LEGAME TRA ULTIMO TEOREMA DI FERMAT, ZETA DI RIEMANN E CONGETTURA DI GOLDBACH

ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

Sommario

Nel seguito viene indicata una strada di analisi per la ricerca del legame tra il Teorema di Fermat, la funzione Zeta di Riemann e la congettura di Goldbach, attraverso una procedimento semplificato e non rigoroso.

INTRODUZIONE

Per la comprensione degli argomenti successivi è necessaria la conoscenza di una serie di argomenti di base consultabili dai riferimenti.

La funzione zeta di Riemann (vedi riferimento 2) è una funzione complessa di variabile complessa e richiede la conoscenza innanzitutto dei numeri complessi (vedi riferimento 1).

La congettura o l'ipotesi di Riemann (vedi riferimento 3) e l'ipotesi generalizzata di Riemann (vedi riferimento 4), rappresentano il problema del secolo e sono state nei vari anni sia dimostrate come vere o come false molte volte (vedi riferimento 5).

Da un punto di vista pratico molte discipline ed argomenti sono interessati sia ai numeri complessi che all'ipotesi di Riemann (RH) o a quella generalizzata (GRH): fisica, matematica, trasmissione dei segnali, crittografia, la teoria delle stringhe etc.

I numeri complessi sono presenti in molte discipline:
Matematica:
- Teoria dei numeri
- Integrali impropri
- Equazioni differenziali
- Trasformata di Laplace
- Frattali
- Fourier

Fisica:
- Dinamica dei fluidi
- Meccanica Quantistica
- Relatività

Chimica:
- Equazione Schrodinger

Ingegneria:
- Analisi dei segnali
- Elettrotecnica (fasori)
- Elettronica (filtri)
- Controlli automatici

In particolare la funzione Zeta di Riemann è legata a innumerevoli cose di cui alcune sono:
- prodotto di Eulero ed i numeri primi
- funzione di Moebius
- funzione di Liuville
- equazione funzionale e riflessione
- serie di Laurent
- equazione di Hadamard
- numero di Bernoulli
- funzione gamma
- trasformata di Mellin
- il teorema dei numeri primi
- funzione eta di Dirichlet
- serie di Mengoli

- serie armonica
- etc

In particolare molti Teoremi della Teoria dei numeri sono dimostrati esordendo con la frase "Se è vera l'ipotesi di Riemann allora …"; di conseguenza si comprende l'enorme importanza che avrebbe una definitiva dimostrazione di RH e GRH.

La **funzione Zeta di Riemann** fu studiata per prima da Eulero come funzione di variabile reale (vedi riferimento 1) che ne scoprì il legame con i numeri primi; per cui è di grande interesse nella Teoria dei numeri. Fu estesa da Riemann al campo complesso.

La **congettura di Riemann** dice che "Gli zeri non banali della funzione Zeta sono sulla curva critica ovvero sono caratterizzati da Re(s) = 1/2".

La sua risoluzione è affrontata da studiosi e appassionati sia teoricamente, con strumenti di Teoria Analitica e Geometrica, ma anche praticamente con del software alla ricerca degli zero che fanno eccezione rispetto alla congettura; la combinazione delle due cose è la pratica preferita. Il software, di solito, è utilizzato come strumento di verifica per le ipotesi fatte nelle dimostrazioni. Su INTERNET è presente il sito ZetaGrid che permette di partecipare ad un gruppo di calcolo distribuito. Una bella trattazione sul significato e le potenzialità dell'ipotesi di Riemann è nel riferimento 10.

Il **Teorema di Fermat** afferma: "Non esistono soluzioni intere positive all'equazione $x^n+y^n=z^n$ se n > 2".

L'ipotesi fu formulata nel 1637 da Pierre de Fermat e la dimostrazione fu cercata da molti: Eulero (che la dimostrò solo per n=3), Adrien Marie Legendre e Dirichlet (1825), Sophie Germain (che studiandola arrivò alla formulazione dei numeri di Sophie Germain: S= 2p +1 dove sia S che p sono numeri primi e alla conclusione che "Se p è un numero primo dispari tale che anche 2p+1 sia primo, allora non esistono interi x,y,z non divisibili per p tali che $x^p+y^p=z^p$"), Gabriel Lamè (1839), Gerald Faltings (1983) che dimostrò la congettura di Mordell. **La congettura di Mordell** affermava che per ogni n > 2 c'è al massimo un numero finito di interi coprimi x,y,z tali che $x^n+y^n=z^n$.

Nel 1994 l'ipotesi è stata definitivamente dimostrata da Andrew Wiles con strumenti matematici non noti all'epoca di Fermat (curve ellittiche e forme modulari). Oggi il teorema è ricordato come **Teorema di Fermat-Wiles**.

L'unico dubbio storico che rimane è che se Fermat diceva di aver risolto la sua congettura o ipotesi, ma senza conoscere gli attuali strumenti matematici, allora esiste un'altra strada semplice per la dimostrazione oppure si era sbagliato? La dimostrazione di Wiles è di 200 pagine e Wiles stesso sostiene che la sua dimostrazione poteva avvenire solo con strumenti matematici del nostro secolo. Fermat d'altra parte lasciò solo la dimostrazione per n=4 (un caso particolare e dimostrata con le terne pitagoriche e il metodo della discesa infinita - vedi riferimento 9) e non per il caso generale. Se Fermat avesse realmente trovato la soluzione forse avrebbe avuto più interesse a mostrare tale soluzione generale, a meno che si rese successivamente conto che la dimostrazione era errata.

L'equazione proposta da Fermat è del tutto simile alle equazioni diofantee $x^2+y^2=z^2$, che i Greci e i Babilonesi sapevano già risolvere. Solo che se n>2 la soluzione non appartiene più al campo reale.

Oggi non sono ancora state intraviste applicazioni pratiche dell'equazione proposta da Fermat, tuttavia spesso l'equazione proposta nel Teorema è solo uno strumento per altre dimostrazioni.

ALLA RICERCA DEL LEGAME NASCOSTO

Esiste un legame tra Teorema di Fermat, ipotesi di Riemann e congettura di Goldbach?

Proviamo a dare al lettore non esperto, in modo non rigoroso, un indizio da cui iniziare ad intravedere un possibile legame ed avere un punto di partenza di indagine, senza voler introdurre strumenti sofisticati, rimandando, invece, gli esperti allo studio di una ampia documentazione.

L'idea di fondo potrebbe essere basata su due considerazioni:

- la congettura di Goldbach traduce una moltiplicazione (e a maggior ragione una potenza) in una somma; difatti Un numero pari è esprimibile come 2 * n ma il prodotto lo si può vedere come somma di due tipi:
  - n + n
  - somma n volte di 2
- la seconda considerazione è che l'equazione di Fermat, dopotutto, è una particolare equazione diofantea ed è noto per esse che un numero intero pari può essere visto come somma di potenze (ricordiamo le terne pitagoriche)

Premesso questo, consideriamo l'equazione:

$$x^n + y^n = z^n \quad (1)$$

Consideriamo, però, il caso che non tutti gli elementi dell'equazione, come dimostra il Teorema di Fermat, appartengano all'insieme dei numeri naturali, mentre n sia un intero positivo.

Sia, inoltre, a un intero anche nullo e poniamo due condizioni:

$$y^n = a + \frac{1}{2} i^n \quad (2)$$

$$x^n = y^n + 1 \quad (3)$$

Da qui la (1) diventa:

$$z^n = x^n + y^n = 2y^n + 1 = 2(a + \frac{1}{2} i^n) + 1 = 2a + i^n + 1 = 2a + 1 + i^n \quad (4)$$

Ricordiamo la serie ottenibile nel seguente modo:

i	$\sqrt{-1}$
I^2	-1
I^3	$-\sqrt{-1}$
I^4	1
I^5	$\sqrt{-1}$
I^6	-1
I^7	$-\sqrt{-1}$
I^8	1
...	...

Potenze dell'unità immaginaria i

Osservando la tabella precedente delle potenze dell'unità immaginaria i e che 2a è pur sempre un pari, la (4) ammette soluzioni sempre pari; difatti:

- se n pari e multiplo di 2 (n=2, 4, 6 etc) la (4) = 0 o =2 se a = 0 oppure =2a con a≠0 e in ogni caso esce sempre un pari
- se n pari e multiplo di 4 (n=4, 8, 12 etc), la (4)= 2a + 2 = 2*(a+1) e in ogni caso è sempre un numero pari

Ricordiamo, poi, senza eccessivo rigore, che la congettura di Goldbach porta a dire che "ogni pari è somma di due numeri primi".

A questo punto dobbiamo porre la nostra attenzione sugli esponenti della (4) e per semplicità di ragionamento poniamo a=0 e facciamo due considerazioni:

- Dalla (4) con n pari si verificano due situazioni:
  - se n è multiplo di 2 la soluzione della (4) può essere nulla con a=0;
  - se n è multiplo di 4 la soluzione della (4) è pur sempre un numero naturale pari.

- È noto, inoltre che i numeri primi sono un sottoinsieme dei numeri naturali come i numeri dispari e che,escluso il 2, i numeri primi sono anche numeri dispari (esclusi i composti); per cui, alla fine, sono equivalenti le due proposizioni: "ogni pari è somma di due numeri dispari" ed "ogni pari è somma di due numeri primi".

Per cui con la (4) e con due esponenti scelti tra numeri primi è possibile ottenere un intero naturale pari; ad esempio:

$$z^3 = 2a_1 + 1 + i^3 = 2a_1 + 1 - i \quad (5)$$
$$z^5 = 2a_2 + 1 + i^5 = 2a_2 + 1 + i \quad (6)$$

Se si somma membro a membro la (5) e la (6), al secondo membro si otterrà un numero pari: ogni $2a_i$ è pari, come anche la somma dei due 1 è pari. Quindi giocando con gli esponenti, scelti tra numeri primi, si intuisce un legame, anche se debole, tra congettura di Goldbach e Teorema di Fermat.

Una considerazione finale a chiusura di tale legame. Nella condizione (2) si sarebbe potuto mettere anche a^n; si sarebbero ottenute analoghe conclusioni.

Ovviamente se si vuole che la generica (4) dia sempre un pari, il termine a (anche in a^n) deve essere intero, altrimenti si ottiene un dispari. Tuttavia in (5) (6) dalla somma di due espressioni che danno ognuna un dispari, otterremo come risultato pur sempre un pari.

La tabellina precedente mostra anche che esiste una periodicità, a multipli di 4 (nel caso a=0), cioè il valore che si ottiene è lo stesso per n=4,8, etc.; per cui la serie ottenibile dalla tabellina, dà una debole indicazione del legame esistente tra una serie armonica generalizzata (riferimenti 2 e 8) e la zeta di Riemann.

La serie armonica generalizzata di numeri primi e l'estensione di Riemann sono rispettivamente del tipo:

$$z(s) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + ...$$
$$z(s) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^4})} . \frac{1}{(1-\frac{1}{3^4})} . \frac{1}{(1-\frac{1}{5^4})} ....$$

Da tutto questo si intuisce un legame tra Fermat, Riemann e Goldbach.

L'ipotesi di Riemann (RH) in sostanza dice che se nella zeta di Riemann si suppone la retta dei primi come curva critica dove ci sono le soluzioni non banali essa è caratterizzata da Re(s)=1/2.

Riemann immaginava un "paesaggio di Riemann" dove la retta critica è il "livello del mare", lo zero immaginario indicato nel seguito come $\underline{0}$.

In una costruzione geometrica si deve supporre un triangolo rettangolo tale che per il Teorema di Pitagora:

$$AC^2 - BC^2 = AB^2 \quad (5)$$

E dove lo $\underline{0}$=AB.

In un triangolo rettangolo dove regna il Teorema di Pitagora se poniamo AC=z, BC=i, AB=1 (supponiamo che a=0) la (5) con n=2 diventa:

$$z^2=1^2+i^2 = 1 -1 = \underline{0}$$

Stesso risultato si otterrebbe con n=4,8,12,16,etc.

RIFERIMENTI

1. **Numero complesso** – http://it.wikipedia.org/wiki/Numero_complesso
2. **Funzione Zeta di Riemann** – http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_zeta_di_Riemann
   http://www.archive.org/details/zetafunctionofri032076mbp
   http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html
3. **Ipotesi di Riemann (RH)** – http://it.wikipedia.org/wiki/Ipotesi_di_Riemann
   http://primes.utm.edu/notes/rh.html
4. **Ipotesi generalizzata di Riemann (GRH)** http://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Riemann_hypothesis
5. **Dimostrazioni a favore e contro di RH -**
   http://www.secamlocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/RHproofs.htm
6. **ZetaGrid** - http://www.zetagrid.net/
7. **Ultimo Teorema di Fermat -** http://it.wikipedia.org/wiki/Ultimo_teorema_di_Fermat
8. **Serie armonica -**
   http://www.chihapauradellamatematica.org/Quaderni2002/Dal_numero_intero_al_numero_reale/InteroRealeColorato12.htm
   http://it.wikipedia.org/wiki/Serie_armonica
9. **La mosca di Hilbert. L'ultimo teorema di Fermat da Fermat ai giorni nostri**. Letterio Gatto dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
10. **De Sautoy – L'enigma dei numeri primi – L'ipotesi di Riemann, il più grande mistero della matematica**