6000) \approx G(5000) + G(7000)$**

$$168 \approx 76 + 119 = 195$$

**3° esempio per migliaia  $G(9000) \approx G(8000) + G(10\ 000)$**

$$242 \approx 106 + 127 = 233;$$

**di conseguenza, oltre che le somme, anche i rapporti**

**seguono un andamento simile:**

$$G(N) / G(N - 2) > G(N + 2)$$

**alcuni esempi per centinaia:**

<b>N</b>	<b>G(N)</b>	<b>G(N -100)</b>	<b>G(N) / G(N-100)</b>	<b>G(N+100)</b>	<b>G(N)/ G(N+100)</b>
<b>300</b>	<b>21</b>	<b>8</b>	<b>2,62</b>	<b>14</b>	<b>1,5</b>
<b>600</b>	<b>32</b>	<b>13</b>	<b>2,46</b>	<b>24</b>	<b>1,33</b>
<b>900</b>	<b>48</b>	<b>21</b>	<b>2,28</b>	<b>28</b>	<b>1,71</b>
<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>

alcuni esempi per migliaia :

N	G(N)	G(N-1000)	G(N) / G(N-1000)	G(N + 1000)	G(N) / G(N+1000)
3000	104	37	2,81	65	1,6
6000	168	76	2,21	119	1,41
9000	242	106	2,28	127	1,90
...	...	...	...	...	...

Anche qui, per  $N = 3 \times 10^n$ , due velocità diverse anche per i rapporti successivi, a qualsiasi scala di potenze di 10, tra  $G(N) / G(N - 2 \times 10^{n-1})$  e  $G(N) / G(N + 2 \times 10^{n-1})$ .

Il rapporto massimo, sempre poco maggiore di 2, si nota nel rapporto  $G(N) / G(N - 2 \times 10^{n-1})$  se  $N = 3 \times 10^n = 6n$  ( $n$  – esimo multiplo di 6, da non confondere  $n$  con  $n$  di  $10^n$  )

**Tutte le suddette tabelle e grafici di questo lavoro dicono molto sull'andamento ciclico leggermente irregolare delle coppie di Goldbach, ed i relativi grafici somigliano moltissimo ai grafici relativi ai valori di  $L(n)$  della variante di Lagarias dell'ipotesi di Riemann ( equivalenza tra RH1 di Lagarias e RH di Riemann), e quindi entrambe le congetture sono vere.**

Inoltre, dalla Tabella 2 si nota ancora che

$$G(N') \approx \frac{N'}{(\log N')^2} \quad \text{è sempre minore dei valori reali di } G(N),$$

il che significa che i valori reali di  $G(N')$  non scendono mai al di sotto dei valori dati dalla suddetta formula, e quindi non arriveranno mai a  $G(N') = 0$ ; per  $G(N)$  con  $N = 6n$  il problema non si pone, poiché  $G(N)$  è sempre maggiore di  $G(N')$  con  $N' = N \pm 2$ , e quindi precedente o successivo a  $N$ .

Poiché i rapporti  $r$  ed  $r'$  crescono sempre più al crescere di  $N$  ed  $N'$  (e con essi anche  $G(N)$  e  $G(N')$ , sia pure con leggere irregolarità (discrepanze di pochissime unità tra  $G(N)$  e  $G(N')$  per  $N'$  precedente o successivo a  $N$ )), le discrepanze tra  $G(N)$  e  $G(N + 6)$  e tra  $G(N')$  e  $G(N' + 6)$  per via della differenza 6 sono un po' maggiori del diverso e minore rapporto  $r < r'$ , vedi TABELLA 1.

Concludendo, poiché  $(\log N)^2$  cresce anch'esso, come  $r$  ed  $r'$  molto più lentamente (una frazione di unità tra un  $N$  ed un  $N'$  successivo) delle due unità tra  $N$  e  $N'$  successivo ( $N' = N + 2$ ),

essendo  $N$  ed  $N'$  numeri pari, anche

i rapporti  $\frac{N}{2(\log N)}$  ed  $\frac{N'}{2(\log N')}$  sono sempre

crescenti (anche se leggermente minori dei valori reali di  $G(N)$

e  $G(N')$  al crescere di  $N$  ed  $N'$  tendenti a infinito, sia pure in

modo leggermente irregolare, come abbiamo visto, a causa

degli effetti positivi dei multipli dispari di 3); e quindi tali

rapporti, che indicano una stima approssimativa del numero

delle coppie di Goldbach fino ad  $N$  ed in modo particolare

fino ad  $N'$ , non scenderanno mai verso valori ancora più bassi

di  $\frac{N'}{2(\log N')}$  (già più basso rispetto al rapporto  $\frac{N}{2(\log N)}$ )

né tanto meno fino a 0, unico ma inesistente contro esempio

per la congettura di Goldbach (vedere grafici e gli angoli

inferiori liberi da valori, come l'angolo del grafico dei valori

per  $L(n)$  nella variante di Lagarias per l'ipotesi di Riemann

che così risulta vera, e per lo stesso motivo è vera anche

**l'ipotesi di Riemann, non essendoci anche qui il controesempio**

**$L(n) = 0$  e ne tanto meno  $L(n) < 0$ ).**

**La stretta somiglianza dei due grafici per  $G(N')$  e dei grafici (Figura 1 e Figura 2)  $L(n)$ , mostrano così chiaramente che le due congetture sono entrambe vere.**

### **NOTA 3**

**Oltre ai rapporti  $r$  ed  $r'$ , possiamo considerare anche i rapporti  $R = \frac{n}{L(n)}$  ed  $R' = \frac{\sigma(n)}{L(n)}$ .**

**Il primo rapporto, utilizzando la Tabella 7, risulta tendere sempre ad alcune unità, come da seguente tabella a), e che potrebbe rispecchiare la tabella con valori reali, cioè ricalcolata in base ai valori reali di  $H_n$  anziché in base ai valori di  $H_n \approx \log(n)$ , più la costante di Eulero –Mascheroni = 0,57721 e quindi con  $H_n \approx \log(n) + 0,57721$  come nella nostra Tabella provvisoria a):**

**Tabella a)**

<b>N</b>	<b>L(n) valori interi</b>	<b>R = n / L(n)</b>
<b>2 520</b>	<b>197</b>	<b>12,79</b>
<b>5 040</b>	<b>470</b>	<b>10,72</b>
<b>55 440</b>	<b>8 738</b>	<b>6,34</b>
<b>720 720</b>	<b>139 046</b>	<b>5,18</b>
<b>4 324 320</b>	<b>928 392</b>	<b>4,65</b>
<b>21 621 600</b>	<b>4 971 023</b>	<b>4,34</b>
<b>367 567 200</b>	<b>77 060 246</b>	<b>4,76</b>
<b>6 983 776 800</b>	<b>1 238 692 668</b>	<b>5,63</b>
<b>160 626 866 400</b>	<b>26 544 901 330</b>	<b>6,05</b>
...	...	...

**Tabella con valori di R non molto lontani da quelli reali, e probabilmente in eccesso rispetto a questi ultimi. Lo stesso succede se prendiamo in considerazione la Tabella 1, anche qui con valori approssimati di  $H_n$ , ma con valori di  $\sigma(n)$ , e tratti, ricordiamo, dalla “Tavola dei divisori” di Wikipedia, reperibile su Internet.**

**Tabella b)**

<b>n</b>	<b>L(n)</b>	<b>R = N / (Ln)</b>
<b>60</b>	<b>1,31</b>	<b>45,80</b>
<b>120</b>	<b>4,19</b>	<b>28,63</b>
<b>180</b>	<b>21,26</b>	<b>8,46</b>
<b>240</b>	<b>30,85</b>	<b>7,72</b>
<b>300</b>	<b>119,36</b>	<b>2,51</b>
<b>360</b>	<b>32,5</b>	<b>11,19</b>
<b>420</b>	<b>75,13</b>	<b>5,59</b>
<b>480</b>	<b>126,05</b>	<b>3,80</b>
<b>540</b>	<b>178,71</b>	<b>3,02</b>
<b>600</b>	<b>220,89</b>	<b>2,71</b>
<b>660</b>	<b>288,19</b>	<b>2,29</b>
<b>720</b>	<b>110,88</b>	<b>6,49</b>
<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>
<b>5 040</b>	<b>923,70</b>	<b>5,46</b>
<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>

**Qui i valori di R potrebbero essere più vicini a quelli reali.**

**Si nota che i valori di R decrescono rapidamente da 45,80 a 8,46, per poi oscillare tra alcune unità comprese tra 2 e 11, trascurando le loro parti decimali, e così pure nella Tabella a) precedente; che però evidenzia una maggiore uniformità e quindi minori oscillazioni dopo i due valori iniziali 12,79 e**

10,72. Nella tabella b),  $L(n)$  è calcolata con i valori reali di  $\sigma(n)$ , mentre nella tabella a)  $L(n)$  è calcolata con i valori approssimati di  $\sigma(n)$ , con la relazione  $\sigma(n) \approx n \cdot \frac{\sigma(n)}{n} \approx \sigma(n)$  in base ai valori approssimativi  $\frac{\sigma(n)}{n}$  della TABLE 1 di Lagarias, non del tutto precisi. Per ottenere quindi in ogni caso i valori reali di  $R$ , occorre rifare le tabelle a) e b) con tutti i valori reali di  $H_n$  e di  $\sigma(n)$  anche per i numeri abbondanti colossali, poiché solo così si avranno i valori reali finali e definitivi di  $L(n)$ , che confermeranno la nostra proposta di soluzione positiva  $L(n) \geq 1$  per l'equivalenza di Lagarias  $RH1 = RH$ , che dimostra anche la RH oltre alla equivalente RH1. **I risultati delle nostre tabelle, ancorché approssimativi ma non molto lontani da quelli reali, sono tuttavia in grado di sostenere la nostra suddetta soluzione.**

I soli valori reali ed esatti di  $L(n)$  che abbiamo a disposizione sono soltanto due, per  $n = 60$  e per  $n = 120$ , come da successiva tabella c) :

**Tabella c) con valori reali**

<b>n</b>	<b>L(n)</b>	<b>R = n / L(n)</b>
<b>60</b>	<b>2,97668</b>	<b>20,1566</b>
<b>120</b>	<b>6,06265</b>	<b>19,7933</b>
<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>

**Valori che confermano la nostra conclusione che  $\frac{n'}{n} \approx \frac{L(n')}{L(n)}$**

**con n valore di n precedente di n', in questo caso n =60**

**precede n' = 120, e quindi abbiamo:**

$$\frac{n'}{n} = \frac{120}{60} = 2 \approx 2,06 = \frac{6,06265}{2,97668} = \frac{L(n')}{L(n)}$$

**come si è visto anche nella tabella 9 dei rapporti verticali :**

**un numero abbondante colossale n' si ottiene moltiplicando**

**il numero colossale precedente per un numero primo p nel**

**caso dei fattoriali n! (o anche composto p' per n' multiplo del**

**fattoriale precedente) in modo tale che (nel caso dei**

**fattoriali):**

$$n' = n \cdot p$$

dove  $p$  è il numero primo più grande del più grande numero primo già fattore di  $n$  (vedi TABLE 1 di Lagarias); e, nel caso di multiplo di un fattoriale precedente:

$$n' = n \cdot p',$$

con  $p'$  un numero qualsiasi, anche composto; il che, secondo le nostre tabelle, compresa e specialmente l'ultima tabella con valori reali, si ripercuote poi anche su  $L(n')$ , mostrando che:

$$L(n') \approx L(n) \cdot p$$

analogamente a come  $n' = n \cdot p$ ,

e anche con l'evidente relazione  $n' \approx L(n') \cdot R$

per esempio  $n' = 120 \approx 119,999 = 6,06265 \cdot 19,7933$

ed  $n' \approx L(n) \cdot p \cdot R$

$$n' = 120 \approx 2,97668 \cdot 2 \cdot 19,7933 = 117,8366$$

ma anche  $n' = 120 \approx 2,97668 \cdot 2,03671 \cdot 19,7933 = 119,999$

dove 2,03671

è il rapporto  $\frac{L(n')}{L(n)} = \frac{L(120)}{L(60)} = \frac{6,06265}{2,97668} = 2,03671 \approx 2 = p$

infatti  $n' = n \cdot p = 60 \cdot 2 = 120$

Le future tabelle ricalcolate con i valori reali di  $H_n$  e di  $\sigma(n)$  confermeranno quindi tali relazioni

$$L(n') \approx L(n) \cdot p \quad \text{ed} \quad n' = n \cdot p$$

anche per tutti gli altri  $n$  ed  $n'$  abbondanti e abbondanti colossali successivi a 60 e a 120, fino a quelli della TABLE 1 ed anche oltre; e quindi l'andamento crescente di  $L(n)$ , con  $n$  numeri abbondanti e abbondanti colossali (fattoriali  $m!$  e loro multipli  $m! \cdot p'$ ). Tale crescita di  $L(n') \approx L(n) \cdot p$  è paragonabile, come abbiamo visto, alla stessa misura ( $p$ ) con cui cresce  $n'$ , e cioè  $n' = n \cdot p$ ; e poiché  $n'$  cresce con un  $p$  sempre più grande, come nei fattoriali, anche  $L(n)$  cresce nella stessa misura, e quindi non può mai decrescere al crescere di  $n'$ , (sono due valori che crescono insieme); e né tanto meno decrescere fino a  $L(n') \leq 0 =$  contro esempio

**dell'equivalenza di Lagarias  $RH1 = RH$  , che così risulta vera e dimostrata, anche con le nostre tabelle approssimative, da confermare in seguito con le tabelle con i valori reali.**

**Si può prendere infine in considerazione l'altro utile e possibile rapporto**

$$R' = \frac{\sigma(n)}{L(n)}$$

**(che porta a risultati simili a quelli ottenuti con  $R = \frac{n}{L(n)}$  ) e osservandone l'andamento con la successiva tabella d) con  $L(n)$  stimato, come nella TABELLA 1.**

**Tabella d)**

<b>n</b>	<b><math>\sigma(n)</math> valori esatti</b>	<b>L(n) valori stimati</b>	<b><math>R' = \frac{\sigma(n)}{L(n)}</math></b>
<b>60</b>	<b>168</b>	<b>1,31</b> (valore reale 2,97...)	<b>128,24</b> (valore reale 56,56)
<b>120</b>	<b>360</b>	<b>4,19</b> (valore reale 6,06...)	<b>85,91</b> (valore reale 59,40)
<b>180</b>	<b>546</b>	<b>21,26</b>	<b>25,68</b>
<b>240</b>	<b>744</b>	<b>30,85</b>	<b>24,11</b>
<b>300</b>	<b>868</b>	<b>119,36</b>	<b>7,27</b>
<b>360</b>	<b>1 170</b>	<b>32,15</b>	<b>36,39</b>
<b>420</b>	<b>1 344</b>	<b>75,13</b>	<b>17,88</b>
<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>
<b>5 040</b>	<b>18 890</b>	<b>923,70</b>	<b>20,45</b>
<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>
<b>160 626 846 400 ; 907 059 914 600</b>	<b>265 449 011 330</b>		<b>34,17</b>

**Qui il rapporto  $R'$  risulta oscillare tra alcune decine di unità, anziché tra solo qualche unità come il precedente rapporto  $R$ , e ciò succede, cosa interessante, anche per  $n$  abbondanti colossali, come l'ultimo numero della tabella d), per il quale  $R' = 34,17$ . Con le future tabelle ricalcolate esattamente, tali rapporti  $R'$  non dovrebbero essere molto lontani da**

quelli approssimativi da noi stimati nella tabella d), che indicano un certo rapporto costante (poche decine di volte) tra  $\sigma(n)$  ed  $L(n)$ , così come il rapporto  $R$  tra  $n$  ed  $L(n)$  è di poche volte (alcune unità), il che mostra chiaramente che  $n$  ed  $L(n)$  crescono con rapporto quasi costante  $R$  di poche unità, mentre  $\sigma(n)$  ed  $L(n)$  crescono con rapporto quasi costante  $R'$  di poche decine di unità, poiché  $\sigma(n)$  con  $n$  numero abbondante è più grande dello stesso  $n$  (vedi rapporto  $\frac{\sigma(n)}{n}$  nella TABLE 1 di Lagarias). Ed è per questo che il rapporto  $R'$  risulta più grande di  $R$ , nella stessa misura in cui  $\sigma(n)$  risulta più grande di  $n$ , e cioè il rapporto  $\frac{\sigma(n)}{n}$

Per esempio, per  $n = 5\,040$ ,

$$R' = 20,45 \approx R \cdot 3,838 \approx 5,46 \cdot 3,838 = 20,95 \approx 20,45 = R'$$

Le piccole oscillazioni di  $R$  ed  $R'$  non disturbano in modo determinante la conclusione che  $L(n)$  cresce con  $n$  e con  $\sigma(n)$  in base ai rispettivi rapporti  $R$  ed  $R'$  (con  $R'$

ovviamente uguale a circa il prodotto tra  $R$  e il rapporto  $\frac{\sigma(n)}{n}$  indicato per ogni  $n$  abbondante colossale nella TABLE 1 di Lagarias, anche se con una piccola approssimazione).

L'andamento numerico minimo di  $L(n)$  per numeri  $n$  abbondanti e abbondanti colossali è abbastanza simile all'andamento minimo delle  $G(N')$  coppie di Goldbach per  $N$  pari di forma  $6n - 2$ , il caso peggiore perché presenta un numero di coppie di Goldbach minore rispetto a  $N = 6n$  e a  $N' = 6n + 2$ , ecco la somiglianza dei due grafici. Ma anche per il caso peggiore  $N = 6n - 2$ , la linea minima dei relativi valori di  $G(N')$  è sempre sopra i valori di  $G(N') \approx \frac{N'}{2 \log N}$  ;

ed in entrambi i casi le curve minime con i valori reali di  $G(N')$  per  $N = 6n - 2$ , e con i valori reali di  $L(n)$  per  $n$  abbondanti o super abbondanti, crescono sempre più allontanandosi dall'ascissa  $x$  sulla quale si trovano i rispettivi contro-esempi  $G(N') = 0$  ed  $L(n) \leq 0$ , che

così non si verificheranno mai, poiché sono nell'angolo inferiore priva di valori di  $G(N')$  e di  $L(n)$ , i quali sono compresi solo nell'angolo centrale in entrambi i grafici. Sopra quest'angolo centrale c'è un altro angolo, superiore, anche privo di valori, che però è irrilevante ai fini della soluzione positiva per entrambe le ipotesi (Goldbach ed  $RH1 = RH$ ); l'angolo interessante è solo quello inferiore, perché privo di contro-esempi in entrambi i casi, il che dimostra la verità delle due congetture qui esaminate.

#### NOTA 4

*Su alcune formule analitiche inerenti il lavoro di Lagarias "Un problema elementare Equivalente all'Ipotesi di Riemann" e loro possibile connessione con alcune soluzioni inerenti alcuni modelli di cosmologia di stringa.*

#### Problema A.

Sia  $H_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ . Si mostra che, per ogni  $n \geq 1$ , si ha

$$\sum_{d|n} d \leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n), \quad (1)$$

con uguaglianza soltanto per  $n = 1$ .

La funzione  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$  è la somma della funzione dei divisori, così, per esempio,  $\sigma(6) = 12$ . Il numero  $H_n$  è chiamato l'*n*-th numero armonico.

## Teorema 1.

*Il Problema A è equivalente all'Ipotesi di Riemann.*

## Proposizione 1.

Se l'ipotesi di Riemann è vera, allora per ogni  $n \geq 5041$ , si ha che

$$\sum_{d|n} d \leq e^\gamma n \log \log n, \quad (2)$$

dove  $\gamma$  è la costante di Eulero.

## Lemma 1.

Per  $n \geq 3$ , si ha che

$$\exp(H_n) \log(H_n) \geq e^\gamma n \log \log n. \quad (3)$$

Adesso,  $[t]$  indichi la parte intera di  $t$  e  $\{t\}$  la parte frazionaria di  $t$ , abbiamo che:

$$\int_1^\infty \frac{[t]}{t^2} dt = \sum_{1 \leq r \leq t \leq n} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = \sum_{r=1}^n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{n} \right) = H_n - 1.$$

Perciò

$$H_n = 1 + \int_1^n \frac{t - \{t\}}{t^2} dt = \log n + 1 - \int_1^n \frac{\{t\}}{t^2} dt. \quad (4)$$

Da questo otteniamo che

$$H_n = \log n + \gamma + \int_n^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt, \quad (5)$$

dove abbiamo posto

$$\gamma := 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt.$$

Questa è la costante di Eulero  $\gamma = 0.57721\dots$ , in quanto ponendo  $n \rightarrow \infty$ , si ottiene

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n),$$

che è la solita definizione. Adesso dall'eq. (5) abbiamo che

$$H_n > \log n + \gamma,$$

che ponendo in forma esponenziale conduce a

$$\exp(H_n) \geq e^\gamma n. \quad (6)$$

**Infine**  $H_n \geq \log n$  **così**  $\log(H_n) \geq \log \log n > 0$  **per**  $n \geq 3$ . **Combinando questo con l'eq. (6) si giunge alla (3). Dall'equazione (5), inoltre, avremo che**

$$H_n = \log n + \gamma + \int_n^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt, \quad H_n \geq \log n, \quad \text{per cui}$$

$$\log n + \gamma + \int_n^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt \geq \log n. \quad (7)$$

**Supponiamo vera l'ipotesi di Riemann. Allora la Proposizione 1 ed il Lemma 1 insieme forniscono, per**  $n \geq 5041$ ,

$$\sum_{d|n} d \leq e^\gamma n \log \log n < H_n + \exp(H_n) \log H_n. \quad (8)$$

### Soluzioni cosmologiche da un sistema D3/D7.

**L'azione completa nella M-teoria consiste di tre parti: un termine di volume, , un termine di correzione quantico,  $S_{quantum}$ , ed un termine che origina una membrana,  $S_{M2}$ . L'azione è allora data dalla somma di queste tre parti:**

$$S = S_{bulk} + S_{quantum} + S_{M2}. \quad (9)$$

**Le parti individuali sono:**

$$S_{bulk} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{11}x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{1}{48} G^2 \right] - \frac{1}{12\kappa^2} \int C \wedge G \wedge G, \quad (10)$$

dove abbiamo definito  $G = dC$ , con  $C$  che è l'usuale tre-forma della M-teoria, e  $\kappa^2 \equiv 8\pi G_N^{(11)}$ . Questa è la parte bosonica dell'azione classica della supergravità 11-dimensionale. La principale correzione quantistica all'azione può essere scritta come:

$$S_{quantum} = b_1 T_2 \int d^{11}x \sqrt{-g} \left[ J_0 - \frac{1}{2} E_8 \right] - T_2 \int C \wedge X_8. \quad (11)$$

Il coefficiente  $T_2$  è la tensione della membrana. Per il nostro caso,

$T_2 = \left( \frac{2\pi^2}{\kappa^2} \right)^{1/3}$ , e  $b_1$  è una costante numerica data esplicitamente da

$b_1 = (2\pi)^{-4} 3^{-2} 2^{-13}$ . L'azione della M2 brana è data da:

$$S_{M2} = -\frac{T_2}{2} \int d^3\sigma \sqrt{-\gamma} \left[ \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu X^M \partial_\nu X^N g_{MN} - 1 + \frac{1}{3} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu X^M \partial_\nu X^N \partial_\rho X^P C_{MNP} \right], \quad (12)$$

dove  $X^M$  sono le coordinate di “immersione” della membrana. La metrica del “volume d'universo”  $\gamma_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 0, 1, 2$  è semplicemente il “pull-back” di  $g_{MN}$ , la metrica dello spazio-tempo. Il moto di questa M2 brana è ovviamente influenzato dal “background” dei G-flussi.

### Classificazione e stabilità delle soluzioni cosmologiche.

La metrica che otteniamo per il tipo IIB è della seguente forma generale :

$$ds^2 = \frac{f_1}{t^\alpha} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2) + \frac{f_2}{t^\beta} dx_3^2 + \frac{f_3}{t^\gamma} g_{mn} dy^m dy^n \quad (13)$$

dove  $f_i = f_i(y)$  sono alcune funzioni delle coordinate della quadri-varietà e  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  possono essere numeri positivi o negativi. Per arbitrarie  $f_i(y)$  e arbitrarie potenze di  $t$ , la metrica di tipo IIB può derivare in generale da una metrica di M-teoria della forma

$$ds^2 = e^{2A} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{2B} g_{mn} dy^m dy^n + e^{2C} |dz|^2, \quad (14)$$

con tre differenti fattori di curvatura  $A, B$  e  $C$ , dati da:

$$A = \frac{1}{2} \log \frac{f_1 f_2^{\frac{1}{3}}}{t^{\alpha + \frac{\beta}{3}}} + \frac{1}{3} \log \frac{\tau_2}{|\tau|^2}, \quad B = \frac{1}{2} \log \frac{f_3 f_2^{\frac{1}{3}}}{t^{\gamma + \frac{\beta}{3}}} + \frac{1}{3} \log \frac{\tau_2}{|\tau|^2}, \quad C = -\frac{1}{3} \left[ \log \frac{f_2}{t^\beta} + \log \frac{\tau_2^2}{|\tau|^2} \right]. \quad (15)$$

**Per vedere quali sono le possibili scelte per un tale background, occorre trovare la differenza  $B - C$ . Questa è data da:**

$$B - C = \frac{1}{2} \log \frac{f_2 f_3}{t^{\gamma + \beta}} + \log \frac{\tau_2}{|\tau|}. \quad (16)$$

**Poichè le parti dipendenti inerenti lo spazio ed il tempo della (16) possono essere isolate, la (16) può annullarsi soltanto se**

$$f_2 = f_3^{-1} \cdot \frac{|\tau|}{\tau_2}, \quad \gamma + \beta = 0, \quad (17)$$

**con  $\alpha$  e  $f_1(y)$  che rimangono completamente arbitrarie.**

**Adesso studiamo il seguente caso interessante, dove  $\alpha = \beta = 2$ ,  $\gamma = 0$   $f_1 = f_2$ . La 6-varietà interna è indipendente dal tempo. Questo esempio corrisponderebbe ad un esatto background di tipo de-Sitter, e quindi questo produrrebbe un universo in accelerazione con i tre fattori di curvatura dati da:**

$$A = \frac{2}{3} \log \frac{f_1}{t^2}, \quad B = \frac{1}{2} \left[ \log f_3 + \frac{1}{3} \log \frac{f_1}{t^2} \right], \quad C = -\frac{1}{3} \log \frac{f_1}{t^2}. \quad (18)$$

**Vediamo che la quadri-varietà interna ha fattori di curvature dipendenti dal tempo sebbene lo spazio 6-dimensionale di tipo IIB è completamente indipendente dal tempo. Un tale background ha il vantaggio che la dinamica quadri-dimensionale che dipenderebbe sullo spazio interno adesso diviene indipendente dal tempo. Questo caso presuppone che la dipendenza dal tempo ha una forma peculiare, cioè la varietà interna 6D della teoria di tipo IIB è assunta costante, e le direzioni non-compatte corrispondono ad uno spazio di de-Sitter 4D. Usando la (18), la corrispondente metrica 11D nello scenario della M-teoria, può allora, in linea di principio, essere inserita nelle equazioni del moto che seguono dalla (9).**

## Soluzione applicata alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB.

Consideriamo la seguente azione in  $(q+n+2)$  dimensioni, contenente la metrica,  $g_{\mu\nu}$ , un campo diatonico,  $\phi$ , con un potenziale scalare generale,  $V(\phi)$ , ed un campo di forza  $(q+2)$ -forma,  $F_{q+2} = dA_{q+1}$ , conformemente accoppiato al dilatone:

$$S = \int_{M_{q+n+2}} d^{q+n+2}x \sqrt{|g|} \left[ \alpha R - \beta (\partial\phi)^2 - \frac{\eta}{(q+2)!} e^{-\sigma\phi} F_{q+2}^2 - V(\phi) \right]. \quad (19)$$

Qui  $R$  è lo scalare di Ricci costruito dalla metrica ed  $M$  è una costante. La stabilità richiede che le costanti  $\alpha, \beta$  e  $\eta$  siano positive, infine,  $V = \Lambda e^{-\lambda\phi}$  è il potenziale di Liouville, per il quale Wiltshire ed i suoi collaboratori hanno mostrato che le equazioni del moto non ammettono soluzioni di tipo buco nero eccetto per il caso di una costante cosmologica pura negativa,  $\lambda = 0$  e  $\Lambda < 0$ .

La soluzione che cerchiamo può essere realizzata su una tre-sfera  $S^3$  per fornire una soluzione alla supergravità 10-dimensionale di tipo IIB. Questa teoria a 10D contiene un gravitone, un campo scalare e la 3-forma NSNS tra altri campi ed ha un'azione 10 dimensionale, molto simile alla (19), fornita da

$$S_{10} = \int d^{10}x \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{4} R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-2\phi} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \right]. \quad (20)$$

**Abbiamo una configurazione 10 dimensionale data da**

$$ds_{10}^2 = \left(\frac{2}{r}\right)^{3/4} \left[ -h(r)dt^2 + r^2 dx_{0,5}^2 + \frac{r^2}{h(r)} dr^2 \right] + \left(\frac{r}{2}\right)^{5/4} \left[ d\theta^2 + d\psi^2 + d\varphi^2 + \left( d\psi + \cos\theta d\varphi - \frac{Q}{5r^5} dt \right)^2 \right]$$

$$\phi = -\frac{5}{4} \log \frac{r}{2},$$

$$H_3 = -\frac{Q}{r^6} dr \wedge dt \wedge (d\psi + \cos\theta d\varphi) - \frac{g}{\sqrt{2}} \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \wedge d\psi. \quad (21)$$

**Questa soluzione 10-dimensionale descrive NS-5 brane che si intersecano con le stringhe fondamentali nella direzione del tempo. Adesso effettuiamo la “manipolazione” delle variabili angolari della tre-sfera introducendo le seguenti 1-forme di SU(2) invarianti a sinistra:**

$$\sigma_1 = \cos\psi d\theta + \sin\psi \sin\theta d\varphi, \quad \sigma_2 = \sin\psi d\theta - \cos\psi \sin\theta d\varphi, \quad \sigma_3 = d\psi + \cos\theta d\varphi, \quad (22)$$

e

$$h_3 = \sigma_3 - \frac{Q}{5} \frac{1}{r^5} dt. \quad (23)$$

**Poi, eseguiamo il seguente cambio di variabili**

$$\frac{r}{2} = \rho^{4/5}, \quad t = \frac{5}{32} \tilde{t}, \quad dx_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} d\tilde{x}_4, \quad dx_5 = \frac{1}{2} dZ, \quad g = \sqrt{2}\tilde{g}, \quad Q = \sqrt{2}2^7 \tilde{Q}, \quad \sigma_i = \frac{1}{\tilde{g}} \tilde{\sigma}_i. \quad (24).$$

**É semplice verificare che la soluzione 10-dimensionale (21) diviene, dopo questi cambi**

$$d\tilde{s}_{10}^2 = \frac{1}{2} \rho^{-1} [d\tilde{s}_6^2] + \frac{\rho}{\tilde{g}^2} \left[ \tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left( \tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\rho^4} d\tilde{t} \right)^2 \right] + \rho dZ^2,$$

$$\phi = -\ln \rho,$$

$$H_3 = -\frac{1}{\tilde{g}^2} \tilde{\sigma}_1 \wedge \tilde{\sigma}_2 \wedge \tilde{h}_3 + \frac{\tilde{Q}}{\sqrt{2}\tilde{g}\rho^5} d\tilde{t} \wedge d\rho \wedge \tilde{h}_3, \quad (25)$$

**dove definiamo**

$$d\tilde{s}_6^2 = -\tilde{h}(\rho)d\tilde{t}^2 + \frac{\rho^2}{\tilde{h}(\rho)}d\rho^2 + \rho^2 d\tilde{x}_{0,4}^2 \quad (26)$$

e, dopo aver rimisurato M,

$$\tilde{h} = -\frac{2\tilde{M}}{\rho^2} + \frac{\tilde{g}^2}{32}\rho^2 + \frac{\tilde{Q}^2}{8}\frac{1}{\rho^6}. \quad (27)$$

Adesso trasformiamo la soluzione dal riferimento di Einstein a quello di stringa. Questo conduce a

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}\rho^{-2}[d\tilde{s}_6^2] + \frac{1}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = -2\ln \rho,$$

$$\bar{H}_3 = H_3. \quad (28)$$

Abbiamo una soluzione per la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB con un campo NSNS non banale. Se eseguiamo una trasformazione di S-dualità a questa soluzione, otteniamo ancora una soluzione per la teoria di tipo IIB, ma con una RR 3-forma,  $F_3$  non banale. La trasformazione di S-dualità agisce soltanto sulla metrica e sul dilatone, lasciando invariante la tre-forma. In questo modo siamo condotti alla seguente configurazione, che è S-duale a quella derivata sopra

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}[d\tilde{s}_6^2] + \frac{\rho^2}{\tilde{g}^2}\left[\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \left(\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{g}\tilde{Q}}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\rho^4}d\tilde{t}\right)^2\right] + \rho^2 dZ^2,$$

$$\bar{\phi} = 2\ln \rho,$$

$$F_3 = H_3. \quad (29)$$

Riguardo alla T-dualità, nel riferimento di stringa abbiamo

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}[ds_6^2] + \frac{r^2}{g^2} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left( \sigma_3 - \frac{gQ}{4\sqrt{2}} \frac{1}{r^4} dt \right)^2 \right] + r^{-2} dZ^2. \quad (30)$$

**Questa espressione fornisce una soluzione alla supergravità di tipo IIA con RR 4-forma,  $C_4$  eccitata. Procediamo effettuando una trasformazione di T-dualità, che conduce ad una soluzione della teoria di tipo IIB con RR 3-forma,  $C_3$  non banale. La soluzione completa allora diviene**

$$d\bar{s}_{10}^2 = \frac{1}{2}[ds_6^2] + \frac{r^2}{g^2} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left( \sigma_3 - \frac{gQ}{4\sqrt{2}} \frac{1}{r^4} dt \right)^2 \right] + r^2 dZ^2 ,$$

$$\bar{\phi} = 2 \ln r$$

$$C_3 = -\frac{1}{g^2} \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge h_3 - \frac{Q}{\sqrt{2}g} \frac{1}{r^5} dt \wedge dr \wedge h_3. \quad (31)$$

**Siamo condotti in questo modo, precisamente alla stessa soluzione 10D come è stata trovata in precedenza [vedi formula (29)].**

### **Connessioni matematiche con RH1=RH di Lagarias.**

**Sono state ottenute delle interessanti connessioni tra alcune soluzioni cosmologiche di un sistema D3/D7, alcune soluzioni riguardanti la supergravità 10-dimensionale di tipo IIB ed alcune equazioni riguardanti il lavoro di Lagarias sull'equivalenza RH1=RH. A tale riguardo, prendiamo la prima delle equazioni (18). È facile notare che con l'equazione (7), per  $\frac{f_1}{t^2} = n$  abbiamo la seguente interessante connessione:**

$$\log n + \gamma + \int_n^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt \geq \log n \Rightarrow \frac{2}{3} \log n. \quad (32)$$

**Anche la seconda delle equazioni (21), e la seconda delle equazioni (29), sono connesse con l'equazione (7). Abbiamo infatti:**

$$\log n + \gamma + \int_n^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt \geq \log n \Rightarrow -\frac{5}{4} \log \frac{r}{2}, \quad \log n + \gamma + \int_n^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt \geq \log n \Rightarrow 2 \ln \rho. \quad (33)$$

**Inoltre, le eq. (21) e (29), dipendono dalla (20). Quindi, avremo le seguenti interessanti connessioni:**

$$\begin{aligned} \log n + \gamma + \int_n^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt \geq \log n &\Rightarrow -\frac{5}{4} \log \frac{r}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int d^{10}x \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{4} R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-2\phi} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \right], \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log n + \gamma + \int_n^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt \geq \log n &\Rightarrow 2 \ln \rho \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int d^{10}x \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{4} R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-2\phi} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \right]. \quad (35) \end{aligned}$$

**Da queste connessioni, il possibile legame tra soluzioni cosmologiche inerenti la teoria di stringa, la funzione zeta, i numeri primi e l'equivalenza RH1=RH.**

## NOTA 5

*Sulle connessioni matematiche tra i numeri abbondanti multipli di 12, inerenti l'equivalenza RH1=RH e il numero delle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica.*

**Ricordiamo che, quando una stringa si muove nello spazio-tempo, un enorme numero di identità matematiche deve essere soddisfatto. Queste sono le identità delle funzioni modulari di Ramanujan (le equazioni modulari di Ramanujan). La funzione di Ramanujan ha 24 “modi” che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica. In questa nota, mostreremo le evidenti connessioni tra alcuni numeri abbondanti multipli di 12 (che è a sua volta un divisore di 24) ed alcune equazioni di Ramanujan.**

**Per quanto concerne tali numeri abbondanti, evidenziamo che i numeri 60 e 120 sono multipli del primo numero abbondante  $n = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ . Evidenzieremo i numeri abbondanti multipli di 60 e di 12, ricordando che**

$$\begin{aligned}
60 \times 1 &= 60 = 4! \times 2,5 = 24 \times 2,5 \\
60 \times 2 &= 120 = 5! \\
60 \times 12 &= 720 = 6! \\
60 \times 84 &= 5040 = 7!
\end{aligned}$$

e che  $120 / 12 = 10$ ,  $720 / 12 = 60$ ,  $5040 / 12 = 420$ .

È infine importante evidenziare che i numeri contrassegnati con “n”, delle Tabelle 3, 4 e 5 (pagg. 19, 21 e 22), sono tutti divisibili per 12 o 24. Tale osservazione ci è utile per mettere in risalto le connessioni matematiche tra il 24, cioè il numero di vibrazioni di una stringa bosonica ed i numeri “n” inerenti la RH1.

Avremo infatti:

$$\begin{aligned}
60 : 12 &= 5, \quad 120 : 24 = 5, \quad 180 : 12 = 3 \times 5, \quad 240 : 24 = 2 \times 5, \\
300 : 12 &= 5 \times 5, \quad 360 : 24 = 3 \times 5, \quad 420 : 12 = 5 \times 7, \\
480 : 24 &= 2 \times 2 \times 5, \quad 540 : 12 = 3 \times 3 \times 5, \quad 600 : 24 = 5 \times 5, \\
660 : 12 &= 5 \times 11, \quad 720 : 24 = 2 \times 3 \times 5, \quad 5040 : 24 = 7 \times 2 \times 3 \times 5.
\end{aligned}$$

Anche nella Tabella 9 (pag. 31) dei rapporti verticali per numeri abbondanti colossali, svolgendo i calcoli sui primi tre rapporti  $n / n$  precedente, avremo che:

$$5040 / 2520 = 2; \quad 55440 / 5040 = 11, \quad 720720 / 55440 = 13.$$

$$2520 : 24 = 3 \times 5 \times 7; \quad 5040 : 24 = 2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

$$55440 : 24 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11, \quad 720720 : 24 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13.$$

Il matematico indiano S.Ramanujan, ha mostrato che l'integrale definito

$$\phi_w(t) = \int_0^\infty \frac{\cos \pi x}{\cosh \pi x} e^{-\pi w x^2} dx, \quad (36)$$

può essere valutato in termini finiti se  $w$  è qualche multiplo razionale di  $i$ . Inoltre, questo integrale può essere valutato non soltanto per questi valori ma anche per molti altri valori di  $t$  e  $w$ . Abbiamo quindi:

$$\phi_w(t) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos 2\pi x z}{\cosh \pi z} \cos \pi x e^{-\pi x^2} dx dz = \frac{e^{-\frac{\pi^2 w'}{4}}}{\sqrt{w'}} \int_0^\infty \frac{\cosh \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w' x} dx, \quad (37)$$

qui  $w'$  sta per  $1/w$ . Da ciò segue che

$$\phi_w(t) = \frac{1}{\sqrt{w'}} e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw'). \quad (38)$$

È possibile ottenere il valore di  $\pi$  utilizzando la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \phi_w(t) &= \frac{e^{-\frac{\pi^2 w'}{4}}}{\sqrt{w'}} \int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w' x} dx = \frac{1}{\sqrt{w'}} e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw'), \quad (39) \\ e^{-\frac{\pi^2 w'}{4}} \frac{1}{\sqrt{w'}} \int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w' x} dx &= \phi_w(t), \\ e^{-\frac{\pi^2 w'}{4}} &= \frac{\phi_w(t)}{\frac{1}{\sqrt{w'}} \int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w' x} dx} = \frac{\frac{1}{\sqrt{w'}} e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')}{\frac{1}{\sqrt{w'}} \int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w' x} dx}, \\ e^{-\frac{\pi^2 w'}{4}} &= \frac{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')}{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w' x} dx}; \quad \log \frac{\pi^2 w'}{4} = \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w' x} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')}; \\ \pi &= 4 \left[ \frac{\text{anti log} \left[ \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w' x} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right]}{t^2 w'} \right]. \quad (40) \end{aligned}$$

Per quanto concerne il numero 24, dalla seguente equazione modulare di Ramanujan

$$\pi = \frac{24}{\sqrt{142}} \log \left[ \sqrt{\left( \frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left( \frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right],$$

e per l'eq. (40), abbiamo che

$$\frac{24}{\sqrt{142}} \log \left[ \sqrt{\left( \frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left( \frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right] = 4 \left[ \frac{\text{anti log} \left[ \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w' x} dx}{e^{-\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(itw')} \right]}{t^2 w'} \right];$$

$$24 = \frac{4 \left[ \text{anti log} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w'} dx}{e^{\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(i t w')} \right] \cdot \frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log \left[ \sqrt{\left( \frac{10+11\sqrt{2}}{4} \right)} + \sqrt{\left( \frac{10+7\sqrt{2}}{4} \right)} \right]}. \quad (41)$$

Per quanto concerne il numero 12, dalla seguente equazione modulare di Ramanujan

$$\pi = \frac{12}{\sqrt{130}} \log \left[ \frac{(2+\sqrt{5})(3+\sqrt{13})}{\sqrt{2}} \right], \quad \text{quindi } 12 = \frac{\pi \sqrt{130}}{\log \left[ \frac{(2+\sqrt{5})(3+\sqrt{13})}{\sqrt{2}} \right]}, \quad \text{e dall'equazione} \quad (40)$$

abbiamo che

$$12 = \frac{4 \left[ \text{anti log} \frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi x w'}{\cosh \pi x} e^{-\pi^2 w'} dx}{e^{\frac{\pi^2}{4} w'} \phi_{w'}(i t w')} \right] \cdot \frac{\sqrt{130}}{t^2 w'}}{\log \left[ \frac{(2+\sqrt{5})(3+\sqrt{13})}{\sqrt{2}} \right]}. \quad (42)$$

Palumbo (2001) ha proposto un semplice modello della nascita e dell'evoluzione dell'Universo. Nardelli (2005) ha confrontato questo modello con la Teoria delle Stringhe e lo ha tradotto in termini di quest'ultima ottenendo la seguente **relazione fondamentale**:

$$\begin{aligned} & - \int d^{26} x \sqrt{g} \left[ -\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{8} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}) \right] f(\phi) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = \\ & = \int_0^\infty \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10} x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[ R + 4 \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \text{Tr}_v(|F_2|^2) \right], \quad (43) \end{aligned}$$

una relazione generale che lega stringhe fermioniche e bosoniche agenti in tutti i sistemi naturali.

È risaputo che i numeri della serie di Fibonacci esibiscono un carattere frattale, dove le forme ripetono la loro similarità partendo dal fattore di riduzione  $1/\phi = 0,618033 = \sqrt{5} - 1/2$ . Un tale fattore compare anche nell'identità di Ramanujan

$$0,618033 = 1/\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5}) t^{4/5}} dt\right)}, \quad (44)$$

da cui è possibile ottenere anche il valore di  $\pi$

$$\pi = 2\Phi - \frac{3}{20} \left[ R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5}) t^{4/5}} dt\right)} \right], \quad (45)$$

dove 
$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

In accordo con la Teoria dei Numeri, il numero puro 12 è correlato alle seguenti identità:

$$(c)^{31} - \left\{ \frac{1}{2 \times 5} \left[ R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5}) t^{4/5}} dt\right)} \right] \right\} \approx 12; \quad (46)$$

$$\left( \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^5 + \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{1/8} = 12,03175776 \approx 12; \quad (47)$$

$$(c)^{31} - \left[ \frac{1}{2 \times 5} \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \right] \approx 12; \quad (48) \quad (c)^{30} + \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{1/4} \approx 12; \quad (49)$$

dove “c” indica la costante (o numero) di Legendre.

L'introduzione delle espressioni (44) e (45) nella (43) forniscono la seguente equazione:

$$\begin{aligned}
& - \int d^{26}x \sqrt{g} \left[ \frac{R}{16G} \cdot \frac{1}{2\Phi - \frac{3}{20} \left( R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})} t^{4/5} dt\right)} \right)} - \frac{1}{8} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \text{Tr}(G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}) f(\phi) + \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] = \int_0^\infty \frac{R}{\kappa_{11}^2} \cdot 2\Phi - \frac{3}{20} \left[ R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})} t^{4/5} dt\right)} \right] \cdot \\
& \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[ R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{11}^2}{2\Phi - \frac{3}{20} \left( R(q) + \frac{\sqrt{5}}{1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^q \frac{f^5(-t)}{f(-t^{1/5})} t^{4/5} dt\right)} \right)} \text{Tr}_\nu \right. \\
& \left. (|F_2|^2) \right], \quad (50)
\end{aligned}$$

Che è la traduzione dell'eq. (43) nei termini della Teoria dei Numeri e **che**, come facilmente si evince, **è connessa anche alla (46), quindi correlabile anche alle equazioni (41) e (42).**

## Conclusioni

Circa i numeri abbondanti multipli di 12 ( e di 24) collegabili con le vibrazioni fisiche di stringa bosonica, le Note 4 e 5 hanno messo in relazione il già noto coinvolgimento della funzione zeta , e quindi i numeri primi, con il livelli energetici degli atomi, con il coinvolgimento dei numeri composti, in particolare quelli abbondanti e quindi con più fattori primi, nelle suddette vibrazioni delle stringhe bosoniche. Si ottengono relazioni, inoltre, anche con l'equivalenza di Lagarias RH1 =RH e la nostra soluzione positiva, che collegano così la RH1 con la RH anche dal punto di vista fisico oltre che matematico. Avremo cioè che: **le vibrazioni delle stringhe collegate ai numeri primi si ripercuotono anche nei livelli energetici degli atomi tramite la funzione zeta, ed anche le vibrazioni delle stringhe bosoniche basate sui numeri abbondanti (e quindi connessi ai numeri primi come “abbondanza” di fattori primi)**

**potrebbero avere analoghe ripercussioni su diversi fenomeni quantistici degli atomi, non esclusi gli stessi livelli energetici.** Quindi, anche l'equivalenza di Lagarias da noi dimostrata ha la sua controparte fisica che certamente riveste la sua importanza. In tale lavoro, quindi, si aggira la funzione zeta, **si dimostra la RH** e si coinvolge l'equivalente RH1 nei fenomeni fisici delle stringhe, soprattutto in quelle bosoniche, (collegate a quelle fermioniche dal modello Palumbo-Nardelli) e si rendono in tal modo validi tutti i Teoremi (qualche centinaio) che cominciano così: "Ammettendo che l'Ipotesi di Riemann sia valida, allora...". È questo, quindi, a nostro avviso, un notevole contributo matematico... Questo vale anche per le formule analitiche di Lagarias collegate ai modelli di cosmologia di stringa.

### **Note bibliografiche**

**John Derbyshire: "L'Ossessione dei Numeri Primi" – Bollati Boringhieri - Giugno 2006.**

**Jeffrey C. Lagarias: "An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis" – arXiv:math/0008177v2 – 06.05.2001.**

**Michele Nardelli: "Further mathematical connections between Palumbo's model and string theory" – CNRSOLAR – 122JA2006 – 22.11.2006.**

**P. Chen, K. Dasgupta, K. Narayan, M. Shmakova, M. Zagermann: "Brane, Inflation, Solitons and Cosmological Solutions I" – hep-th/0501185.**

**C. P. Burgess, C. Nunez, F. Quevedo, I. Zavala C., G. Tasinato: "General Brane Geometries from Scalar Potentials: Gauged Supergravities and Accelerating Universes" – JHEP08 (2003) 056.**

**Michele Nardelli e Antonino Palumbo: “Su una possibile TOE e su alcune nuove connessioni matematiche tra Teoria di Stringa, Numeri Primi, Serie di Fibonacci e Partizioni” – CNRSOLAR – 206JA2007 – 05.11.2007.**

**Finito di stampare nel mese di Dicembre 2007  
presso DI.VI. Service – Via Miranda, 50 – 80131 Napoli  
Tutti i diritti riservati**