CONGETTURA DI COLLATZ - VARIANTI NEL PIANO COMPLESSO E ALGORITMI

Napoli 01-02-2008

BIOGRAFIA

Rosario Turco è un ingegnere elettronico, laureato all'Università Federico II di Napoli, che lavora dal 1990 in società del gruppo Telecom Italia.

Le sue competenze professionali sono in ambito delle archittetture hw/sw Object Oriented (OOA/OOP, AOP, SOA, Virtualization) e in generale "Java 2 Enterprise Edition". Ha lavorato molti anni nella progettazione e sviluppo di sistemi informatici su piattaforme Windows/Unix/Linux e con linguaggi Java, C, C++.

Negli ultimi anni si sta particolarmente interessando alla crittografia e alla Teoria dei Numeri.

Sommario

Nel seguito viene approfondito il tema delle congetture di Collatz, con due varianti del problema ma nel piano complesso: z*i+1 e z*3i+1. Viene anche presentato un algoritmo sviluppato con SCILAB.

CONGETTURE DI COLLATZ NEL PIANO COMPLESSO

Nel presente lavoro il lettore si potrà convincere che la congettura di Collatz non è limitata solo al campo degli interi, ma è estendibile in modo quasi analogo anche al campo complesso C e agli interi di Gauss I_G.

Campo complesso C

Esaminiamo la seguente **congettura di Collatz z*i +1 nel piano complesso C**:"Dato un numero complesso z=(a,b) o z=a+ib è definibile una funzione di variabile complessa f(z) tale che:

$$(1)\quad f(a+ib)=\begin{cases} a/2+ib/2 \; se\; a,b\; pari \\ (a+ib)*i+1\; altrimenti \end{cases}$$

Se a e b sono entrambi pari si dividono entrambi per 2, altrimenti si moltiplicano per i, poi si aggiunge 1 al numero complesso finale. I passi della successione ottenuti da f(z) si arrestano sempre a (0,0)".

Nel seguito occorre tenere presente che:

- un numero complesso z=a + ib è equivalente scriverlo z=(a,b).
- i * i + 1 = 0 o che $i^2=-1$.

Numeri complessi di Collatz (NCC)

Consideriamo quando a e b non sono entrambi pari; in tal caso devono essere moltiplicati per i e alla fine si somma 1. Se il risultato è tale che a e b sono pari si ha una accelerata alla riduzione verso (0,0), grazie alla divisione per 2 (una o k volte).

I numeri complessi che permettono di ricadere in un numero che si possa dividere per 2 rapidamente sono definiti "**numeri complessi di Collatz**" e sono quelli per cui sono vere le seguenti condizioni:

(2) $z = a+ib = 2^k+i(1-2^k)$, Re(z)>0, Im(z)>0
(3) $z' = a-ib = -2^k+i(1-2^k)$, Re(z)>0, Im(z)<0

(4) $z'' = -a-ib = -2^k+i(1+2^k)$, $Re(z)<0$, $Im(z)<0$
(5) $z''' = -a+ib = 2^k+i(1+2^k)$, $Re(z)<0$, $Im(z)>0$

Proprietà: Forme mappate da (a,b)
Si dimostra che (a,b) mappa ad una delle seguenti forme:
(3) (a/2, b/2)
(4) ((1-b)/2, a/2)
(5) ((1-a)/2, (1-b)/2)
(6) (b/2, (1-a)/2)

Esempi nel piano complesso C:
Nel seguito chiamiamo seme il numero complesso di partenza.

Seme (16,24) -> 8+i12 (vedi (3)), 4+i6, 2+i3, -2+2i, -1+i, -i, 2, 1, 1+i, **i, (0,0)**.

Seme (16,25) -> -24+i16, -12+i8 (vedi (4)), -6+i4, -3+i2, -1-3i, 2-i, 2i, **i, (0,0)**

Seme (17,25) -> -24+i17, -16-i24, -8-i12 (vedi (5)), -4-i6, -2-i3, 4-i2, 2-i1, 2+i2, 1+i, **i, (0,0)**

Seme (17,24) -> -23+i17, -16-i23, 24-i16, 12-i8 (vedi (6)), 6-i4, 3-i2, 3+i3, -2+i3, -2-i2, -1-i, 2-i, 2+2i, 1+i, **i, (0,0)**

Convergenza di (a,b) a (0,0) nel problema Collatz z*i+1
Nel piano complesso la dimostrazione della convergenza di (a,b) a (0,0) è quasi banale, anche se a=R(z) e b=Im(z) sono dispari. Le forme (3)(4)(5)(6) ci hanno insegnato molte cose.

Difatti dato un numero complesso a+ib, abbiamo le seguenti possibilità:
1. se a e b sono entrambi pari si dividono per 2 e si ottiene a/2+ib/2; ora poniamo a=a/2 e b=b/2 se entrambi i membri non sono pari si ricade nel punto 2; se, invece, continuano a essere pari si riapplica la 1 e nel caso fortunato che a=b si divide direttamente per a (k=a volte) e si arriva a 1+i->i->(0,0)
2. se a e b non sono pari allora (a+ib)*i+1 ci dà (1-b)+ia Se b era dispari 1-b è pari e col segno cambiato. Se a è pari si ricade nella 1 e si ottiene (1-b)/2+ia/2. Se a è dispari si ripete 2 e si ottiene (1-a)/2 + i(1-b)/2 e quindi anche la parte reale diventa pari e si ritorna a 1.

Per cui un numero complesso converge sempre a (0,0) attraverso la (1) di sopra. Difatti è osservabile che moltiplicando z*i+1 si otterrebbe che:
(a+ib)*i +1 = -b+1 + ia
(-b+1 +ia)*i +1 = -a+1 + i(-b+1)
(-a+1 + i (-b+1))*i +1 = (b-1)+i(-a+1)

E così via. In altri termini la moltiplicazione per i e la somma per 1 garantiscono che, in vari passi, la parte reale e la parte immaginaria, scambiandosi di ruolo (grazie al fatto che $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$ etc) e cambiando anche spesso di segno, diventano pari, diminuendo man mano, fino ad arrivare a i e a (0,0). La successione di numeri complessi si arresta a (0,0) definitivamente, non esiste ciclicità, perché 0/2=0.

Proprietà Numero di passi dei numeri complessi di Collatz
Il numero di passi di un numero complesso di Collatz di classe k è pari al numero di passi di quello della classe precedente K-1 aumentato di una unità.

Problema di Collatz "z*3i+1"
Nel problema di Collatz "z*3i+1" la successione di numeri complessi che si ottiene diverge sempre. Il che vuol dire che un qualsiasi algoritmo che facesse un calcolo numerico del genere finirebbe in un loop infinito.

Nel seguito un algoritmo scritto con SCILAB. Se in esso si sostituisce la riga:
z=z*%i + 1;
con la riga:
z=z*%i*3 + 1;
si esamina anche il secondo problema nel piano complesso.

ALGORITMI PER PROBLEMA DI COLLATZ z*i+1 NEL PIANO COMPLESSO

```
function CollatzIm(z)
//
// Prodotto con Scilab
// Author: R. Turco ©
//
f=0; // Per uscire poi dal while
i=1;
// Z vettore contenente i valori di z
Z=[];
// memorizzo il punto di partenza nel vettore dei complessi
Z(i)=z;
if((real(z)==0) & (imag(z)==0)) then f=1; end
while(f==0)
  a=1;
  b=1;
  i=i+1;
  // Verifico se pari per capire il trattamento
  a=modulo(real(z), 2);
  b=modulo(imag(z), 2);
  // Se entrambi pari oppure uno nullo ed uno pari li divido per 2, altrimenti moltiplico tutto per i e
sommo 1 alla fine
  if (((a==0) & (b==0)) | ((real(z)==0) & (b==0)) | ((imag(z)==0) & (a==0))) then z=z/2; else
z=z*%i + 1; end
  // alimento il vettore dei complessi
  Z(i) = z;
  //  Se z=(0,0) arresto il tutto
  if((real(z)==0) & (imag(z)==0)) then f=1; end
end
  // Con pause posso sapere dall'ambiente 1-> Z
  pause;
endfunction
```