Teorema di non esistenza dei numeri lievemente eccedenti
prof. Colonnese Maria, ing. Rosario Turco

Introduzione

Gli autori presentano un proprio Teorema sui numeri lievemente eccedenti, dimostrandone la non esistenza, se si escludono i numeri primi dalla definizione di numeri lievemente eccedenti.

Definizioni ed esempi

Iniziamo col dare la definizione di una tipologia di numeri, necessaria .

Si definisce d *divisore* di un numero intero n, contato una sola volta e con $d \neq 0$, un intero d tale che $c*d=n$, dove c è intero e quoziente della divisione n/d.

Si definisce "*numero difettivo*" un numero intero n la cui somma dei propri divisori, compreso l'1, dà come risultato un numero intero minore del numero n di partenza.

Si definisce "*numero perfetto*" un numero intero n la cui somma dei propri divisori, compreso l'1, dà come risultato un numero intero uguale al numero n di partenza.

Si definisce "*numero eccedente*" un numero intero n la cui somma dei propri divisori, compreso l'1, dà come risultato un numero intero maggiore al numero n di partenza.

Si definisce "*numero lievemente difettivo*" un numero intero n la cui somma dei propri divisori, compreso l'1, dà come risultato un numero intero minore di 1 del numero n di partenza.

Si definisce "*numero lievemente eccedente*" un numero intero n la cui somma dei propri divisori, compreso l'1, dà come risultato un numero intero uguale al numero n di partenza aumentato di 1.

Esempi

4=1+2	Numero difettivo
8=1+2+4	Numero difettivo
16=1+2+4+8	Numero difettivo
32=1+2+4+8+16	Numero difettivo

6=1+2+3	Numero perfetto
28=1+2+3+4+5+6+7	Numero perfetto
496	Numero perfetto (somma da 1 a 31)
8128	Numero perfetto (somma da 1 a 127)
33550336	Numero perfetto
8589869056	Numero perfetto

Definizione: I numeri n potenze di 2 cioè esprimibili come 2^m, sono numeri lievemente difettivi.

I numeri perfetti sono abbastanza rari, Negli esempi si vede che occorre salire molto come valore per passare dal quarto numero perfetto al quinto e tra il quinto e il sesto.

Relazione tra numeri lievemente difettivi e i numeri perfetti: Euclide mostrò che i numeri lievemente difettivi (le potenze di 2) non sono numeri perfetti solo per uno scarto minimo, anzi che potevano essere espressi come prodotto di due numeri: uno potenza di 2 e l'altro come potenza di 2 meno 1. Alcuni esempi sono:

$6 = 2^1*(2^2-1)$
$28=2^2*(2^3-1)$
$496=2^4*(2^5-1)$
$8128=2^6*(2^7-1)$

Non esistenza dei numeri lievemente eccedenti
Esistono i numeri lievemente eccedenti con più di due divisori? A tal proposito presentiamo il Teorema successivo.

Teorema di non esistenza dei numeri lievemente eccedenti
Se indichiamo con di tutti i divisori di un numero intero n, contati una sola volta e compreso l'1 (di=1), se si escludono da tale definizione i numeri interi primi, allora non esistono numeri lievemente eccedenti con più di due divisori (per i>2).

Dimostrazione
Introduciamo un Lemma di comodo, per la dimostrazione finale e per dimostrare anche perché il Teorema fa riferimento a i>2, escludendo i numeri primi.

Lemma sui numeri lievemente eccedenti
Se un numero intero n ha solo due divisori interi d1=1 e d2 e d1+d2=n+1, allora è un numero primo.

Infatti se il numero n fosse tale che d1+d2=n+1 e disponesse di due divisori interi compreso l'1 significherebbe che:

$$d1+d2= n+1 \ (a)$$

ma d1=1, per cui la (a) dà l'identità d2=n. Un numero che ha come divisori se stesso e l'1 è un notoriamente un *numero primo*.

Il Lemma ci mostra la situazione con soli 2 divisori e che numeri che rispettano la condizione (a) sono i numeri primi che vanno esclusi, secondo il Teorema.

Proseguiamo nella dimostrazione del Teorema.

Consideriamo 3 divisori come caso particolare (d1=1, d2 e d3) e procediamo con una dimostrazione per assurdo.

Ipotizziamo che esistono numeri lievemente eccedenti con più di due divisori e vedremo che cadremo in una contraddizione; allora per definizione di numero lievemente eccedente con almeno 3 divisori si avrà:

$$d1+d2+d3=n+1 \ \ (b)$$

Inoltre se d1=1, d2=n/c2, d3=n/c3 con d3>d2 (un divisore intero successivo) è anche:

$$d2+d3=n \ \ (c)$$

Se d3>d2 allora poniamo d3=d2+k con $k \in N$.

Dalla (c) risulta:

$$2*d2 + k = n$$
$$2* n/c2 + k = n$$
$$k = n*(1-2/c2)$$

Da qui è evidente che:

1. $c2 \neq 0$ altrimenti il rapporto $2/c2$ è infinito e raggiungiamo un assurdo
2. $c2 \neq 2$ altrimenti $k=0$ ovvero $d2=d3$ e raggiungiamo un assurdo
3. $c2 \neq 1$ altrimenti $k<0$ ovvero $d3<d2$ e raggiungiamo un assurdo
4. per cui $c2>2$ allora raggiungiamo un assurdo perché $k \in R$

Inoltre se $d3=m*d2$ per cui $d3=m*n/c2$ e la (c) diventa:

$$n/c2 + m*n/c2=(1+m)*n/c2=n \text{ da cui}$$
$$c2=1+m$$

per cui:

$$d3=(m/1+m)*n$$

ovvero $d3 \notin N$ ma $d3 \in R$ e raggiungiamo un assurdo. In altri termini il Teorema è dimostrato.