I NUMERI PRIMI GEMELLI E L'IPOTESI DI RIEMANN GENERALIZZATA

(con accenno al problema P = NP)

Francesco Di Noto, Annarita Tulumello, Giovanni Di Maria e Michele Nardelli[1,2]

[1] Dipartimento di Scienze della Terra

Università degli Studi di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10

80138 Napoli, Italy

[2] Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"

Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Polo delle Scienze e delle Tecnologie

Monte S. Angelo, via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy.

Com'è noto, la congettura degli infiniti numeri primi gemelli è un sottoproblema della G R H , cioè dell'ipotesi di Riemann generalizzata (Generalized Riemann Hypothesis).

Dimostrando la congettura dei numeri gemelli, stabilendo così che essi sono infiniti, si darebbe un contributo anche alla G R H , e di conseguenza anche all'ipotesi di Riemann (R H) uno dei famosi problemi del " millennio " non ancora risolti.

Lo stesso vale anche per l'altro sottoproblema della G R H, la congettura debole di Goldbach (insieme al Teorema dei numeri primi e al Teorema di Miller- Robin, già dimostrati).

Noi dedicheremo questo lavoro soltanto alla congettura dei numeri primi gemelli, una sua dimostrazione è stata di recente proposta dai due matematici cinesi Zhanle Du e Shouyu Du della Chinese Acamedy of Sciences, sulla quale però deve ancora pronunciarsi la comunità matematica. La loro dimostrazione contiene a pag 15 un ragionamento per assurdo. Poiché anche noi, in una nostra proposta precedente , abbiamo un nostro ragionamento per assurdo, in seguito confronteremo questi due ragionamenti, con l'intento di perfezionare ancora di più la dimostrazione finale della congettura ed eventualmente trovare qualche utile aggancio matematico con la G R H .

Riportiamo prima la notizia del lavoro dei due studiosi cinesi, data dal Prof. Patrizio Perrella su internet, con l'articolo intitolato : " Esistono infinite coppie di numeri primi gemelli", proprio come il lavoro dei due studiosi cinesi.

" Un sottoproblema della congettura di Riemann, anch'esso irrisolto, riguarda la distribuzione delle coppie di "numeri primi gemelli" (coppie di numeri primi la cui differenza è 2 ; ad esempio 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13 , 17 e 19, etc) A tale proposito i matematici concordano nell'affermare che " esistono infinite coppie di numeri primi gemelli", ma anche in questo caso non è stato fino ad ora possibile trovare una dimostrazione di questa proposizione né della sua negata. La proposizione appena enunciata, che dà anche il titolo al presente testo, è nota appunto come " congettura dei primi gemelli " .

…Lo scorso 9 ottobre è apparso in pre- print su "arxiv " (Open Archive di Fisica, Matematica, Informatica e Scienze non lineari gestito dalla Cornell University) un articolo dal titolo " There are infinitely Many Pairs of Twin Primes " scritto dai matematici cinesi Zhanle Du e Shouyu Du della Chinese Acamedy of Sciences (http://arxiv.org/abs/math.GM/0510171)

L'abstract è lapidario: " We proved that are infinitely many pairs of twin prime." L'articolo è breve : 17 pagine ed appena 4 citazioni bibliografiche . A pag 1, già nell'introduzione, viene enunciata la congettura dei primi gemelli proponendoli come un teorema (proposizione 1.1) e nelle successive pagine , dopo aver introdotto alcune proprietà ed alcuni lemmi, se ne fornisce una dimostrazione per assurdo. Se la comunità scientifica ne confermerà la validità questo risultato potrà considerarsi a buon diritto fra o più significativi risultati matematici degli ultimi decenni, sicuramente minore ma in qualche misura paragonabile all'epocale dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat ottenuta da Andrew Wiles nel giugno del 1993"

Ora riporteremo qui di seguito la nostra traduzione per assurdo a pag 15, del suddetto studio cinese, rimandando ad esso per ulteriori particolari e per il resto del lavoro. Dopodichè riporteremo la nostra dimostrazione per assurdo, e che riteniamo molto più semplice, in base al nostro Teorema n° 1 (tutti i primi, tranne il 2 e il 3, sono di forma $P = 6n \pm 1$, ma anche le potenze e i prodotti tra i numeri primi sono di forma $6n \pm 1$, sempre escludendo il 2 e il 3 come fattori primi), per poi fare un rapido confronto tra le due argomentazioni ed eventualmente trarne qualche utile conseguenza.

Per quanto riguarda poi la distribuzione delle coppie di numeri primi gemelli, i due studiosi cinesi espongono a pag 16 una complicata formula e un diagramma (Figura 1) .

Su questo argomento anche noi abbiamo la nostra formula sulla distribuzione delle coppie di numeri primi gemelli, che riportiamo nella Nota 2.

Traduzione di pag 15 e 16 di “ There are infinitely pairs of twin prime”

“ Ci sono infinite coppie di numeri gemelli “

Dimostrazione del Teorema 1.1

Supponiamo che non ci siano primi gemelli più grandi del già abbastanza grande numero n_M.

6.2 $D(n) \leq D(n_M)$ per sufficiente $n > n_M$

Consideriamo le coppie di primi gemelli nel rango [1, n]dove $n = n^2_M$

6.3 $D(n) \geq [\frac{pv}{3} \prod_{i=3}^{v-1} \frac{pi+1-3}{pi}] + D(\sqrt{n}) - 2$

Dove p_v è il massimo primo in n.

Allora i primi gemelli tra n_M e n^2_M che avremo,

6.4 $\Delta (D(n) = D(n) - D(n_M) = D(n) - D(\sqrt{n}) \geq [\frac{pv}{3} \prod_{i=3}^{v-1} \frac{pi+1-3}{pi}] - 2 = [\frac{w(v)}{3}] - 2$

Dove

6.5 $w(v) = [\frac{pv}{} \prod_{i=3}^{v-1} \frac{pi+1-3}{pi}$

Se $w(v) > 6$ allora $\Delta (D(n) \geq 1$ ci sarà al minimo un primo gemello tra n_M ed $n = n^2_M$

Per $v \geq v_6 = 5$, $p_{v0} = 11$

6.6 $w(5) = 11 x \frac{4}{5} x \frac{8}{7} = 10{,}057 > 6$

Supponiamo che per v

$W(v) = p_v \prod_{i=3}^{v-1} \frac{pi+1-3}{pi} \quad \prod_{i=3}^{v-1} > 6$

Quindi per v+1

W $(v+1) = \prod_{i=3}^{v-1} \frac{pi+1-3}{pi} \cdot \frac{p_{v+1}-3}{p_v} = p_v \prod_{i=3}^{v-1} \frac{pi+1-3}{pi} \cdot \frac{p_{v+1}}{p_v} \cdot \frac{p_{v+1}-3}{p_v} = w(v)\ \frac{p_{v+1}^2}{p_v^2} - \frac{3p_{v+1}}{p_v^2}$

Perché , $p_v+1 = p_v+2\Delta$, $\Delta \geq 1$, $p_v \geq 5$,

$p_v^2 - 3p_{v+1} - p^2 v = (p_v + 2\Delta)^2 - 3 (p_v + 2\Delta) - p_v^2 = p^2_v + 4\Delta^2 - 3p_v - 6\Delta - p_v^2 =$

$3 (\Delta-1) p_v + \Delta (p_v + 4 \Delta - 6) > 0$

Quindi , $\frac{p_{v+1}^2 - 3p_{v+1}}{p_v^2} > 1$

6.8 $w (v+1) < w(v) > 6$

Cosicchè Δ D (n) > 1. Ciò restringe la supposizione dell'equazione 6.2. Dunque ci sono infinite coppie di numeri gemelli.

Dall'equazione (6.4) e (6.5), Δ D (n) si approssima all'infinito come n cresce senza limite.

La dimostrazione è completata.

Traduzione pag 16

" Esempio 6.2 (valore reale contro formula semplificata)

Sia

6.9 $D'(n) = = [\frac{pv}{3}\prod_{i=3}^{v-1}\frac{pi+1-3}{pi}] - 2$

Allora l'equazione (6.3) deve avere

$$D(n) \geq D'(n)$$

La figura 1 mostra le reali coppie di primi gemelli (linea continua) nella gamma di [1, p^2_v+1] e la sua formula semplificata D'(n) (linea tratteggiata) da eq. (6.9).

Ciò mostra chiaramente che $D(n) \geq D'(n)$, e D' (n) non ha limite per n abbastanza grande.

In sintesi, per quanto si è potuto capire, supponendo che non ci siano più coppie di numeri primi gemelli più grandi di un numero già sufficientemente grande, si dimostra che ci sono invece ancora coppie di numeri gemelli più grandi di tale numero, anche se n cresce all'infinito, senza limiti. Una dimostrazione un po' complicata, come si può vedere dalle varie formule. Ma equiparabile, concettualmente, alla nostra e più semplice dimostrazione per assurdo, e che qui di seguito riportiamo, tratta dall'articolo " Congetture correlate alle ipotesi di Riemann (RH e GRH) già pubblicati sul sito " http://xoomer.alice.it/stringtheory"

La nostra dimostrazione per assurdo si basa sul fatto che, per la forma generale dei numeri primi :

$$P = 6n \pm 1$$

(che esclude i due soli numeri primi 2 e 3 ma che include anche i prodotti

$N = p \cdot q$ e tutte le potenze dei primi p con $p \geq 5$) , le due colonne con 6n-1 e 6n+1 contengono in parti pressocchè uguali sia i numeri primi sia i loro prodotti e le loro potenze, e in modo solo apparentemente disordinato (in realtà un ordine di fondo c'è, come vedremo in seguito

($s = (N+1)/6 = qm \pm n = pn \pm m$)

TABELLA 1

N	1° colonna 6n - 1	2° colonna 6n +1
1	5	7
2	11	13
3	17	19
4	23	25 = 5x5
5	29	31
6	35=5x7	37
7	41	43
8	47	49 = 7x7
9	53	55 = 5x11
10	59	61

In tal modo, per lo stesso n, si formano sia coppie di numeri gemelli, sia coppie formate da un numero primo e da un numero composto, per es. 55 =5x11, in entrambi i casi con differenza 2=6n+1- (6n-1) =1+1=2.

Si noti che i numeri della prima colonna sono di forma –1+6n e quelli della seconda colonna di forma 1+6n, per quanto riguarda le coppie di gemelli, fa eccezione la prima coppia di gemelli 3 e 5, poiché 3 non è di forma generale 6n± 1, ma di forma 6n +3 = 6x0 +3 = 0+3 = 3 .

Ma veniamo al nostro ragionamento per assurdo per cui le coppie di gemelli sono infinite: ammettiamo che esse siano finite, il che significa che esiste un ipotetica ultima coppia di gemelli, dopo la quale non ce ne saranno più.

Ora affinchè ciò sia possibile, occorre che

a) Dopo tale presunta ultima coppia di numeri primi gemelli, la prima colonna della Tabella 1 sia formata soltanto da numeri primi p, tutti di forma 6n -1, e la seconda colonna invece soltanto da composti c, tutti di forma 6n +1, o viceversa,

1° colonna	2° colonna
……	…….
P	P'ultima coppia di gemelli
p	c
p	c
p	c

p	c

e così via (o viceversa, c in prima colonna e p in seconda colonna) all'infinito, solo così non si formerebbero più altre coppie di gemelli oltre l'ultima presunta coppia p e p'.

b) Oppure numeri primi e numeri composti perfettamente alternati, anche in questo caso ovviamente non si possono più formare nuove coppie di numeri primi gemelli:

1° colonna	2° colonna
…….	……..
P	P'ultima coppia di gemelli
P	C
c	p
P	C
c	p
…….	……..

e così via all'infinito, anche in questo secondo caso, equivalente al primo, non si formeranno più coppie di numeri primi gemelli dopo la presunta ultima coppia p e p'.

in altre parole, i numeri di forma 6n – 1 e 6n + 1 dopo tale e presunta ultima coppia di gemelli dovrebbero essere come i numeri pari e dispari; perfettamente uguali fino a N pari e perfettamente divisi in due colonne, o perfettamente alternati, affinchè non si formi mai nella stessa riga una coppia di numeri o entrambi dispari d o entrambi pari p, ed è proprio per questo che non succede in entrambi i casi:

1° colonna d	2° colonna p
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
………..	………

E così via all'infinito, non si avrà mai nella stessa riga una coppia di numeri entrambi pari o entrambi dispari, e nemmeno con l'alternanza:

1° colonna	2° colonna
1	2
4	3
5	6
8	7
9	10
…….	……….

E anche così non si formano mai coppie di numeri entrambi pari o entrambi dispari nella stessa riga.

Allo stesso modo, non si formano coppie di gemelli se essi fossero fino a un dato N, perfettamente uguali quantitativamente e perfettamente alternati tra i primi e composti; il che non è vero per i numeri primi di forma 6n- 1 e 6n +1 per lo stesso n (affinchè la loro differenza sia sempre 2), poiché:

nel caso a) la cosa è impossibile, perché i prodotti tra due numeri primi > 5 si distribuiscono in entrambi le colonne, e più precisamente i prodotti di due numeri primi di uguale forma, per esempio 6n -1 oppure 6n +1, tutti sulla 2° colonna della tabella 1, mentre i prodotti di due numeri di forma diversa (6n -1 e 6n +1 o viceversa), finiscono nella 1° colonna, per esempio entrambi 5x11 (entrambi di forma 6n -1) = 55 = 6x9+1 ;

11 x 19 (di forma diversa) = 209 = 6x35-1 =210 – 1= 6x35 – 1 = 209 ;questo significa che tutti i prodotti di due primi (o anche di un primo e un composto, o di due composti, purchè tutti di forma 6n $\pm$ 1) finiscono sempre in tutte due le colonne, e mai nella stessa colonna, nemmeno dopo la presunta ultima coppia di numeri primi gemelli, e quindi il caso a) è impossibile, e pertanto non può impedire la formazione di nuove e successive coppie di numeri primi gemelli.

Similmente, nel caso b) , tali prodotti non possono essere perfettamente alternati con i numeri primi, come invece lo sono i pari e i dispari (vedi precedente confronto con tali numeri), né tantomeno quantitativamente uguali fino ad un dato N (come lo sono i pari e i dispari), e quindi la suddetta reale disposizione dei numeri primi e dei numeri composti su entrambe le colonne 6n-1 e 6n +1, non può mai impedire, dopo una qualsiasi presunta ultima coppia di numeri gemelli, la formazione di nuove e successive ulteriori coppie di gemelli ancora più grandi, per quanto sempre più rare, il che dipende dal quadrato della frequenza dei numeri primi fino ad un dato N quantunque grande, per esempio fino a N = 10^9 la frequenza dei numeri primi è

$1/ (\log 10^9)^2 = 1/ 20{,}72^2 = 1/ 429{,}45$, cioè mediamente una coppia ogni 429,45 unità, in realtà è leggermente superiore (la formula più precisa per il calcolo approssimativo del numero delle coppie di primi gemelli la vedremo tra poco). La disposizione reale tra i primi e composti è ovviamente quella risultante, per motivi di cui sopra (impossibilità di uguaglianza numerica tra i primi p e composti c, e anche dell'impossibilità della loro uguaglianza numerica) dalla Tabella 1, che rivediamo in tal senso:

n	1° colonna 6n - 1	2° colonna 6n +1
1	5= p	7 = p gemelli
2	11 = p	13 = p gemelli
3	17 = p	19 = p gemelli
4	23 = p	25 = c = 5x5
5	29 = p	31 = p gemelli
6	35 = c = 5x7	37 = p
7	41 = p	43 = p gemelli
8	47 = p	49 = c = 7x7
9	53 = p	55 = c = 5 x11
10	59 = p	61 = p gemelli
……….	………..	………….
17	101 = p	103 = p gemelli
………	……….	………..
……….	………..	…………

Come si vede, p e c si alternano in modo solo apparentemente irregolare e non numericamente uguali in entrambe le colonne (un solo composto nella prima colonna e tre composti nella seconda) , condizioni che si ripetono all'infinito per l'impossibilità dei casi a) e b) e quindi permetteranno all'infinito e senza alcun limite la formazione di nuove coppie di gemelli, che in tal modo sono infinite, così come sono infiniti i numeri primi, cosa dimostrata da Euclide con un ragionamento per alcuni versi analogo al nostro (dato un qualsiasi numero primo, si dimostra che ce n'è sempre uno ancora più grande), e quindi infiniti altri (ma ci sono anche altre più recenti dimostrazioni per l'infinità dei numeri primi). Per le infinite coppie di numeri primi gemelli, con altra dimostrazione per assurdo, si rimanda al recente lavoro dei due matematici cinesi, se anche la loro dimostrazione risultasse esatta, la connessione tra GRH e congettura dei numeri gemelli sarebbe confermata, ed entrambe potrebbero essere vere, cosa confermata anche dalla connessione GRH e congettura debole di Goldbach, da noi dimostrata.

Tornando brevemente sulla frequenza delle coppie di primi gemelli sulla retta numerica, descriviamo la nostra formula più precisa prima accennata, ora però con esempio per N = 10000. Il numero reale delle coppie di gemelli fino a N = 10000 è 170, mentre il numero reale delle coppie di Goldbach è 128; con la formula nota e unica per entrambe le congetture:

$$G (N) \approx g (N) \approx \frac{N}{\log_N 2} = \frac{10000}{84,83} = 117,88$$

Il numero stimato è 117,88 in errore per difetto, per il numero delle coppie di Goldbach, di circa l'8% rispetto a quello reale (infatti 128/ 117 = 1,085) e in errore per difetto, per il numero delle coppie di gemelli, di circa il 40% , infatti 170/ 117,88 = 1,44, valore che si avvicina alla costante 1,32 per N ancora più grandi, per esempio per N = 1 000 000 000 abbiamo :

stima logaritmica comune 2 331 002

$$G (N) \approx 2\,331\,002 \times 1,08 = 2\,517\,482$$

$$g (N) \approx 2\,331\,002 \times 1,32 = 3\,076\,922$$

entrambi i valori molto più vicini ai valori reali, dei quali si conosce solo g (N) = 3 424 506 con rapporto

g (N) / G(N) = g $(10)^9$/ G (10 $)^9$ = 3 424 506 / 2 517 482 = 1,360 ≈ 1,32032, e con rapporto

g (N) / (log N) = g (10) / (log 10) = 3 424 506 / 2 331 002 = 1,4691.

Lo stesso succede con qualsiasi N, il numero delle coppie gemelli cresce con N e con la frequenza delle coppie di gemelli, data dall'inverso del quadrato del logaritmo di N moltiplicato per la costante 1,32032.......

Per cui la formula più precisa, riportata da articoli su Internet, è la seguente:

$$g\,(N) \approx \frac{N.1{,}032032}{(logN)^2}$$

con log N = logaritmo naturale di N.

quindi, quando mai finiranno, e quindi saranno finite? Ovviamente, mai, e quindi sono infinite, anche per il nostro ragionamento per assurdo.

CONCLUSIONE

La nostra dimostrazione per assurdo, come si può ben vedere, è più semplice e anche più facilmente verificabile di quella precedente dei due matematici cinesi, e si confermano a vicenda, a sostegno della verità della congettura dei numeri primi gemelli, sottoproblema dell'ipotesi generalizzata di Riemann. Se è vera la congettura dei numeri primi gemelli, (così come sono già veri e dimostrati Teoremi di Miller- Rabin e il Teorema dei numeri primi, anch'essi sottoproblemi della GRH), e anche la congettura debole di Goldbach (vedi lavoro sopraccennato " Congetture correlate………), allora sarà quasi certamente vera la GRH, e quindi di conseguenza anche la RH. Mentre il suddetto lavoro, tratto anche dalle due congetture di Goldbach, è dedicato in modo particolare alla congettura dei numeri primi gemelli, e alle suddette due dimostrazioni per assurdo, convergenti verso la verità della congettura, sostenuta peraltro dalla normale dimostrazione dei due matematici cinesi.

Seguono alcune note sulla distribuzione delle coppie di numeri gemelli, e su alcune nostre novità che le riguardano, e un accenno al problema della fattorizzazione veloce (caso particolare del problema più generale P = NP, uno dei famosi problemi del millennio), è infatti facilissimo fattorizzare velocemente un prodotto di due numeri gemelli.

Nota 1. Primi gemelli, distribuzione e frequenza

A pag 19 dell'articolo " I segreti dei numeri primi " citati nel testo a proposito di numeri gemelli e ipotesi di Riemann, c'è anche il riquadro su " Quanto < a caso > sono i numeri primi ? " che riportiamo integralmente, seguito poi da una nostra osservazione in base alla forma generale dei numeri primi $P = 6n \pm 1$ (tranne il 2 e il 3)

" Quanto < a caso > sono i numeri primi "

Marzo sembra propizio per le scoperte sui numeri primi. Il problema più affascinante è forse quello di capire se esista un ordine nella loro distribuzione o se la loro comparsa nella sequenza dei numeri naturali sia casuale. Sviluppando tecniche statistiche per studiare il battito cardiaco, un gruppo di fisici della Boston

University ha scoperto che la distribuzione dei numeri primi non è completamente casuale. Pradeep Kumar, Plamen Ivanon e Gene Stanley hanno studiato le proprietà statistiche della distanza tra due primi consecutivi e degli incrementi della distanza ed, esaminando i primi 50 milioni di numeri primi, hanno ravvisato alcune regolarità. " I valori degli incrementi sono fortemente anti-correlati , dicono, ovvero incrementi positivi sono quasi sempre seguiti da incrementi negativi. Ma non è finito qui. Hanno anche osservato una periodicità nella distribuzione degli incrementi: " Gli incrementi 0,6,12,18……….sono rari, 4,10,16,22………..appaiono più spesso, ma i più comuni sono 2,4,14,20…….".

Questi sono i risultati empirici, e devono ancora passare il vaglio di una dimostrazione matematica rigorosa prima di poter affermare con sicurezza che i numeri primi sono distribuiti in modo non completamente casuale "(D.B.)

Noi possiamo già, anche se non dimostrare rigorosamente tale conclusione, dare utili indicazioni in tal senso. Costruendo infatti la tabella con le due forme dei numeri primi: 6n – 1 e 6n +1; fino a 103:

n	6n -1	6n + 1
1	5	7
2	11	13
3	17	19
4	23	25= 5x5
5	29	31
6	35 = 5x7	37
7	41	43

8	47	49=7x7
9	53	55=5x11
10	59	61
11	65 = 5x13	67
12	71	73
13	77 = 7x11	79
14	83	85= 5x17
15	89	91= 7x13
16	95= 5x19	97
17	101	103
……	…….	……
……..	……..	…….

Notiamo facilmente che le distanze 0,6,12,18 sono di forma 6n, e riguardano i numeri primi di una sola colonna , o la 6n – 1 o la 6n + 1 per esempio , nella prima colonna, 17 – 5 = 12 = 6 x 2, 59 – 41= 18= 6x3, ecc…… e nella seconda colonna, 19- 7=12=6x2, 43-31 =12 =6 x 2, ecc……

Abbiamo quindi le differenze più rare, di forma 6n, quindi 0,6,12,18,….. tra due numeri primi consecutivi: tanto più grandi sono i numeri primi, tanto è più grande la differenza 0,6,12,18,24,35ecc, solo però se i due numeri primi sono nella stessa colonna, e quindi sono entrambi di forma 6n-1 oppure 6n+1, come negli esempi riportati, anche se non sono consecutivi, ma il principio è lo stesso.

Mentre per le distanze 4, 10, 16, 22, di forma 6n – 2, possiamo fare gli esempi

11-7 =4, 17- 13 = 4, 41 – 37 = 4, 47 – 37 = 10, 57 – 37 = 16, 53 – 31 = 22,ecc..., con differenze tra un numero primo della prima colonna(6n -1)con un numero primo più piccolo della seconda colonna (6n + 1), ma in un'altra riga (n).

Più in generale, la differenza tra i numeri q della ennesima riga e numeri p della (n-k)° riga sono uguali a 6k se i due numeri q e p sono nella stessa colonna, e uguali a 6k±2 se sono in colonne diverse. Ecco perché le differenze d tra due numeri primi, consecutivi o no, sono di forma d = 6k, oppure 6k±2. I numeri primi con differenze 6k oppure 6k±2 sono casi particolari di questa regola generale. Le differenze d tra due numeri primi consecutivi possono essere ancora più grandi, ma per trovarne degli esempi occorre prolungare ancora le due colonne ben oltre i numeri primi 101 e 103 (gemelli, e quindi con k= 0 e differenza 6k +2 = 6x0+2=2), poiché fino a tali numeri primi la differenza maggiore che si possa trovare è al massimo 8, per esempio d = 97-89 = 8, poiché tra 89 e 97 non ci sono altri numeri primi. Per le distanze d di forma 6n+2, le più numerose, secondo le statistiche prima riportate, sono tra un numero primo q della seconda colonna, e un numero primo p della prima colonna, (al contrario delle differenze d di forma 6n – 2), per esempio 103-101= 2 (stessa n° riga), oppure 97- 89= 8, 79 - 71= 8, 79 – 59 =20 dove 2 = 6 x0+2, 8=6x1+2, 20=6x3+2, d= 6k+2 con d pari. Nel caso di numeri primi p e q consecutivi, per p e q più grandi di 101 e 103, non si capisce ancora bene perché tali distanze d di forma 6k+2 debbano essere un po' più numerose delle distanze d di forma 6k-2, e queste ancora più numerose delle distanze d= 6k (per numeri p e q appartenenti alla stessa colonna), pur essendo le due colonne simmetriche rispetto a 6n (essendo di forma 6n ±1), e i numeri primi distribuiti in modo apparentemente uniforme su entrambe le colonne fino ad una qualsiasi n° riga (

per es. fino a n=17 ci sono 13 primi nella prima colonna e 12 primi nella seconda colonna) con i due numeri p= 6n-1 (6x17-1=101) e q = 6n+1 (6x17+1=103), siano essi gemelli, per n >17, oppure no. Evidentemente, ci deve essere un motivo matematico ancora più profondo del perché le differenze d di forma 6k +2 sono leggermente più frequenti delle altre due possibili (6k e 6k-2), almeno fino a 50 milioni di numeri primi, e quindi fino al 50-milionesimo numero primo. Ma non può essere escluso a priori che per p e q ancora più grandi, si verificasse una preferenza per le differenze di forma 6k-2 oppure 6k, e per numeri primi consecutivi ancora più grandi ritornasse la " preferenza ", cioè una maggiore diffusione, per le differenze 6k+2, analogamente a come per il Teorema dei numeri primi, la differenza tra π (N) e Li (N) è alternativamente positiva o negativa un numero infinito di volte; e non si può ancora escludere una eventuale relazione tra le due alternanze (ancora ipotetica la prima tra 6k+2 e 6k-2, certa la seconda tra π (N) e Li (N) . Eventuali future ricerche lo accerteranno, migliorando ancora di più la conoscenza della distribuzione dei numeri primi e quindi la possibilità di una dimostrazione dell'ipotesi di Riemann basata su tali migliori conoscenze. Le nostre osservazioni, di cui sopra, sulle relazioni tra le differenze d di forma 6k, o 6k ± 2, e le forme generali 6n-1 e 6n+1 dei numeri primi e le rispettive colonne, potrebbero eventualmente servire in futuro a tale miglioramento nella conoscenza della distribuzione dei numeri primi.

Sempre nello stesso articolo, sono riportati, in una tabella, le dieci coppie di numeri primi gemelli più grandi finora scoperte, e che qui riportiamo (al numero indicato basta aggiungere 2 per ottenere l'altro, il gemello più grande).

Le top ten dei numeri primi gemelli:

NUMERO PRIMO	CIFRE
$33218925X2^{169680}-1$	51090
$60194061X2^{114689}-1$	34533
$1265199313X2^{107520}-1$	32376
$318032361X2^{107001}-1$	32220
$1807318575X2^{98305}-1$	29603
$665551035X2^{80025}-1$	24099
$781134345X2^{66445}-1$	20011
$1693965X2^{66443}-1$	20088
$83475759X2^{64956}-1$	19562
$291889803X2^{60090}-1$	18098

Inutile dire, che come primi, essi e i loro gemelli, sono entrambi di forma generale $6n\pm1$.

Possiamo solo aggiungere che, considerando la prima coppia di gemelli (e quindi la più grande finora nota), formata da numeri di 51090 cifre ciascuno, ciò significa che tali due numeri sono dell'ordine di 10^{51090} , con frequenza di circa f_p = 2x51090=102180, cioè un numero primo ogni circa 102180 unità ≈ 2 Log ($33210925x2^{169680}$ -1); e poiché la frequenza f_g delle coppie di numeri gemelli fino a N è circa $f_g \approx (2Log\ N)^2$,tale frequenza per N di tale ordine di grandezza sarà circa $f_g \cong 102180^2 \cong 10440752400$, cioè ci saranno mediamente(fino alla coppia di gemelli più grande finora nota), una coppia di gemelli ogni 10 miliardi di unità (valore approssimato per difetto). Una successiva coppia di gemelli, in pratica, si troverà mediamente verso $33218925x2^{169680}$ -10+ 10440752400, in base alla frequenza media delle coppie di gemelli a quel livello numerico. E così per altre coppie immediatamente successive, aggiungendo ancora 10440752400. Ciò evidenzia la maggiore rarità di coppie di gemelli al crescere di N, ma non la definitiva estinzione, essendo le coppie di primi gemelli infinite, come dimostrano i due cinesi, e anche noi, con la nostra dimostrazione per assurdo. Data una presunta ultima coppia di gemelli, se ne trova una ancora più grande, proprio come aveva fatto Euclide per dimostrare l'infinità dei numeri primi " singoli"; la differenza essenziale è che la frequenza media dei numeri primi è f_p =log N, oppure f_p=2Log N, quella delle coppie dei gemelli è

$$f_g=(\log N)^2, \text{ oppure } f_g=(2\mathrm{Log}N)^2$$

Vedi anche nota 2 seguente.

NOTA 2

Anche noi abbiamo della formule per stimare la distribuzione delle coppie di primi gemelli, e basate sul quadrato del logaritmo di N, in modo quasi simile alla stima media delle coppie di Goldbach fino ad N. Poiché sia le coppie di primi gemelli sia le coppie di Goldbach riguardano in modo diverso due numeri primi p e q (per Goldbach p+q = N, per i gemelli q-p = 2) la stima dipende dal quadrato del logaritmo di N, mentre il semplice logaritmo di N riguarda la frequenza media dei singoli numeri primi. Più in generale, se vorremmo studiare la frequenza di gruppi omogenei di K numeri primi, (per esempio somme di K primi) dovremmo considerare (logN)^K. Ma per il momento limitiamoci ai soli numeri primi gemelli, per i quali K = 2 (come pure K = 2 per le coppie di Goldbach, trattate in altri lavori). Da appositi calcoli, ci risulta che la frequenza media delle coppie di numeri primi gemelli fino a N è un po' inferiore al quadrato del logaritmo di N, sia che si usino i logaritmi naturali, sia che si usino i logaritmi decimali (che danno una frequenza media più vicina a quella reale, come vedremo negli esempi successivi).

Per esempio fino a N = 10000 ci sono g(N) = 170 coppie di gemelli, con una frequenza media reale di ≅ 58 unità; una coppia di gemelli ogni 58 unità, poiché f= $\frac{10000}{170}$ ≅ 58 (cifra intera, trascurando i decimali).

Una stima di tale frequenza media è data da: f' = ($\ln N$)^2= (ln 10000)^2 = 84,82

$\frac{N}{(lnN)^2}$ = $\frac{10000}{9{,}21^2}$ =$\frac{10000}{84{,}82}$ =117,89

Una prima stima della frequenza delle coppie di primi gemelli è data da

(lnN)^2 = (ln 10000)^2 = 84,82 ,

e secondo tale stima g(N) = g(10000) =$\frac{10000}{84{,}82}$ = 117,89,

cioè fino a 10000 ci sarebbero 117 coppie di gemelli, in realtà sono 170.

Una seconda stima è data dai logaritmi decimali

f " = (2logN)^2 = (2 log 10000)^2 = 8^2 =64 cosicchè ora g(N) ≅ $\frac{10000}{64}$ = 156,25

valore molto più vicino a quello reale g (10000) = 170 tale valore 156,25 si può correggere con il numero correttore c = 1,08366 = costante di Legendre (usato com'è da Legendre per correggere la stima dei numeri primi da $\frac{N}{logN}$ a $\frac{N}{lnN-1,08366}$), infatti 156,25 x1,08366 = 169,32 ≅ 170.

Con i logaritmi naturali, invece, la correzione avviene con $c^{3,5}$ =1,3247 molto vicino alla costante 1,32032 della formula generale

$$g(N) = \frac{Nx1,32032}{(lnN)^2}$$

Infatti

117,89 x 1,3247 = 156,17 ≅ 170, con 156 già più vicino a 170, mentre con la costante 1,32032 si avrà 117,89 x 1,32032 = 155,65…

1,32032 dà risultati più precisi per N molto più grandi di 10000.

Quindi, in conclusione, la frequenza delle coppie di numeri primi gemelli è circa f' / 1,32032 con i logaritmi naturali e ≅ f" / 1,08366 con i logaritmi decimali.

Infatti $\frac{84,82}{1,32032}$ = 64,24….≅ 58 = valore reale di f' e $\frac{64}{1,08366}$ ≅ 59,059 ≅ 58 valore reale di f" , come si vede con i logaritmi decimali si hanno valori più precisi nella stima di g (N) e di f", la frequenza media, rispetto ai rispettivi valori, e forse anche meglio che con le formule dei cinesi, poiché le due curve della Figura 1 a pag 16 non sono perfettamente sovrapponibili (valori reali e stima). Le nostre curve (vedi rivista web "Metodo" n°21 del 2005, sito http://geocities.com/g.armillotta/metodo21htlm) per i g(N) reali e stimati con logaritmi decimali di N = 10^n sono invece un po' più aderenti, segno evidente che le nostre stime di cui sopra sulla loro frequenza , sono un po' più precise di quelle dei due matematici cinesi.

NOTA 3

Novità e accenno alla fattorizzazione veloce (caso particolare di P = NP) dei prodotti di due numeri primi gemelli.

Altre notevoli novità sui numeri primi gemelli sono le seguenti:

1. Aumentati dell'8%, e in pratica moltiplicandoli per la costante di Legendre c = 1,08366, i numeri delle coppie di gemelli danno una stima più precisa dei numeri di Sophie Germain (i numeri più piccoli delle coppie $6n \pm 1$ formate da un numero primo di forma 6n – 1,che sia anche un numero di Sophie Germain , e del numero più grande di forma 6n+1, primo o no, e che nel primo caso non sia un numero di Sophie Germain (rigorosamente di forma 6n – 1, così come pure i numeri p tali che s = 2p+1 = 6n -1 numero primo di Sophie Germain), vedi di nostri articoli " I numeri primi di Sophie Germain prima e seconda parte " sul sito http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu . Per esempio per p=11 =6 x 2 -1 s=2x11+1=22+1=23=6x4-1=23, mentre per p=13=6x2+1, s=2x13+1=26+1=27=9x3 non primo e quindi non può essere un numero primo di Sophie Germain . Finora solo noi abbiamo notato questa regolarità, e cioè che solo i numeri primi di forma 6n-1 (più il 2 e il 3) , e con

eccezione del 17=6x3-1, ed eventuali altri, per il quale s = 2p+1=2x17+1=34+1=35=6x6-1 non primo, possono dare origine a numeri primi di Sophie Germain s= 6n-1, poiché i numeri primi di forma p= 6n+1 danno sempre luogo a numeri 6n+1 multipli di 3 e quindi non primi, per es. p= 31=6x5+1, s=2p+1=2x31+1=62+1=63=3x21 non primo. La relazione tra i numeri di di Sophie Germain e i numeri di Mersenne è già nota, ma la riportiamo brevemente: se un numero primo di Sophie Germain è di forma p=4xk-1, allora 2^p -1 non è un numero primo. (negli altri casi 2^p -1 è primo di Mersenne)

2. Mentre la differenza tra due gemelli (che condividono lo stesso n nella forma 6n ± 1) è sempre 2, poiché p= 6n-1 e q = 6n+1, e q-p = 6n+1 –(6n-1) = 6n+1-6n+1=1+1=2, quale che sia n , la loro somma è sempre di forma 12 n , infatti p + q si può scrivere anche come 6n -1 + 6n + 1 = 12n-1+1= 12n quale che sia n, (tranne che per la coppia 3+5=8, poiché 3 non è di forma 6n$\pm$1, ma 6x0+3=3, come l'altra eccezione 6x0+2=2), p +q=12n vale solo per i primi $\geq$ 5, cioè per tutti i numeri primi di forma 6n $\pm$1 , viceversa, però , tutti i numeri di forma 12n sono somma di due numeri gemelli, 48 è il primo di tali numeri a non essere somma di due gemelli, poiché $\frac{48}{2}\pm1$ = 23+25 = (6x4-1) +(6x4+1), poiché 25 non è un numero primo.
3. Il prodotto N = pxq tra due gemelli p e q diventa invece:

   N = (6n-1)(6n+1) =$36n^2$+6n-6n-1= $36n^2$-1, cioè un quadrato perfetto meno 1 , infatti 36 è il quadrato di 6 ed n^2 è il quadrato di (n).

   Per esempio per p=29 = 6 x 5-1 e q = 31= 6 x 5+1 (gemelli) con n=5, N 29x31 = 899= 900-1= 36x25-1 =36 x 5^2 -1 in tal modo, se un numero N è di forma $36n^2$-1, potrebbe essere il prodotto di due gemelli p= 6n-1 e q= 6n+1 (non lo è però N= 23x25= 575= 576-1=24^2 con n =4 poiché 25 non è primo). E quindi è possibile, in ogni caso, fattorizzarlo velocemente trovando p e q direttamente con $\sqrt{N+1}\pm 1$= p e q .

Per esempio per N 899

$\sqrt{899+1} \pm 1$ = 30 $\pm$ 1 = 29 e 31, oppure trovando n con $\sqrt{N+1/36}$ = n^2

$\sqrt{N+1/36}$ = $\sqrt{899+1/36}$ = 25= 5^2, n =$\sqrt{25}$= 5 p=6x5-1=29 e q = 6x5+1=31.

(solo la voce di wikipedia "Primzahlwilling primi gemelli oltre a noi, arriva alla breve conclusione che $36n^2$-1+1 = ($6n)^2$, senza però trarne le importanti conclusioni in questo senso).Questo è uno dei pochissimi casi in cui è possibile fattorizzare un numero composto, e specialmente il caso in cui p e q sono gemelli, con m=n . Per gli altri casi in cui m<n, si ha

N = pxq = (6m$\pm$1)x(6n$\pm$1) = 36 mn $\pm$6n$\pm$6m$\pm$1, (1)

E la fattorizzazione si complica enormemente (a p e q si sostituisce la ricerca di m ed n), come la fattorizzazione normale per tutti gli N. Per cui il caso dei gemelli, se approfondito bene, potrebbe portare alla possibile fattorizzazione veloce per tutti gli N, prodotti di due numeri p e q non gemelli, e quindi, più in generale, alla soluzione del problema P = NP. Il teorema di Cook dice che se si risolve anche uno solo dei problemi NP (circa un migliaio) si aprirebbe la via anche alla soluzione di tutti gli altri problemi NP.

Dal libri di A.K. Dewdney " La quadratura del cerchio" Ed.Apogeo, pag 198.

“ Cook dimostrò che se si potesse risolvere il problema della soddisfacibilità in modo ragionevolmente veloce, si potrebbero risolvere una quantità di problemi difficili che avevano tenuto in scacco i ricercatori per anni…….”

e a pag 203:

“ Prima di spiegare la quasi miracolosa trasformazione del Teorema di Cook, voglio illustrare come funziona una delle dimostrazioni di NP completezza. Supponiamo di avere un problema A per il quale so che è NP- completo. Se sospetto che un secondo problema B sia anch’esso NP – completo, posso essere abbastanza abile da trovare una trasformazione T di A in B. La trasformazione deve tuttavia soddisfare certe proprietà.

In primo luogo, T deve conservare i valori di unità. Se X è un esempio di A, allora T produrrà un esempio di T(X) di B, che chiameremo Y……

In secondo luogo, la trasformazione deve operare in tempo polinomiale, ci deve essere un polinomio p(n) tale che se la lunghezza dell’esempio X è n, la lunghezza dell’esempio Y non può essere superiore a p(n)….”

e a pag 204:

“….Di più, qualsiasi algoritmo in tempo polinomiale per il problema B diverrebbe un algoritmo in tempo polinomiale per ogni problema in NP…..”

Per gli altri particolari rimandiamo al libro di A:K: Dewdney. Qui ci interessa osservare che c’è un algoritmo in tempo polinomiale per fattorizzare un prodotto di due numeri primi gemelli , poiché un tale prodotto (valido,tranne che per la prima coppia di gemelli 3 e 5, per tutte le altre infinite coppie di primi gemelli) è sempre di forma $N = 36n^2 -1$ con polinomio $36n^2 -1 -N = 0$; e quindi il relativo algoritmo veloce è p= $\sqrt{(36n^2-1)+1}$ -1 , e q= $\sqrt{(36n^2-1)+1}$ +1 , oppure, cercando n, n= $\sqrt{\frac{(36n^2-1)+1}{36}}$, tale che p= 6n-1 e q= 6n+1. Ma ci potrebbero essere algoritmi veloci simili anche per prodotti di due numeri primi p e q non gemelli, per esempio i prodotto di due numeri primi molto grandi usati nel sistema crittografico RSA (per cui si consiglia di non usare in tal senso due primi gemelli, vista la suddetta fattorizzazione …..)

Scoprendo in futuro tali altri algoritmi, si proverebbe che il problema della fattorizzazione veloce sta in P, e, per il Teorema di Cook, anche tutti gli altri problemi attualmente NP- completi starebbero anche in P (attualmente però non si sa ancora bene se il problema della fattorizzazione sia NP-completo, e quindi anche per esso sarebbe valido il Teorema di Cook prima accennato). (NP sta per il " tempo polinomiale non deterministico")

Compito dei matematici è ora di estendere il nostro algoritmo veloce per scomporre un prodotto N = pxq con p e q gemelli, a tutte le altre coppie di numeri primi non gemelli p' e q', tali che N' = p' x q '; e anche noi stessi proveremo in futuro a cercare tali algoritmi (che potrebbe anche essere un algoritmo unico generalizzato, applicabile ad un polinomio generalizzato a tutte le coppie di primi p' e q', derivabile dalla formula (1):

$$N' = 36mn \pm 6n \pm 6m \pm 1$$

Con m di p' = 6m$\pm$ 1 e q' = 6n $\pm$ 1 ,

p' q' sono primi gemelli p e q solo quando m = n e i segni algebrici sono diversi

$p = 6n - 1$, $q = 6n + 1$.

Nota 4 . Numeri gemelli ed RH

Un altro accenno alla relazione tra i numeri primi gemelli e l'ipotesi di Riemann è riportato nell'articolo di D. Bressanini " I segreti dei numeri primi " sulla rivista " Le Scienze " di Maggio 2003

"…… Ora Goldston e Yldirim, compiendo un passo da gigante, hanno dimostrato che, data una frazione della distanza media (tra due numeri primi consecutivi,n.d. A.A.), non importa quanto piccola, vi è un numero infinito di coppie di primi più vicini della distanza rappresentata da quella frazione. Non solo : il loro teorema, esposto all'American Institute of Mathematis il 28 Marzo davanti ad una platea di matematici, dimostra che si possono trovare non solo due, ma un numero arbitrario di numeri primi entro quella distanza.

Ciò non è sufficiente per dimostrare la congettura dei primi gemelli, ma è un enorme passo avanti nella conoscenza della distribuzione e delle proprietà dei numeri primi.

I matematici sperano ,anche, che questo progresso possa condurre alla soluzione di quello che, dopo la dimostrazione dell'ultimo Teorema di

Fermat, è considerato ora il problema irrisolto più famoso: la congettura di Riemann, che riguarda da vicino la distribuzione dei numeri primi".

Passando però dall'ipotesi di Riemann generalizzata (GRH) , della quale la congettura dei primi gemelli è un sotto-problema, (insieme alla congettura debole di Goldbach) come accennato in questo lavoro, potremmo ritenere che ci sia un buon passo avanti in questa direzione, soprattutto con la nostra dimostrazione per assurdo, (simile in un certo senso a quella dei due matematici cinesi), sia anche con le nostre " novità" sui numeri primi gemelli per quanto riguarda la loro somma e il loro prodotto (in questo caso abbiamo ottenuto anche un primo passo utile e interessante anche nella direzione di P versus NP) nel caso che la fattorizzazione fosse un problema NP- completo) come accennato precedentemente.

Una struttura teorica delle varie congetture, tra loro connesse, è la seguente:

RH

GRH **GRH**

Goldbach → **Goldbach forte**

Debole **(Gemelli = ultima coppia di Goldbach**

per molti N di forma 12 n)

Dimostrando le ipotesi che stanno alla base di questa struttura, si potrebbe poi dimostrare in futuro anche la GRH come discendente, come conseguenze o sotto problema, e infine, dimostrare anche la RH. Ecco perché le due congetture di Goldbach debole e dei primi gemelli, finora considerate poco più che curiosità (nel primo caso, Goldbach forte , i numeri pari ≥4 come somma di due numeri primi, e per il Goldbach debole, i numeri dispari ≥ 7 come somma di tre numeri primi e nel secondo caso due numeri primi con differenza 2) sono invece teoricamente molto importanti, perché dalla loro dimostrazione si potrebbe poi risalire alla GRH e quindi alla RH, aggirando tutte le complicazioni dei numeri complessi e della famosa funzione zeta, che finora non sono bastate a dimostrare direttamente la RH. Il modo indiretto sarebbe, e forse più facile, quello di aggirare la funzione zeta, possibilmente anche tramite le congetture di Goldbach debole e dei numeri primi gemelli. Lo stesso potrebbe dirsi, per i soli primi gemelli (che peraltro sono anche l'ultima coppia di Goldbach quando, ma non sempre, N pari è di forma N = 12n, con p=$\frac{N}{2}$-1 e q =$\frac{N}{2}$+1, per es. i gemelli 11 e 13 sono di somma 11+13= 2x12= 24= N pari, con 11=$\frac{24}{2} - 1$e 13= $\frac{24}{2}$+1) i quali potrebbero dare un utile indizio anche per la soluzione della fattorizzazione come caso particolare problema NP - completo, tramite il polinomio

N = p x q = 36 n^2 -1 e quindi 36 n^2 -1 – N = 0

Dal quale, come già detto,

p = $\sqrt{N+1}$ -1 e q = $\sqrt{N+1}$ +1 , ecc.

Nota 5

Il numero delle coppie di primi gemelli fino a numeri N cresce rapidamente rispetto alla radice quadrata di N :

$$g(N) > \sqrt{N}$$

Qui prenderemo in esame, per facilità di calcolo, i numeri N di forma N = 10^n , per i quali g(N) cresce sempre molto più della loro radice quadrata, come si può notare facilmente dalla seguente TABELLA 1 per N fino a 10^{10}

TABELLA 1

n	$N = 10^n$	$\sqrt{10^n}$	$g(10^n)$	$g(10^n) / \sqrt{10^n}$	r_n / r_{n-1}
a	b	c	d	d / c = rn	r'
1	10^1	3,16	2	0,63	---
2	10^2	10	8	0,80	1,26
3	10^3	31,62	35	1,10	1,37
4	10^4	100	205	2,05	1,86
5	10^5	316,22	1 224	3,87	1,88
6	10^6	1 000	8 169	8,16	2,11
7	10^7	3 162,27	58 980	18,65	2,28
8	10^8	10 000	389 107	38,91	2,08
9	10^9	3 162,27	3 492 839 *	110,45	2,83
10	10^{10}	100 000	28 292 278 *	282,92	2,56
…	…	…	…	…	…

* valori stimati con la formula $g(N) \approx \frac{N}{(\log N)^2} \cdot 1{,}50$

(Vedi Tabella 3, con risultati migliori che con la costante 1,32032, che però da risultati più precisi per N molto più grandi).

Come ben si vede, al crescere di $N = 10^n$, il numero delle coppie di gemelli cresce sempre più rispetto alla sua radice quadrata, con rapporto $r_n = \frac{g(10^n)}{\sqrt{10^n}}$; ed il successivo rapporto $r_n' = r_n / r_{n-1}$

cresce leggermente ad ogni passaggio successivo, mentre il rapporto $g(10)^n / g(10)^{n+1}$ cresce di circa n volte a ogni passaggio successivo, come da successiva TABELLA 2 :

n	$g(10^n)$	/	$g(10^{n+1})$	$\approx$ n	
1	2	/	0	= 0 < 1	(irrilevante)
2	9	/	2	= 4,5 > 2	
3	35	/	9	= 3,8 > 3	
4	205	/	35	= 5,85 > 4	
5	1 224	/	205	= 5,97 > 5	
6	8 169	/	1 224	= 6,67 > 6	
7	58 930	/	8 169	= 7,21 > 7	
8	389 107	/	58 930	= 6,60 < 8	
9	3 492 839	/	389 107	= 8,97 < 9	
10	28 292 278	/	3 492 839	= 8,10 < 10	

… … … … …

anche se tale rapporto sembra decrescere lentamente al di sotto di n pur essendone al di sopra fino a $N = 10^7$.

Così stando le cose (crescita delle coppie di numeri primi gemelli di circa n volte fino alla successiva potenza di 10^n (Tab2) confermate anche dal rapido crescere di g(N) rispetto a $\sqrt{n}$ (Tab.1), le coppie di primi gemelli non finiranno mai, e quindi non ci sarà mai un'ultima coppia di primi gemelli, che sarebbe il contro esempio della congettura (secondo la quale esse sono infinite).

E il loro numero è stimabile per difetto con la nota formula

$$g(N) \approx \frac{N}{(\log N)^2} \cdot 1{,}32032$$

dove 1,32032 è una costante per N molto grandi; ma per N piccoli anche di tipo 10^7 o anche un po' superiori, tale costante è di circa 1,50 (poi decresce lentamente alla costante limite nota di 1,32032… al crescere di N verso valori molto più grandi), come si nota dalla successiva TABELLA 3, che connette il numero delle coppie di Goldbach per N con il numero delle coppie di primi gemelli fino a N, proprio tramite tale costante essendo il numero delle coppie di Goldbach stimabile con la stessa formula dei primi gemelli, ma senza però la suddetta costante

$$G(N) \approx \frac{N}{(\log N)^2} \approx$$ numero di coppie di Goldbach per N pari di

forma $N = 6n \pm 2$; mentre per N di forma $N = 6n$ il numero delle coppie di Goldbach è circa il doppio della suddetta stima logaritmica, come abbiamo dimostrato in recenti lavori sulla congettura di Goldbach.

TABELLA 3

n	$G(10^n)$	$g(10^n)$	$g(10^n)/G(10^n)$ = rapporto tendente a 1,32032… = costante per i numeri gemelli
1	2	2	1
2	6	9	1,5
3	28	35	1,25
4	127	205	1,614
5	810	1 224	1,5111
6	5 406	8 169	1,5110
7	38 807	58 980	1,5198
…	…	…	…

Infine, si possono paragonare le coppie di gemelli alle coppie $n + 2$ con n intero $= \sqrt{N}$; poiché fino a N ci sono n radici intere (quindi N sono i quadrati perfetti) fino a N ci sono n coppie di forma $n + 2$ paragonabili alle coppie di gemelli. Essendo infiniti i quadrati perfetti $N = n^2$, ci sono di conseguenza anche infinite radici quadrate intere n e quindi infinite coppie di forma $n + 2$.

E poiché le coppie di gemelli sono in genere di più della radice quadrata di N (tranne per i soli $N = 10$ ed $N = 100$, che hanno $g(10) = 2$, e $g(100) = 9$, con 2 minore di $\sqrt{10} = 3,16$ e 9 minore di $\sqrt{100} = 10$) anche le coppie di gemelli, paragonabili alle coppie di forma $n +2$, a maggiore ragione sono anch'esse infinite.

Infine, notiamo che la costante 1,32032 per il calcolo del numero approssimativo delle coppie dei numeri primi gemelli fino ad N ottiene moltiplicando per due la costante 0,6601618158, detta twin prime constant (vedi voce di Wikipedia "Goldbach' Conjecture").

Per quanto concerne le formule che generano numeri gemelli, segnaliamo l'articolo **"Forme generatrici di numeri primi, numeri gemelli e congetture di Collatz" dell'Ing. Rosario Turco, sul suo sito "**
http://www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264/

Nota 7.

Sulle connessioni matematiche ottenute tra Numeri Primi Gemelli e le vibrazioni fisiche di stringhe bosoniche e superstringhe.

In precedenza abbiamo detto che le distanze 0,6,12,18 sono di forma 6n, e riguardano i numeri primi di una sola colonna , o la 6n – 1 o la 6n + 1 per esempio , nella prima colonna, 17 – 5 = 12 = 6 x 2, 59 – 41= 18= 6x3, ecc…… e nella seconda colonna, 19- 7=12=6x2, 43-31 =12 =6 x 2, ecc……

Abbiamo quindi le differenze più rare, di forma 6n, quindi 0,6,12,18,….. tra due numeri primi consecutivi: tanto più grandi sono i numeri primi, tanto è più grande la differenza 0,6,12,18,24,35ecc, solo però se i due numeri primi sono nella stessa colonna, e quindi sono entrambi di forma 6n-1 oppure 6n+1, come negli esempi riportati, anche se non sono consecutivi, ma il principio è lo stesso.

Mentre per le distanze 4, 10, 16, 22, di forma 6n – 2, possiamo fare gli esempi

11-7 =4, 17- 13 = 4, 41 – 37 = 4, 47 – 37 = 10, 57 – 37 = 16, 53 – 31 = 22,ecc…, con differenze tra un numero primo della prima colonna(6n -1)con un numero primo più piccolo della seconda colonna (6n + 1), ma in un'altra riga (n).

Inoltre, le colonne vanno fino ai numeri primi 101 e 103 e fino a tali numeri primi la differenza maggiore che si può provare è al massimo 8, per esempio d = 79 – 71 = 8 e d = 97 - 89 = 8, poiché tra 89 e 97 non ci sono altri numeri primi. Abbiamo inoltre detto che mentre la differenza tra due gemelli è sempre 2, quale che sia n , la loro somma è sempre di forma 12 n , quale che sia n. Inoltre, tutti i numeri di forma 12n sono somma di due numeri gemelli, 48 è il primo di tali numeri a non essere somma di due gemelli, poiché $\frac{48}{2} \pm 1$ = 23+25 = (6x4-1) +(6x4+1), poiché 25 non è un numero primo.

Il prodotto N = pxq tra due gemelli p e q diventa invece:

N = (6n-1)(6n+1) =$36n^2$+6n-6n-1= $36n^2$-1, cioè un quadrato perfetto meno 1 , infatti 36 è il quadrato di 6 ed n^2 è il quadrato di (n). Non lo è però N= 23x25= 575= 576-1=24^2 con n =4 poiché 25 non è primo. Infine, i primi gemelli sono anche l'ultima coppia di Goldbach quando, ma non sempre, N pari è di forma N = 12n, con p=$\frac{N}{2}$-1 e q =$\frac{N}{2}$+1, per es. i gemelli 11 e 13 sono di somma 11+13= 2x12= 24= N pari, con 11=$\frac{24}{2} - 1$e 13= $\frac{24}{2}$+1 .

Notiamo che:

103 – 79 = 24 , 97 – 73 = 24, 67 – 43 = 24, 43 – 19 = 24, 37 – 13 = 24, 31 – 7 = 24 e che il numero 24 è connesso alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica. Notiamo anche che 4, 10, 16 e 22 sono numeri inerenti le dimensioni dello spazio-tempo nelle teorie di stringa bosonica, 24 + 2 = 26 e in quelle di superstringa, 8 + 2 = 10. Dimensioni spazio-tempo = 4, Dimensioni spazio-tempo stringa bosonica = 26 = 16 + 10 = 22 +4, Dimensioni spazio-tempo superstringa = 10 = 8+2.

Notiamo anche che 97 – 89 = 8 e 79 – 71 = 8, ed 8 è un numero di Fibonacci ed è collegato alle vibrazioni fisiche di una superstringa ed ad un'equazione modulare di Ramanujan.

Notiamo anche che

41 + 43 = 84 = $12 \cdot 7$ (12n); n = 7 59 + 61 = 120 = $12 \cdot 10$ (12n); n = 10

71 + 73 = 144 = $12 \cdot 12$ (12n); n = 12.

Ricordiamo che 12 è $\frac{1}{2}\cdot 24$ dove 24 è il numero associato alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica. Anche 36 che è uguale a $\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 3 = 12\cdot 3$ è può quindi essere associato sia a 12 che a 24.

Infine, evidenziamo che 576 = 24^2.

È interessante notare che quando una stringa si muove nello spazio-tempo e si divide e si ricombina, un gran numero di identità matematiche devono essere soddisfatte. Queste sono le identità di Ramanujan in funzione modulare. Il diagramma a "loop" KSV (Kikkawa-Sakita-Virasoro) di interazione tra le stringhe può essere descritto usando le funzioni modulari. La "funzione di Ramanujan" (una funzione modulare ellittica che soddisfa la "simmetria conforme") ha 24 "modalità" (24 + 2 = 26) che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una stringa bosonica.

Quando la funzione di Ramanujan è generalizzata, 24 è sostituito da 8 (8 + 2 = 10), quindi, ha 8 "modalità" che corrispondono alle vibrazioni fisiche di una superstringa.

Per quanto concerne il numero 24, dalla seguente equazione modulare di Ramanujan

$$\pi = \frac{24}{\sqrt{142}}\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right] \quad (1),$$

e per la seguente equazione $\pi = 4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x}e^{-\pi x^2 w'}dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{1}{t^2 w'}$, (2) abbiamo

che

$$\frac{24}{\sqrt{142}}\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]=4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x}e^{-\pi x^2 w'}dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{1}{t^2 w'}; \quad (3)$$

$$24=\frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x}e^{-\pi x^2 w'}dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}. \quad (4)$$

Per il numero 8, dall'eq. (4), otteniamo:

$$8=\frac{1}{3}\frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty \frac{\cos \pi txw'}{\cosh \pi x}e^{-\pi x^2 w'}dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\cdot\frac{\sqrt{142}}{t^2 w'}}{\log\left[\sqrt{\left(\frac{10+11\sqrt{2}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{10+7\sqrt{2}}{4}\right)}\right]}. \quad (5)$$

Ma, sempre per il numero 8, abbiamo che, dalla seguente equazione modulare di Ramanujan:

$$\pi=\frac{4}{\sqrt{522}}\log\left[\left(\frac{5+\sqrt{29}}{\sqrt{2}}\right)^2\left(5\sqrt{29}+11\sqrt{6}\right)\times\left\{\sqrt{\left(\frac{9+3\sqrt{6}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5+3\sqrt{6}}{4}\right)}\right\}^{7.5}\right],$$

otteniamo:

$$8 = 2 \cdot \frac{\pi\sqrt{522}}{\log\left[\left(\frac{5+\sqrt{29}}{\sqrt{2}}\right)\left(5\sqrt{29}+11\sqrt{6}\right)\times\left\{\sqrt{\left(\frac{9+3\sqrt{6}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5+3\sqrt{6}}{4}\right)}\right\}^{7.5}\right]}, \quad (6)$$

Quindi, per l'eq. (2), abbiamo che:

$$8 = 2 \cdot \frac{4\left[anti\log\frac{\int_0^\infty \frac{\cos\pi txw'}{\cosh\pi x}e^{-\pi x^2 w'}dx}{e^{-\frac{\pi t^2}{4}w'}\phi_{w'}(itw')}\right]\frac{\sqrt{522}}{t^2 w'}}{\log\left[\left(\frac{5+\sqrt{29}}{\sqrt{2}}\right)\left(5\sqrt{29}+11\sqrt{6}\right)\times\left\{\sqrt{\left(\frac{9+3\sqrt{6}}{4}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5+3\sqrt{6}}{4}\right)}\right\}^{7.5}\right]}. \quad (7)$$

Ricordiamo, inoltre, che la (4) e la (7) sono connesse anche all'equazione fondamentale che è alla base del modello Palumbo-Nardelli, relazione generale che lega stringhe bosoniche e fermioniche agenti in tutti i sistemi naturali:

$$-\int d^{26}x\sqrt{g}\left[-\frac{R}{16\pi G}-\frac{1}{8}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Tr\left(G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}\right)f(\phi)-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right]=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-G)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R+4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi-\frac{1}{2}\left|\tilde{H}_3\right|^2-\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2}Tr_\nu\left(\left|F_2\right|^2\right)\right]. \quad (8)$$

Per il modello Palumbo-Nardelli, è possibile consultare i lavori pubblicati sul Database Solar del CNR al seguente link:

http://150.146.3.132/perl/user_eprints?userid=36

Finito di stampare nel mese di Aprile 2008

presso DI. VI. Service – Via Miranda, 50 – 80131 Napoli