L' equivalenza di Lagarias RH1 = RH esaminata

con i soli numeri fattoriali n = k !

Francesco Di Noto e Michele Nardelli[1,2]

[1]Dipartimento di Scienze della Terra Università degli Studi
di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10
80138 Napoli, (Italy)

[2] Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Polo delle
Scienze e delle Tecnologie
Monte S. Angelo, Via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

----

Poiché i multipli $m \cdot k!$ con m da 1 a k (con m = k+1 si ritorna al successivo fattoriale (k +1) !) hanno valori di

$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(m \cdot k!)}{m \cdot k!}$, la cosiddetta "abbondanza" di n, con "n"

numeri abbondanti, e quindi multipli di un fattoriale,

intermedi tra $\frac{\sigma(k!)}{k!}$ e $\frac{\sigma(k+1)!}{(k+1)!}$, riconsideriamo l'equivalenza

di Lagarias RH1 = RH solo in base ai numeri fattoriali n=k!, senza cambiare i risultati finali, meno numerosi ma anche più utili ai fini della costruzione di apposite tabelle a sostegno della nostra proposta di dimostrazione della suddetta equivalenza.

Dopo alcuni calcoli per trovare una scorciatoia per un calcolo più rapido, ancorché approssimativo, di σ(n) = σ(k!), abbiamo trovato che tale abbondanza ogni di k! è di circa $\frac{k}{2}$ con valori approssimati per difetto: infatti $\frac{\sigma(k!)}{k!} < \frac{k}{2}$;

in tal modo abbiamo una prima stima, migliorabile, come vedremo, dei valori dell'abbondanza di n = k! e cioè

$\frac{\sigma(k!)}{k!} \approx k! \cdot \frac{k}{2}$; nella successiva TABELLA a) confrontiamo

per ogni k! le stime ottenute con la suddetta formula, con i valori reali, le rispettive discrepanze e gli errori percentuali, che diminuiscono rapidamente al crescere di k! Il che ci permette di calcolare i relativi numeri correttori che,

moltiplicati per i valori stimati, danno il valore esatto o molto vicino a quello reale, con discrepanze di una o due unità al massimo, evitabili con un maggior numero di cifre decimali, vedi TABELLA b) successiva.

Dalla TABELLA a) notiamo anche che la discrepanza (g = f – d) è sempre maggiore : 0,5,, 1, 3, 12, 60, 258, 1 250, e che si traduce in errore percentuale sempre minore: 50%, 33%, 25%, 20%, 16,6%, 10,6 %, 6,6 %, 3%...

Possiamo correggere quasi del tutto tali discrepanze con un rapporto decrescente al crescere di k!, e che chiameremo numero correttore *c* per ogni k! (da non confondere però con i valori della colonna c della TABELLA a), che sono invece i valori di $\frac{k}{2}$) e dato, per ogni k!, dal rapporto dei valori f/d della TABELLA a) e cioè dai valori reali di σ(k!) divisi per la stima degli stessi valori con la formula

$$\sigma(k!) \approx k! \cdot \frac{k}{2}$$

in modo tale che questi valori, moltiplicati per tali numeri

correttori *c*, diano i valori reali di σ(k!), o ad essi vicinissimi, come da successiva TABELLA b), riportata dopo la TABELLA a)

TABELLA a)

k	k!	$\frac{k}{2}$	stima k! · $\frac{k}{2}$	valore reale $\frac{\sigma(k!)}{k!}$	v.reale σ(k!)	diff. ;	errore %
a	b	c	d= b·e	e = f / b	f	g = f-d	h = $\frac{g}{f/100}$
1	1	0,5	0,5	1	1	0,5	50
2	2	1	2	1,5	3	1	33
3	6	1,5	9	2	12	3	25
4	24	2	48	2,5	60	12	20
5	120	2,5	300	3	360	60	16,6
6	720	3	2160	3,3583	2 418	258	10,6
7	5 040	3,5	17 640	3,7480	18 890	1 250	6,6
8	40 320	4	161 280	3,8795	<u>159 120</u>	-4856	3,050

Notiamo anche che il valore reale di abb (k!) si avvicina anche a $\frac{\sigma(k!)}{2}$, cioè a circa la metà del rapporto tra $2\sigma(k-1)!$ il valore di $\sigma(k!)$ e quello precedente, per esempio

$3{,}7480 \approx 18\,890 / 2 \cdot 2\,418 = 18\,890 / 4\,836 = 3{,}9061\ldots$

mentre per tutti i valori precedenti si hanno valori esatti, per esempio $3{,}3583 = 2418 / 2 \cdot 360 = 2418 / 720$

TABELLA b)

K	colonna f Tabella a)	colonna d Tabella a)	rapporto f/d *c* *numeri correttori*	stima σ(k!) =d · *c* ≈ *valori reali*
1	1	2	0,5	1 · 0,5 = 2 v.r.=1
2	3	2	1,5	2 ·1,5 = 3
3	12	9	1,3333	9 · 1,3333 = 12
4	60	48	1,25	48 · 1,25 = 60
5	360	300	1,2	300 · 1,2 = 360
6	2 418	2 160	1,119444444	…= 2417,99999999
7	18 890	17 640	1,070861678	… = 18 890
8	40 320	161280	0,9866	… = 159 120
9	…	…	…	…

In tal modo avremo la stima esatta (con meno cifre decimali del numero correttore *c* avremmo qualche piccolissima discrepanza, per es. 17 640 · 1,07086 = 18 889,9704).

Notiamo che al crescere di k! il numero correttore

è sempre più basso, e tende a qualche costante minore di 1; come per esempio per 8! , c = 0,9698…

Con la seguente Tabella b.1 vedremo i numeri correttori una stima approssimativa di S(k!) (la prima parte della formula logaritmica di Lagarias) usando il coefficiente di riferimento $\frac{k}{2}$, come per σ(k!), notando che tali numeri correttori sono maggiori dei precedenti e la loro differenza si ripercuote poi su L(n), facendola aumentare (vedere tabelle successive TABELLA b.1)

TABELLA b.1)

k	k!	$\frac{k}{2}$	$k!\cdot\frac{k}{2}$	$\frac{L(k!)}{k!\cdot\frac{k}{2}}$ =	num. corr. *c'*
1	1	0,5	2	0,79/0,5 =	1,58
2	2	1	2	3,31/2	1,65
3	6	3	9	12,67/9	1,40
4	24	2	48	60,28/48	1,25
5	120	2,5	300	364,18/300	1,21
6	720	3	2 160	2528,82/2160	1,17
7	5 040	3,5	17 640	19824/17640	1,12
8	40 320	4	161280	173327/161280	1,0746
…	…	…	…	…	…

Tabella b.2)

Confronto tra i due numeri correttori *c* e *c'*

k	***c***	**≤**	***c'***
1	**0,5**		**1,58**
2	**1,5**		**1,65**
3	**1,33**		**1,40**
4	**1,25**	**=**	**1,25**
5	**1,2**		**1,21**
6	**1,1194**		**1,17**
7	**1,0708**		**1,12**
8	**0,9866**		**1,0746**
…	**…**		**…**

Notiamo brevemente che, oltre al fatto che *c'* è sempre maggiore di *c* (tranne che per k =4), *c'* relativo a k è quasi uguale a *c* relativo a k-1, per esempio per k = 7 abbiamo *c* = 1,0708, e per k = 8 abbiamo c' = 1,0746

e quindi : c(k) ≈ c' (k+1), relazione che potrebbe essere utile in futuro.

Con la seguente TABELLA c), vedremo invece l'altro rapporto simile tra i valori di Hn + e^{Hn} · log(Hn) (con log logaritmo naturale)e che abbiamo chiamato "S(k!)" ed i valori di n = k!; chiameremo questo rapporto h per non ripetere ogni volta la suddetta formula il cui risultato, meno σ(k!), dà L(n) = L(k!); e se L(k!) risulterà sempre positiva e crescente al crescere di k! i numeri più pericolosi per l'equivalenza RH1 = RH di Lagarias, che prevede contro esempi nulli o negativi, cioè L(n) = L(k!) ≤ 0, tale equivalenza sarà dimostrata; poiché i numeri abbondanti come i fattoriali e i loro multipli sono i più pericolosi per tale equivalenza, essendo i loro valori di L(n) = L(k!) e L(m·k!) più bassi rispetto a tutti gli altri numeri (i valori più alti sono naturalmente quelli relativi ai numeri primi, e quindi L(p), valori disposti sulla linea superiore del grafico della Fig. 1 e

Fig. 2 di Lagarias).

Se L(k!) cresce sempre con k!, non ritornerà mai al valore 0 (contro esempio), ne tanto meno a valori negativi (altri possibili contro esempi, ma in realtà del tutto inesistenti se L(k!) sarà sempre crescente con k! in modo direttamente proporzionale, come vedremo, anche se in modo leggermente irregolare).

TABELLA c)

k!	S	$h = S / k! > \frac{\sigma(k!)}{k!}$
1! = 1	0,87911	0,87911/1 = 0,87911 < 1 (Unico caso irregolare)
2! = 2	3,3165	3,3165/2 = 1,6582 > 1,5
3! = 6	12,6702	12,6702/6 = 2,1117 > 2
4! = 24	60,28	60,28/24= 2,5116 > 2,5
5! = 120	364,18	364,18/120 = 3,0348 > 3
6! = 720	2 528,82	2528,82/720 = 3,5122 > 3,35
7! = 5 040	19 284,70	19824,70/5 040 = 3,93 > 3,74
8! = 40 320	173 327,64	173 327,64/40 320 4,2988 > 3,87
9! …	…	… …. ….

Come si vede, il rapporto "h" è sempre maggiore del rapporto $abb(n) = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(k!)}{k!}$ (vedi TABELLA a) colonna e, come dimostrato con altri n abbondanti nella Tabella 5 del lavoro principale "Proposta di dimostrazione della variante Riemann di Lagarias", anche per quanto riguarda i multipli m di 5!=120 fino a $5 \cdot 5! = 600$ (con m = 6 si ha 6! = 720 = il fattoriale successivo a 5!, ovviamente); e per i quali si hanno valori intermedi di abb(n) tra un fattoriale e il successivo: il che indica chiaramente che nemmeno i multipli m di k!, con m da 1 a k - 1sono pericolosi per l'equivalenza di Lagarias.

TABELLA d)

con i valori di l ed L(k!) = l – σ(k) per tutti i fattoriali fino a 8!

k n = k!	$s = H_n + e^{H_n} \cdot \log H_n$	L(n) = s - σ(n);	r = L(k!) /L(k-1)!
		L(n) non valida, <1	
1! = 1	0,87911	0,87911 -1 = - 0,12089,	r non valido
		(1! non è determinante per l'equivalenza)	
		L(n) valida, > 1	
2! = 2	3,3165	3,3165 - 3 = 0,3165	r non valido
3! = 6	12,6702	12,6702 -12 = 0,6702	2,1175
4! = 24	60,28	60,28 – 60 = 0,28	0,4177
5! =120	364,19	364,18 - 360 = 4,9285	17,6017
6! =720	2 528,82	2 528,82 – 2 418 = 110,88	22,4977
7! = 5040	19 813,70	19 813,70 – 18 890 = 923,70	8,3306
8! = 40320	173 327,64	173 327,64 -159120 = 14 207,64	15,38
9! ≈ 362 880	1 703 547	1 703 547 - 1 611 078 = 92 469	6,50
… …	…	… ..	… …

Per 9! il valore di σ(9!) non è esattamente quello reale ma quello stimato con il numero correttore 0,9866 relativo a 8! che dà un valore in leggero eccesso rispetto al valore reale, ma poi per differenza S(9!) – σ(9!) si avrà un valore per difetto di L(9!), e quindi anche 9! supera la prova dell'equivalenza di Lagarias:

$$L(n) - \sigma(n) > 0$$

Per 10! il numero correttore 0,9688 è già troppo alto, perché si ottiene un risultato finale L(10!) negativo, che non si ottiene con il numero correttore esatto, e minore di 0,9866 relativo a 8!, e che troverà con futuri calcoli più precisi .

Commento : mentre il rapporto tra un valore e quello precedente è ovviamente k per k!/(k-1)!, per S(k!) / S(k-1) risulta prossimo a k, per esempio per k! = 8! :

17327,64 / 19813,70 = 8.84 ≈ 8 = k; mentre per i rapporti L(k!) / L(k-1)! (ultima colonna) il rapporto varia tra qualche unità e qualche decina, almeno fino a 9! senza un criterio attualmente valutabile in modo più o meno preciso; ma comunque interessante, perché indica comunque un aumento di L(k!) rispetto a L(k-1)!, confermando l'equivalenza di Lagarias per ogni n = k!, quale che sia k.

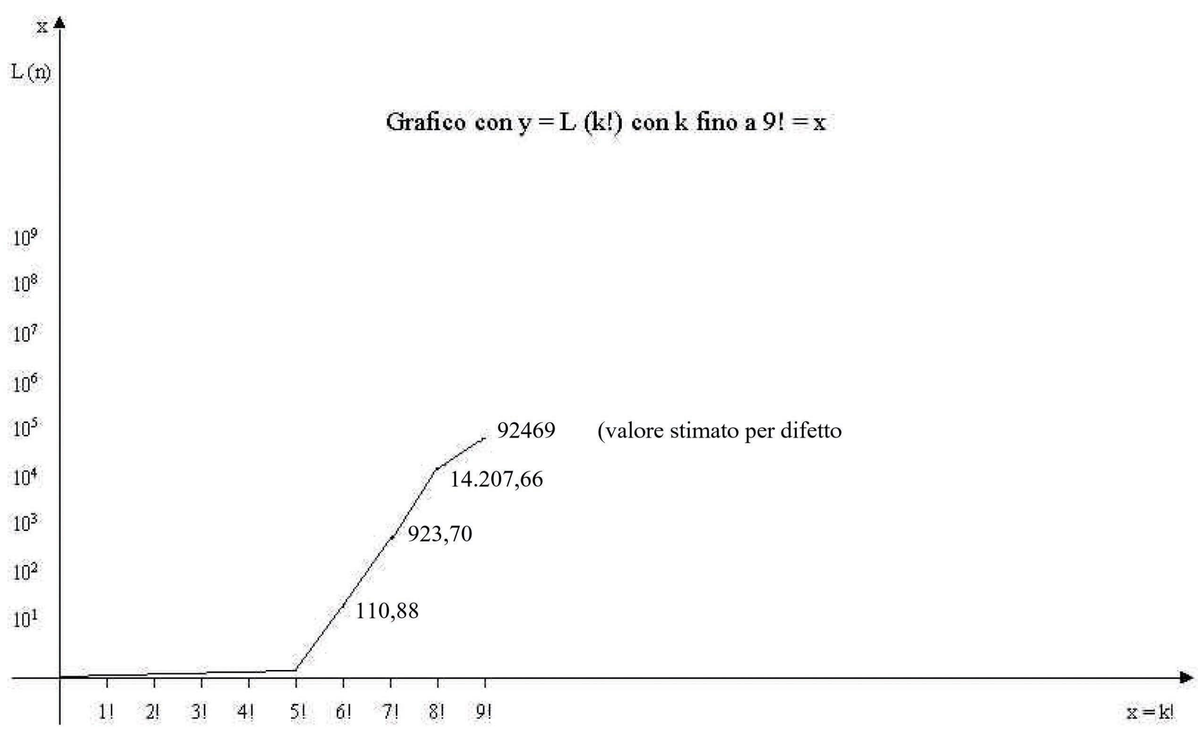
Conclusioni nota finale.

Come abbiamo visto, basta considerare soltanto i numeri fattoriali n = k! (o anche i loro multipli m · k!) per verificare con calcoli, esempi e tabelle l'equivalenza di Lagarias, trascurando tutti gli altri numeri (perché meno abbondanti, e quindi meno pericolosi), constatando che L(n) = L(k!) cresce sempre regolarmente al crescere di k (irregolarmente solo fino a k! = 3! = 6), e quindi non scenderà mai verso valori nulli o negativi, e dimostrando così

la suddetta equivalenza di Lagarias e quindi con essa anche la RH, l'ipotesi di Riemann, che com'è noto finora non dimostrata basandosi direttamente solo sulla nota funzione zeta.

…

Allegato: Grafico compattato con L(k!) fino a 9!



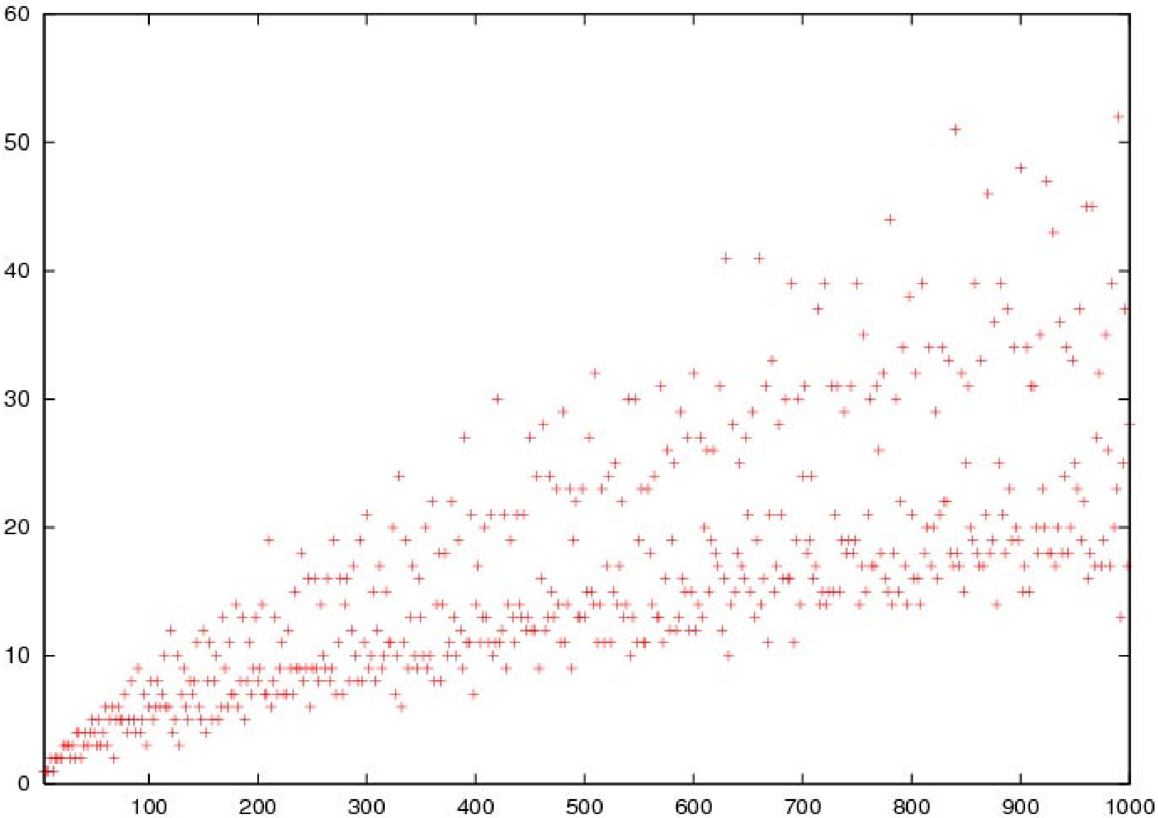
Nota

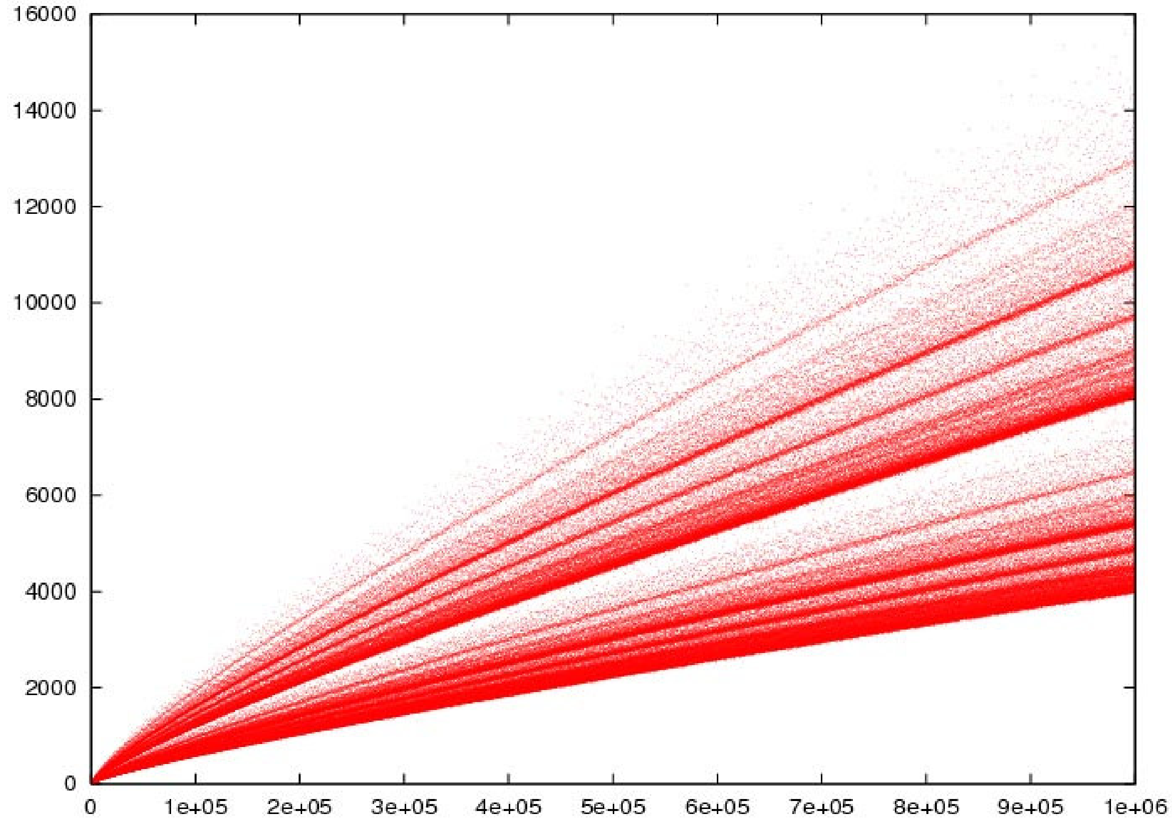
Poiché nel lavoro "Proposta di dimostrazione della congettura di Riemann con l'equivalenza di Lagarias RH1 = RH" abbiamo riportato due grafici tratti da Internet e riguardanti le coppie di Goldbach, ora abbiamo trovato altri due grafici alla voce Congettura di Goldbach – Wikipedia, e molto più utili dei suddetti grafici precedenti, a rendere meglio visivamente l'andamento delle coppie di Goldbach al crescere di N (fino a 1 000 nel primo grafico e fino a 1 000 000 nel secondo grafico). Tali grafici sono interessanti per l'equivalenza di Lagarias, perché sono simili ai grafici per tale equivalenza: due angoli privi di valori rispettivamente sopra e sotto l'angolo centrale con i rispettivi valori; è interessante l'angolo inferiore in entrambi i casi, poiché dimostra l'assenza di contro esempi

nulli per entrambe le congetture (Goldbach e Lagarias) o negativi (solo per l'equivalenza di Lagarias)

Alleghiamo questi due grafici al presente lavoro, per poterli confrontare con le figure 1 e 2 del lavoro sull'equivalenza di Lagarias con i soli fattoriali:

GRAFICI DA WIKIPEDIA "GOLDBACH's CONJECTURE"


60
50
40
30
20
10
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000



16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
1e+05
2e+05
3e+05
4e+05
5e+05
6e+05
7e+05
8e+05
9e+05
1e+06

NUOVA PROPOSTA DI SOLUZIONE PER LA

CONGETTURA DI GOLDBACH

(nuovi importanti indizi : il ruolo dei multipli dispari di 3

nella formazione delle coppie di Goldbach)

…

Uno degli argomenti preferiti delle nostre ricerche matematiche è senz'altro la ben nota Congettura di Goldbach, sia nella versione forte che in quella debole; ad essa abbiamo già dedicato diversi lavori, pubblicati sul sito http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu/ e sui siti collegati http://geocities.com/g_armillotta/metodo20.html e http://xoomer.alice.it/stringtheory (vedi sezione "Finalità").

In questo lavoro ritorneremo sulla suddetta congettura avendo alcuni indizi numerici positivi in base a due algoritmi elaborati da uno di noi (Giovanni Di Maria, informatico), e in base anche alla comprensione del meccanismo matematico con il quale si formano le coppie di Goldbach per un numero pari N nelle sue tre diverse possibili forme N = 6n (divisibile per 3), N = 6n -2 ed N = 6n +2 (non divisibili per 3) , e che vede direttamente e principalmente

coinvolti i multipli dispari di 3, ed in misura minore anche i multipli dispari di 5, 7, ecc. cioè dei numeri primi più piccoli dopo il 2.

Uno di questi algoritmi, denominato G1 (1°algoritmo per Goldbach), consultabile alla fine di questo lavoro, dà il numero reale di coppie di Goldbach per tutti gli N pari da 6 a 10.000, ed è simile in questo senso ad un test su Internet (sul sito di WIMS); che però dà le coppie di Goldbach per il numero N inserito, a dieci coppie per pagina e non il totale finale. Questo si deve quindi calcolare poi manualmente, moltiplicando per 10 il numero delle pagine stampate e aggiungendo il numero delle coppie dell'eventuale ultima pagina incompleta, cioè con meno di 10 coppie di Goldbach. Per esempio, per N = 10 000, ed essendo G(10 000) = 127, inserendo tale numero si ottengono 12 pagine complete con 10 pagine ciascuna, più una pagina con 7 coppie, per cui avremo 12 x 10 + 7 = 127 il numero totale delle copie di Goldbach per N = 10 000. L'altro algoritmo (G2, anche questo in calce al presente lavoro) ci dà invece tutte le coppie di Goldbach per tutti gli N pari da 6 a 1 000, con la dicitura " Il numero pari … è dato dalla somma dei primi …. e …." e ci dà in tal modo tutte le

possibili coppie di Goldbach per tali numeri.

Osservando i risultati di G1, notiamo, come abbiamo già detto in altri lavori (per esempio in "Andamento ciclico del numero delle coppie di Goldbach" su questo stesso sito) ed in altri lavori sul sito del Dott. Nardelli) che il numero G(N), per N = 6n, è maggiore, in genere circa il doppio, dei numeri pari vicini N' =6n-2 ed N' = 6n +2; e precisamente:

$G(N) \approx G(n - 2) + G(N+2)$ (1) (regola per coppie di Goldbach)

E tale fenomeno si ripete anche a scale più grandi, cioè a livello di decine, centinaia, migliaia, ecc. e non solo di unità per quanto riguarda il ± 2 che possiamo considerare anche come 10, 100, 1 000, ecc.

Per esempio: N = 1 200, N' = 1 200 $\pm$ 10, 1 200 $\pm$ 100, ecc., oltre che solo per N' = 1 200 $\pm$ 2 per le sole unità.

Così anche per N = 120, N' = 120 $\pm$ 2 =118 e 122, 120 $\pm$ 10 = 110 e 130, ecc.

Più in generale, per qualsiasi numero di forma multiplo di 6 moltiplicato per 10^n, tale potenza di 10 viene sottratta e aggiunta a

6×10^n, in modo da avere:

$$N = 6n \times 10^n \quad , \quad N' = 6n \times 10^n \pm 10^n \ .$$

Esempio : multiplo di 6 =12; N = 12 x 10 = 120;

N' = 120 ± 2 = 118 e 122

N' = 120 ± 10 = 110 e 130; N = 12 x 100 = 1 200 ;

N' = 1 200 ± 100 = 1 100 e 1 300, e cosi via.

Esempio della regola (1) unico per tutti, con unità, decine e centinaia:

N = 900, tenendo conto solo delle 2 unità:

N' = 900 ± 2 = 898 e 902;

G(898) = 19; G(902) = 15; G(900) = <u>48</u>;

19 + 15 = 34 ≈ <u>48</u>.

N = 900, tenendo conto delle decine:

N' = 900 ± 10 = 890 e 910

G(890) = 23; G(910) = 31; G(900) = <u>48</u>

23 + 31 = 54 ≈ <u>48</u>

N=900, tenendo conto delle centinaia: N'=900 ±100 = 800 e 1 000

G(800) = 21 G(1000) = 28 G(900) = <u>48</u>

$$21 \quad + \quad 28 \quad = \quad 49 \quad \approx \quad \underline{48}$$

Si nota che per le unità, la somma di G(N-2 e di G(N+2) è inferiore a G(N), poiché 34 < 48; per le decine invece è maggiore (54 > 48) e per le centinaia è quasi uguale ($49 \approx \underline{48}$), ma ciò non si verifica sempre (per N = 1500, avremo rispettivamente le somme 59, 64, e 70, molto vicine a G(1500) = 67).

Quello che però si verifica sempre è che i valori di G(N-2) e G(N+2), o anche di $G(N - 10^n)$ e $G(N + 10^n)$ non sono mai, entrambi o da soli, nulli, perché in tal caso si avrebbe

$G(N) \approx G(N-2) + 0$ oppure $G(N) = G(N+2) + 0$. In altre parole anche (GN) $\approx G(N \pm 2)$, poiché, come vedremo tra poco, G(N) è sempre più grande (circa il doppio) di $G(N \pm 2)$ al crescere di N.

E qui veniamo alla nostra più recente scoperta (effetto positivo dovuto ai multipli dispari di 3nella formazione delle coppie di Goldbach). La formazione delle coppie di Goldbach è infatti più facile se di forma N = 6n, e più difficile, ma non del tutto (in tal caso si avrebbe G(N') = 0, per N' = $6n \pm 2$, o di altra variante (per es. la già citata forma $N' \pm 10^n$), entrambe non divisibili per 3. Ciò perché essa è essenzialmente regolata, infatti, dai multipli dispari di 3 presenti fino a N, ed in misura molto minore

dai multipli dispari di 5, 7, 11, ecc, come vedremo negli esempi seguenti con i numeri 58, 60 e 62. Se infatti N è multiplo pari di 3, e quindi anche di 6, ed ecco la forma di N = 6n, nella formazione delle coppie di Goldbach tali multipli dispari di 3 si accoppiano tra di loro, lasciando più liberi gli altri numeri dispari, tra i quali i numeri primi presenti da 1 a N/2 e da N/2 a N, di accoppiarsi più facilmente tra di loro, generando quindi più coppie di Goldbach (per definizione formate da due numeri primi p e q tali che p + q = N); se invece N' non è divisibile per 3, e quindi è di forma N' = 6n ± 2, tali multipli dispari di 3 (e quindi numeri composti) si accoppiano con molti numeri primi, ostacolando ma non impedendo del tutto la formazione di coppie di Goldbach, poiché formano più coppie di cui un numero è multiplo dispari di 3 e l'altro è un numero primo, e quindi non sono coppie di Goldbach. Poiché gli m multipli dispari di 3 crescono con N ed N' nella misura di

$$m = \frac{N}{6} = \frac{N' + 2}{6} = \frac{N' - 2}{6}$$

i numeri primi crescono con frequenza sempre minore, per cui la differenza tra m e π(N) o π(N') sarà sempre maggiore, cosa che infine causa una crescita sempre maggiore delle coppie di Goldbach,

nella misura di almeno

$$\frac{N'}{(\log N)^2}$$ **nel caso da considerare peggiore (N' = 6n ± 2) e di**

circa il doppio nel caso migliore (N = 6n) .

E questo è un indizio positivo molto importante, se non proprio la prova definitiva, e quindi la dimostrazione, che la Congettura di Goldbach è vera: i valori reali sempre crescenti con N ed N' e molto vicini ai valori stimati con la suddetta formula logaritmica, non scenderanno mai a G(N) o a G(N') = 0, contro esempio della congettura. Veniamo ora agli esempi accennati per N = 60, ed N' = 58 e 62 per osservare in pratica la formazione delle coppie di Goldbach con l'effetto positivo dei multipli dispari di 3 quando N è di forma 6n, e quindi divisibile per 3 e, viceversa, l'effetto negativo in caso contrario, N' = 6n±2 non divisibile per 3.

N = 60 (i numeri primi sono sottolineati)

p +	q = 60	
1	59	1 e 59 coppia impropria, poiché 1 non è primo
3	57 = 3 x 19;	3 primo, 57 composto multiplo dispari di 3
5	55 = 5 x 11;	5 primo, 55 multiplo dispari di 5
7	53	7 e 53 primi, 1° coppia di Goldbach 7 + 53 = 60
9 = 3 x 3	51 = 3 x 17	9 e 51 entrambi multipli dispari di 3
11	49 = 7 x 7	11 primo, 49multiplo dispari di 7
13	47	11 e 47 primi, 2° coppia di Goldbach 11+4
17	43	17 e 43 primi, 3° coppia di Goldbach 17+43=60
15= 3 x 5	45 = 3 x 15	15 e 45 multipli dispari di 3 e anche di 5
19	41	19 e 41 primi, 4° coppia di Goldbach 19+41= 60
21 = 3 x 7	39 = 3 x 13	21 e 33 multipli dispari di 3
23	37	23 e 37 primi, 5° coppia di Goldabch
25 = 5 x 5	35 = 5 x 7	25 e 35 multipli dispari di 5
27 = 3 x 9	33 = 3 x 11	27 e 33 multipli dispari di 3
29	31	29 e 31 primi, 6° ed ultima coppia di Goldbach e anche coppia di primi gemelli = ultima coppia di Goldbach per molti N di forma N =12n.

Come si può facilmente notare, per N = 60 ci sono 60 / 4 = 15 coppie di numeri p e q (primi e composti) tali che p + q = N = 60; i numeri p e q primi sono sottolineati per meglio evidenziare le coppie di Goldbach. Tra queste complessive 15 coppie vi sono:

5 coppie formate da multipli dispari di 3 (o di 3 e di 5 insieme);

2 coppie formate da multipli dispari di 5;

1 coppia formata da 11 e da 49 (multiplo dispari di 7);

1 coppia impropria formata da 1 e 59, poiché 1 non è considerato primo; 9 coppie in totale, per cui rimangono 15 – 9 = 6 coppie formate da due numeri primi, la cui somma p + q = 60, e quindi 6 coppie di Goldbach per N = 60.

Il più grande numero primo che può avere un multiplo dispari in una delle suddette 15 coppie complessive è <u>7</u> ≈ √60 = <u>7</u>,74, infatti abbiamo la coppia 11 e 49 = 7 x 7, il successivo multiplo dispari di 7 è 7 x 9 = 63 > 60.

In generale: togliendo (sia cancellando manualmente dalla lista delle possibili N/4 coppie o con algoritmi informatici (Vedi G1 e G 2 finali del Prof. G.Di Maria e l'algoritmo dell'Ing. R. Turco), tutte le coppie con uno o due numeri composti,e la coppia impropria 1 ed N – 1, rimangono tutte le possibili coppie di Goldbach per un dato N, cioè tutte le G(N) coppie di primi p e q tali che p + q = N.

Vediamo ora per i numeri pari più vicini ad N, e cioè N' = 58 = N - 2 ed N' = 62 = 60 +2, entrambi non divisibili per 3: cominceremo con 62, e vedremo come e perché 62, pur essendo maggiore di 60, abbia invece soltanto tre coppie di Goldbach mentre 60 ne ha ben sei. Per N = 62 ci sono 62 / 4 = 15,5 = 16 possibili coppie di p e q tali che p + q = N = 62.

N = 62

p + q = 62

1	**61**	**coppia impropria 1 e 61, poiché 1 non è primo;**
3	**59**	**3 e 59 primi, 1° coppia di Goldbach, 3 + 59 = 62**
5	**57 = 3 x 19**	**5 primo, 57 multiplo dispari di 3;**
7	**55 = 5 x 11**	**7 primo, 55 multiplo dispari di 5;**
9 = 3 x 3	**53**	**9 multiplo dispari di 3, 53 primo;**
11	**51 = 3 x 17**	**11 primo, 51 multiplo dispari di 3;**
13	**49 = 7 x 7**	**13 primo, 49 multiplo dispari di 7;**
15 = 3 x 5	**47**	**15 multiplo dispari di 3, 47 primo;**
17	**45 = 3 x 15**	**17 primo, 45 multiplo dispari di 3 e di 5;**
19	**43**	**19 e 43 primi, 2°coppia di Goldbach 19 + 43 = 62**
21 = 3 x 7	**41**	**21 multiplo dispari di 3, 41 primo;**
23	**39 = 3 x 13**	**23 primo, 39 = multiplo dispari di 3;**
25 = 5 x 5	**37**	**25 multiplo dispari di 5, 37 primo;**
27 = 3 x 9	**35 = 5 x 7**	**27 multiplo dispari di 3, 35 multiplo dispari di 5;**
29	**33 = 3 x 11**	**29 primo, 3 multiplo dispari di 3;**
31	**31**	**31 primo, 3° coppia di Goldbach 31 + 31 = 62.**

Come si vede, ora i multipli dispari di 3, ma anche di 5, ecc. non si accoppiano più tra di loro, ma con altri multipli e con numeri primi, lasciando a questi ultimi minori possibilità di accoppiarsi tra di loro per formare coppie di Goldbach, che ora sono soltanto tre.

Infatti, togliendo dalle 16 coppie complessive le 13 coppie miste (un numero primo ed un numero composto, o entrambi composti, come l'unica coppia 27 e 35, e in più la coppia impropria 1 e 61), restano soltanto 3 coppie formate da soli numeri primi, e quindi le G(62) = 3 coppie di Goldbach, mentre per N=60, divisibile per 3, le coppie di Goldbach sono 6. Lo stesso avviene per N = 60 -2 = 58, per il quale però le coppie di Goldbach sono quattro. G(58) = 4

Infatti

N = 58

p + q = 58

1	57 = 3 x 19	coppia impropria 1 e 57, poiché 1 non è primo
3	55 = 5 x 11	3 primo, 55 multiplo dispari di 5;
5	53	5 primo, 53 primo, 1° coppia di Goldbach 5+53=58
7	51 =3 x 17	7 primo, 51 multiplo dispari di 3;
9 = 3 x 3	49 = 7 x 7	9 multiplo dispari di 3, 49 multiplo dispari di 7;
11	47	11 primo,47 primo,2°coppia diGoldbach 11+47=58
13	45 =3 x 15	13 primo, 45 multiplo dispari di 3 e di 5;
15 = 3 x 5	43	15 multiplo dispari di 3, 47 primo;
17	41	17 e 41 primi, 3° coppia di Goldbach, 17+41=58;
19	39 =3 x 13	19 primo, 39 multiplo dispari di 3;
21 = 3 x 7	37	21 multiplo dispari di 3, 37 primo;
23	35 = 5 x 7	23 primo, 35 multiplo dispari di 5;
25 =5 x 5	33 = 3 x 11	25 multiplo dispari di 5, 35 multiplo dispari di 3;
27 = 3 x 9	31	27 multiplo dispari di 3, 31 primo;
29	29	29 primo, 4° coppia di Goldbach, 29 + 29 = 58

Togliendo dalle 15 coppie complessive la coppia impropria 1 e 57 e le 11 coppie con un numero composto o due numeri composti, rimangono le G(58) = 4 coppie di Goldbach per N = 58.

Per la regola (1) delle coppie di Goldbach, avremo

$$G(58) + G(62) \approx G(60)$$

$$3 + 4 = 7 \approx 6 = \text{valore reale.}$$

Proseguendo ancora con gli esempi, si troverà che

G(64) = 5, G(66) = 6, G(68) = 2, con

$$G(64) + G(68) \approx G(66)$$

$$5 + 2 = 7 \approx 6 \quad \text{valore reale.}$$

Questa regola (1) si verifica continuamente, perché ogni tre

numeri pari uno è multiplo pari di 3, e quindi anche multiplo di 6, e quindi di forma N = 6n, mentre i numeri pari contigui sono di forma 6n -2 e 6n +2 e quindi condivisibili per 3, e quindi con meno coppie di Goldbach rispetto al numero N =6n più vicino, per i motivi oggetto di questo lavoro: l'effetto positivo dei multipli dispari di 3 (e in misura minore anche di 5, 7, ecc.) per i numeri pari di forma N = 6n, e negativo per quelli di forma N' = 6n$\pm$2, non divisibili per 3. Tale effetto negativo non può però essere totale, in grado cioè da non permettere la formazione di nessuna coppia di Goldbach, poiché in tal caso si avrebbe, per un ipotetico numero G(N'') = 0, che, per la regola (1), la relazione:

G(N') + G(N'') = G(N), che così diventerebbe:

G(N') + 0 = G(N)

G(N') = G(N),

cosa impossibile per N molto grandi; possibile invece, ma solo in apparenza , per N piccoli, ma non perché G(N') = 0, (che non verifica mai nemmeno per N piccoli, e nemmeno fino a N = 10^{18} secondo le ultime verifiche al computer da partesi Oliveira e Silva), ma perché in questi casi la somma G(N-2) + G(N+2) è più grande

di G(N); per esempio per N = 18, N' =18 -2 = 16, N'= 18+2 = 20,

e per la regola (1):

$$G(16) + G(20) \approx G(18)$$

$$2 + 2 = 4 \approx 2 \text{ valore reale,}$$

quindi $G(16) = G(18) = 2$ **non perchè** $G(20)= 0$

oppure perché $G(20) = G(18) = 2$ **perché** $G(16) = 0$**, ma perché**

G(18) = 2 è inferiore alla somma teorica G(16) + G(18) = 2,

inferiore alla somma reale 2+ 2= 4.

Inoltre, poiché gli m multipli dispari di 3 crescono regolarmente con m = N/6, e i numeri primi crescono mediamente con $\pi(N) = N / \log N$, la differenza tra m e $\pi(N)$ si fa sempre più grande, e di conseguenza più numeri m consentono la formazione di più coppie di Goldbach, almeno $G(N) \approx N / (\log N')^2$ nei casi peggiori e circa il doppio nel caso migliore (N di forma 6n).

Tutto ciò (ruolo determinante dei multipli di 3 ecc. e regola (1) delle coppie di Goldbach) costituisce ora un notevole passo avanti nella dimostrazione della congettura di Goldbach, rispetto ai nostri lavori precedenti, se non la prova definitiva, e quindi la sua effettiva dimostrazione.

Circa un lavoro del 1975 di Montgomery e Vaughan che "prevedeva" circa 1/50 di numeri pari che "non" fossero somma di due numeri primi (e quindi contro-esempi della congettura), ricordiamo brevemente che tale lavoro non fa alcun esempio pratico di tali numeri, e che nessun matematico non ne ha trovato finora nemmeno uno, segno evidente di qualche errore di fondo nel loro lavoro (che cercheremo di individuare in seguito), e che qui non prenderemo nemmeno in considerazione e nemmeno in futuro, fino a prova contraria, cioè fino a quando non salta fuori almeno un numero del genere.

Infine, l'Ing. Rosario Turco, informatico di Napoli, e interessato alla teoria dei numeri, basandosi sul nostro reticolo numerico descritto nella nostra prima proposta di dimostrazione pubblicata sulla rivista web "Metodo" n° 20 – 2004 , sito:

http://geocities.com/metodo20/html

e condividendo pienamente il nostro ragionamento (anche quello per assurdo), ha elaborato un algoritmo per il calcolo esatto di G(N) (vedi articolo "La congettura di Goldbach è un teorema") e pubblicato sul

sito:

www.geocities.com/SiliconValley/port3264 sezione MISC.

e che noi consideriamo la continuazione ideale, dal punto di vista informatico, tramite gli algoritmi proposti nel suo lavoro di cui sopra,della nostra prima proposta di dimostrazione della congettura di Goldbach (sulla rivista web "Metodo" n° 20 -2004), e proseguita poi con antri nostri scritti sullo stesso argomento; fino al presente lavoro contenente delle importanti novità sulla comprensione della formazione delle coppie di Goldbach basata sul ruolo dei multipli dispari di 3 -ma in misura minore anche di 5, 7, ecc. - e riportando anche gli algoritmi del Prof. Giovanni Di Maria e dell'Ing. Rosario Turco, insieme alla sua notevole argomentazione teorica.

Tali nostri lavori ci consentono di collegare in modo più preciso il numero delle

coppie di Goldbach alla formula logaritmica $G(N') \approx \frac{N'}{(\log N')^2}$

generica, trovata da altri matematici senza badare alla forma aritmetica di N' , mentre noi la abbiamo collegata solo alla forma di $N' = 6n \pm 2$**, mentre per** $N = 6n$ **tale formula diventa, come abbiamo già visto,**

$G(N) \approx 2 \dfrac{N}{(\log N)^2}$, applicando la regola (1) delle coppie di

Goldbach. Tali formule richiamano la chiaramente la stima del numero dei numeri primi "singoli" esistenti fino ad N, e cioè

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\log N}$$

senza distinzioni per la forma aritmetica di N, che invece è importante per il calcolo del numero approssimativo delle coppie di Goldbach; invece per il calcolo approssimativo del numero g(N) delle coppie di primi gemelli fino ad N tale distinzione non è necessaria, ma la formula unica diventa, con l'aggiunta della costante 1,32032…per N molto grandi,

$$g(N) \approx \frac{N}{(\log N)^2} \cdot 1{,}32032\ldots,$$

come vedremo in un altro lavoro in preparazione sulla congettura dei numeri primi gemelli. Per il calcolo logaritmico approssimativo del numero delle coppie di Goldbach facciamo un esempio unico per tutti per :

N = 1002= 6 x 167,   N' = 1002 - 2 = 1000 e 1002 + 2 = 1004

	N'	N	N'
	1000	**1002**	**1004**
G(N) = (stima)	$\frac{1000}{47,71} = 20,95$	$2 \cdot \frac{1002}{47,74} = 48,31$	$\frac{1004}{47,77} = 21,030$
G(N) (valore reale)	**28**	**36**	**18**

E, per la regola (1) delle coppie di Goldbach, abbiamo:

$$G(N-2) \quad + \quad G(N+2) \quad \approx \quad G(N)$$

$$G(1000) \quad + \quad G(1004) \quad \approx \quad (1002)$$

$$28 \quad + \quad 18 = 46 \quad \approx \quad 36 \text{ valore reale}$$

Notiamo che il rapporto 36/18 = 2,   e 36/28 = 1,2857, ecco il segno ≈ nella formula logaritmica approssimativa per G(N) con N = 6n .

Concludendo, ricordiamo che sia la congettura di Goldbach sia la congettura dei primi gemelli, ancorché connesse tra loro (una copia di gemelli è sempre l'ultima coppia di Goldbach, per motivi spiegati in altri lavori, per N = 12n) non debbono

essere considerate soltanto fini a se stesse, come semplici curiosità matematiche, ma anche, e soprattutto le loro dimostrazioni, come possibile punto di partenza per poter arrivare alla fine alla dimostrazione delle più importanti congetture, come l'ipotesi generalizzata di Riemann (GRH), della quale esse sono dei sottoproblemi, e poi, attraverso questa, anche l'ipotesi di Riemann ; non escludendo a priori qualche connessione con l'altra importante congettura P =NP, il cui esempio di problema è la fattorizzazione veloce, attualmente impossibile, e questa impossibilità è alla base, com'è noto, dei sistemi crittografici moderni, per esempio l'RSA.

Possibili connessioni tra le varie suddette congetture:

P = N P

↑ ?

↑

RH RH RH

↑ ↑ ↑

↑ ↑ ↑

Fermat GRH GRH

↑ ↑ ↑

↑ ↑ ↑

Congettura Goldbach debole → Congettura Goldbach forte → Congettura Infiniti primi gemelli

Com'è noto, la congettura debole di Goldbach e la congettura dei numeri primi gemelli sono sottoproblemi della GRH, mentre la congettura forte di Goldbach può essere collegata al Teorema di Fermat e questo all'ipotesi di Riemann (Ing. Turco, "Legami tra ultimo Teorema di Fermat, Zeta di Riemann e congettura di Goldbach")

I punti interrogativi indicano le connessioni ancora da chiarire, per completare così il quadro completo e coerente delle possibili

connessioni tra tutte e sei le congetture: dimostrando quelle alla base (Goldbach debole , Goldbach forte e primi gemelli), si potrà poi più facilmente risalire , con altre dimostrazioni, sempre più in alto, fino alla RH e forse, se la relativa connessione esiste (ancora non è certo), fino al problema P = NP, che insieme alla RH, è uno dei famosi sette problemi del millennio, ora però rimasti in sei perchè la congettura di Poincarè è stata recentemente dimostrata dal matematico russo Grigory Perelman.

GRUPPO ERATOSTENE

http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu/