Il segreto della spirale di Ulam, le forme 6k± 1 e il problema di Goldbach

ing. Rosario Turco

Sommario

Nel seguito esamineremo una serie di problemi classici e soprattutto una diversa e originale loro rappresentazione grafica. Si esaminano la spirale di Ulam, la spirale di Marteinson, il concetto di modulo di Gauss e delle nuove spirali che permettono una visione migliore della distribuzione dei numeri primi.

Premessa

La spirale di Ulam da sempre affascina chi studia la Teoria dei Numeri. In figura è riportata una versione ridotta che riporta solo gli iniziali 49 numeri naturali a partire da 1, che è posto al centro e si avvolgono attorno tutti i numeri, formando una spirale. Nella figura sono evidenziati in giallo i numeri primi. Ulam scoprì, casualmente scarabocchiando su un block notes durante una noiosa riunione, che i numeri primi si allineano secondo determinate diagonali, come mostrato nella figura successiva.

37	36	35	34	33	32	**31**
38	**17**	16	15	14	**13**	30
39	18	**5**	4	**3**	12	**29**
40	**29**	6	1	**2**	**11**	28
41	20	**7**	8	9	10	27
42	21	22	**23**	24	25	26
43	44	45	46	**47**	48	49

spirale di Ulam

Figura 1

Finché ho guardato la figura 1 in tal modo, non ho compreso l'essenza nascosta dietro di essa. Raccontando a mio figlio Mario il codice Atbash e quello che usava la *scitala lacedemonica* per crittografare i messaggi, ho avuto una semplice intuizione. La crittografia con la scitala permetteva di cambiare il modo di crittografare un messaggio semplicemente variando il diametro dell'asse circolare attorno al quale si avvolgeva una striscia di lettere, scritta in ordine casuale (la chiave privata condivisa tra mittente e ricevente), e con cui si crittavano e decrittavano i messaggi. Questo mi ha permesso di comprendere non solo la spirale di Ulam [1], ma anche la spirale proposta da Peter Marteinson [2] e proporne una terza denominata "spirale di Turco".

Il braccio delle spirali: definizione

Definiamo semplicemente come "braccio della spirale", la quantità q di numeri naturali che scriviamo, prima di farli avvolgere con un giro di spirale con altri numeri. Nel caso della "spirale di Ulam" il braccio è q=2. Se pensiamo, invece, ad una spirale con q=6 esce la "spirale di Peter Marteinson", come nella Figura 2.

					33						
					27						
					21						
					15						
					9						
					3						
28	22	16	10	4		**2**	8	14	20	26	32
29	**23**	**17**	**11**	**5**		1	**7**	**13**	**19**	25	**31**
					6						
					12						
					18						
					24						
					30						

spirale di Marteinson

Figura 2

D'altra parte un codice a sostituzione come l'Atbash è comunque basato su una tecnica di sostituzione di lettere secondo un modulo N. La spirale di Marteinson mostra che i numeri primi, fatta eccezione del 2 e del 3, si allineano sotto il 5 ed il 7. E' un modo per dire che essi rispettano la forma $6k\pm 1$ (vedi [3]) e che un numero primo P sotto il 5 è tale che P mod 6 = 5 (forma 6k-1), mentre un numero primo P sotto il 7 è tale che P mod 6 = 1 (Forma 6k+1). In tutto questo stiamo giocando con l'orologio di Gauss, ovvero col concetto di modulo!

Inoltre un composto sotto 5 è tale da rispettare il "prodotto esterno" (6k-1)(6k+1); mentre un composto sotto il 7 è tale da rispettare uno dei due "prodotti interni": (6k-1)(6k-1) o (6k+1)(6k+1).

Il lavoro [3] e la spirale di Marteinson portano sempre alla conclusione che, definito:

$$\pi(N) := \{\#primi < N\}$$

allora è:

$$\pi(N) = K5p + K7p - (K5C + K7C1 + K7C2) + 2, \text{ se } N>3$$

dove:

K5p := {max K: 6*K-1<N}
K7p := {max K: 6*K+1<N}
K5C := {num. coppie (K1,K2): (6*K1-1)(6*K2+1)<N}
K7C1 := {num. coppie (K1,K2): (6*K1-1)(6*K2-1)<N}
K7C2 := {num. coppie (K1,K2): (6*K1+1)(6*K2+1)<N}

Esempi

N	**K_{5p}**	**K_{7p}**	**K_{5C}**	**K_{7C1}**	**K_{7C2}**	**+2**	**π (N)**	**Numeri Primi**
12	2	1	0	0	0	+2	5	{2,3,5,7,11}
16	2	2	0	0	0	+2	6	{2,3,5,7,11,13}
27	4	4	0	1	0	+2	9	{2,3,5,7,11,13,17,19,23}
36	6	5	1	1	0	+2	11	{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31}
61	9	10	1	2	1	+2	17	{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47, ,53,59}

L'orologio di Gauss e la spirale di Ulam

Ma se la spirale di Ulam ha braccio q=2, significa che possiamo ragionare modulo 2 e mettere la spirale in una forma diversa dove le diagonali spariscono o in modo che non ci confondano, come in Figura 3. Sappiamo che se $p \equiv a \bmod 2$ (congruità) significa che stiamo considerando due numeri che differiscono di un multiplo di 2; se inoltre p, q sono primi e tali che p-a=2=q allora essi sono gemelli. Allora la spirale di Ulam è la spirale con q=2, cioè una spirale dei numeri gemelli!

13	11	9	7	5	3	1	2	4	6	8	10	12	14
spirale dei gemelli o di Ulam													

Figura 3

Infatti sulla parte sinistra cadono numeri primi vicini che sono gemelli: 5 e 7 sono gemelli, 11 e 13 anche, e così via. Il 3 ed il 5 (vedi [3]) non sono gemelli nel senso $6k\pm1$.

La spirale di Turco ed il problema di Goldbach

Che succede se usassimo un orologio modulo 12? Si evidenziano conseguenze grafiche interessanti. Esaminiamo di seguito la Figura 4, evidenziando come al solito i numeri primi.

						72						
						60						
						48						
						36						
						24						
						12						
71	**59**	**47**	35	**23**	**11**		1	**13**	25	**37**	49	**61**
70	58	46	34	22	10		2	14	26	38	50	62
69	57	45	33	21	9		**3**	15	27	39	51	63
68	56	44	32	20	8		4	16	28	40	52	64
67	55	**43**	**31**	**19**	**7**		**5**	**17**	**29**	**41**	**53**	65
						6						
						18						
						30						
						42						
						54						
						66						
						spirale di Turco						

Figura 4

Indicando con CRX il numero caporiga X, dalla spirale di Turco (Figura 4) si scoprono proprietà legate al problema di Goldbach:

- La somma dei due numeri primi della riga con CR7 è sempre un numero pari della riga con CR 2: 7+7=14, 7+19=26, 7+31=38 etc. Il 2 non si può ottenere perché nel problema di Goldbach si considerano numeri primi maggiori di 2;
- La somma dei due numeri primi della riga con CR 5 è sempre un numero pari della riga che ha come CR 10: 5+5=10, 5+17=22, 5+29=34 etc
- La somma dei due numeri primi della riga che ha come CR 11 è sempre un numero pari della riga che ha come CR 10: 11+11=22, 11+23=34, 11+47=58 etc
- La somma dei due numeri primi della riga che ha come CR 1 è sempre un numero pari della riga che ha come CR 2: 13+37=50, 13+61=74 etc
- La somma dei due numeri primi uno della riga che ha come CR 5 e l'altro come CR 7 dà un numero pari della riga con CR 12: 5+7=12, 5+19=24 etc
- La somma dei due numeri primi uno della riga che ha come CR 11 e l'altro come CR 1 dà un numero pari della riga con CR 12: 11+13=24, etc
- La somma dei due numeri primi uno della riga che ha come CR 7 e l'altro come CR 11 dà un numero pari della riga con CR 6: 7+11=18, etc
- La somma dei due numeri primi uno della riga che ha come CR 5 e l'altro come CR 1 dà un numero pari della riga con CR 6: 5+13=18, etc

Per cui riassumendo è:
CR7+CR7= CR1+CR1=CR2
CR5+CR5=CR11+CR11=CR10
CR5+CR7=CR1+CR11=CR12
CR7+CR11=CR1+CR5=CR 6

Numeri gemelli e Goldbach

Riprendiamo il Teorema: "Per N pari e nella forma N=12n (forma padre) la coppia di numeri primi ottenibile dall'ultima soluzione di Goldbach è costituita da due numeri gemelli" (Michele Nardelli – Francesco Di Noto).

E' evidente che se considero un numero con CR 12 rispetto che N=12n per n=1 la somma 5 e 7 sono numeri gemelli, per n=3 17+19=36 e sono numeri gemelli.

Riferimenti

[1] A Visual Display of some properties of the distribution of primes – Stein, M.L., S.M. Ulam and M.B. Wells (1964)

[2] Observation on the regularity of prime number distribution – Peter Marteinson

[3] Test di primalità, fattorizzazione e $\pi(N)$ con forme $6k\pm1$ – ing. Rosario Turco, dott. Michele Nardelli, prof. Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, prof. Annarita Tulumello

[4] Tecniche di primalità e Teoremi – www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 (sezione MISC) ing . Rosario Turco