Numeri primi in cerca di autore
Goldbach, numeri gemelli, Riemann, Fattorizzazione
Introduzione a cura dell'ing. Rosario Turco

Spesso tra tante domande complesse, filosofiche ed esistenziali, ci si pone anche qualche semplice quesito: quali materie, tra quelle della "Scienza esatta", sono di ausilio e fondamentali per lo studio della Natura e la determinazione di tutte le Leggi che lo governano?

Se la Fisica, la Chimica, la Medicina, la Biologia etc. sono delle discipline di vitale importanza per la comprensione dell'Universo, allora la Logica, la Filosofia, la Matematica e l'Informatica sono da considerarsi una "piattaforma di base" del ragionamento, con viste diverse sulle precedenti discipline, che ne risultano delle "Applicazioni" verticali, utilizzatrici di metodologie e strumenti.

Le leggi di Galileo, le leggi di Newton, le leggi di Faraday, le equazioni di Maxwell, la relatività ristretta, il programma Erlang, la teoria dei gruppi di Galois o la teoria delle stringhe oggi non avrebbero avuto alcuna possibilità di esistere, se precedentemente o contemporaneamente, non fossero stati creati strumenti matematici adeguati alla loro rigorosa dimostrazione, all'interno di un contesto filosofico e di logica tale da ribaltare concetti e superare visioni precedenti.

Nel seguito, con l'aiuto di tutti gli autori presenti nei riferimenti, esponiamo una serie di riflessioni e spunti per analisi successive.

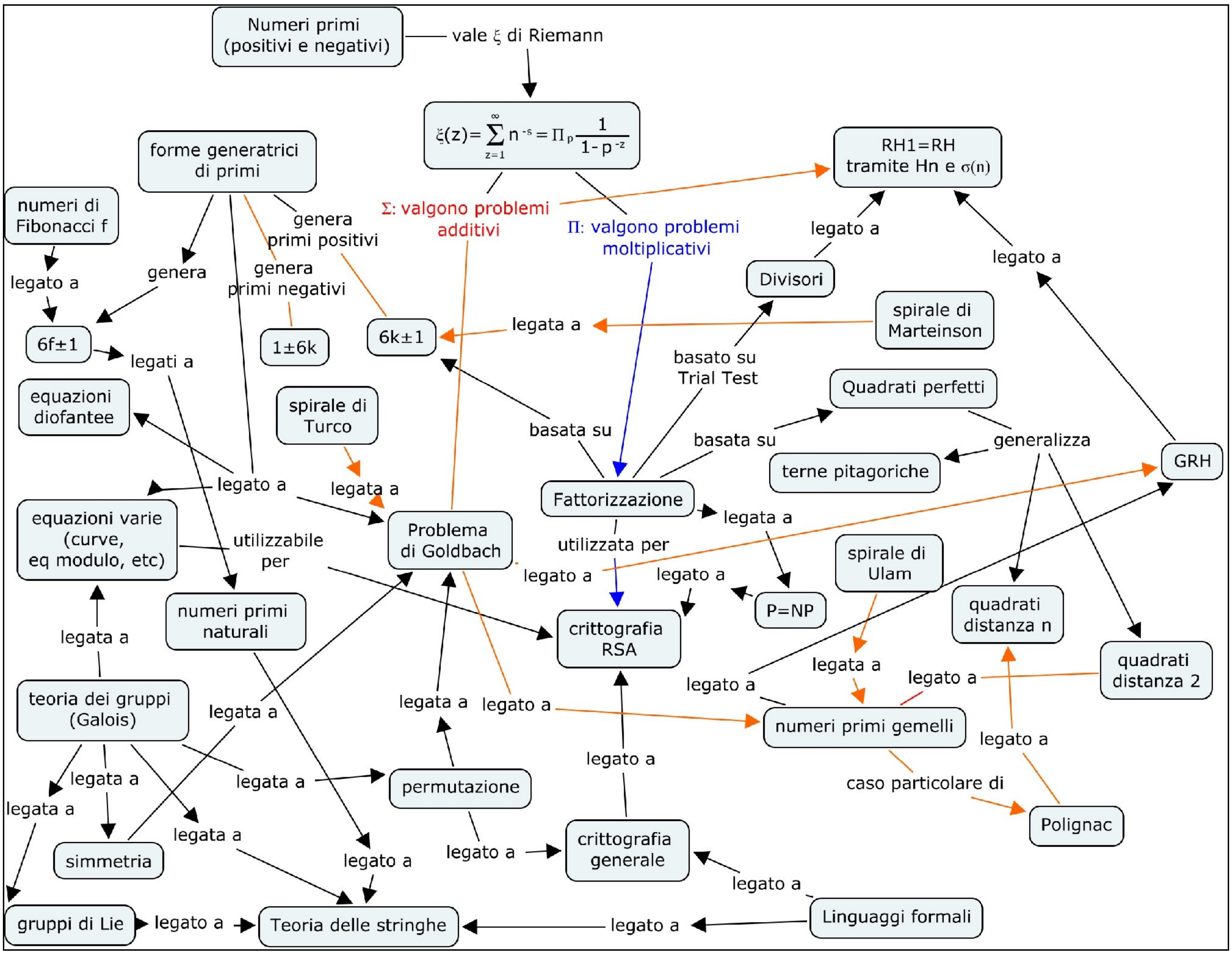
Lo scenario del nostro ragionamento
A cura di tutti gli autori

La Teoria dei numeri coinvolge innumerevoli argomenti, suddivisi in molti settori, che un buon socratico ammette di "sapere di non sapere" nella loro profondità e molteplicità; mentre del nuovo nulla si sa, perché è solo nella mente di chi lo concepisce …

Una moderna scuola di pensiero affermerà che in ogni area di competenza di una disciplina, da creare o esistente, occorrono almeno tre cose: sapere, saper fare ed una creatività metodologica e di pensiero.

Spesso serve una mappa concettuale sull'argomento per spostare il "focus" su determinate cose, per concettualizzare il vecchio o il nuovo ed innescare ragionamenti che consentano di superare vincoli e barriere precedenti. Di sovente l'innesco nasce "trovando nuove soluzioni a vecchi problemi", affrontandoli da un punto di vista completamente diverso.

Nel seguito mostriamo una breve mappa concettuale dei più interessanti legami finora noti. Essa non è per nulla esaustiva e non lo sarà mai, grazie alle continue innovazioni matematiche ed ai miglioramenti umani negli anni.



Mappa concettuale - Scenario di riferimento

Nella mappa, ad esempio, non sono riportate le particolarizzazioni delle ipotesi RH equivalenti del tipo:

- RH1 con funzione additiva $\sigma(n)$ = RH
- RH2 con funzione additiva $\mu(n)$ = RH
- RH3 con funzione additiva $\pi(n)$ = RH
- RH4 con funzione additiva $\Theta(n)$ = RH

Mentre sono segnati con colore rosso alcuni dei percorsi additivi interessanti e in blu quelli di natura moltiplicativa.

L'aggiramento della diga concettuale
Spostamento del focus
A cura di tutti gli autori

Qualcuno in passato deve aver fatto certo un ragionamento che è insito anche nella mappa concettuale. Se la ζ di Riemann è esprimibile come sommatoria o come produttorio allora vuol dire che si ha una divisione dei problemi in problemi additivi e problemi moltiplicativi. Questo lo si sapeva anche dicendo che un prodotto del tipo 2*3 può essere sostituito dalla somma 3+3. Il ragionamento, apparentemente banale, porta invece alla soluzione della congettura di Riemann (RH e la GRH) aggirando l'ostacolo della ζ di Riemann e dei suoi zeri considerando, ad esempio, H_n la somma degli inversi dei numeri naturali; in altri termini aggirando la barriera con soluzioni additive.

Numeri primi negativi
A cura dell'ing. Rosario Turco e della prof. Maria Colonnese

Esistono dogmi nelle "Scienze esatte"? In realtà i dogmi nascono e vivono solo nelle religioni; l'unico dogma che è presente sotto i nostri occhi, ogni giorno, è l'esistenza di un Universo, perfetto e complesso, creato sicuramente da un Dio meraviglioso.

La Scienza ha sempre dimostrato, in generale, che le scoperte, gli studi ed i Teoremi rimangono validi fino a quando, con adeguata creatività, metodologie e strumenti non si riesce a superare una visione e una concettualizzazione precedente.

In realtà ci sovviene un concetto-dogma della Matematica. Chi non ricorda la definizione dei numeri primi? Ecco il dogma: "*Un numero primo è un numero intero divisibile per sé stesso e per 1. L'1 si esclude dai numeri primi*".

Tale definizione in realtà non esclude i numeri negativi; ma esclude l'1, perché si giustificava col fatto che l'1 è l'elemento neutro se si pensa alla scomposizione in fattori di un numero intero e che la sua esclusione porta solo benefici. Difatti l'1, pur essendo primo, è scomodo perché comporta una doppia definizione per tante funzioni, come la funzione di Eulero $\phi(n)$, e crea problemi per varie altre costruzioni come la dimostrazione del crivello di Eratostene o la dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Aritmetica, etc. Per cui per semplicità visto che l'1, pur essendo primo, comporta eccezioni aggiuntive, si accetta di poterlo escludere; è cioè un *"consentitemi di semplificare"*. In altri termini il guadagno concettuale che si otterrebbe introducendolo è troppo piccolo rispetto alla complessità che ci troveremo davanti.

Per convincersene basta pensare agli esempi di sopra:

- Funzione di Eulero, occorrerebbe dire che ne esistono due $\phi(1)=1$ e per $p\geq 2$ $\phi(p)=p-1$
- Dimostrazione di Eratostene: se considerassimo prima l'1 dovremmo eliminare tutti i composti dell'1, che sono tutti i numeri naturali (non rimarrebbe nulla)
- Il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica sarebbe più complesso per tener conto delle eccezioni dell'1

In ogni caso che l'1 sia primo, anche se con eccezione, è fuori di dubbio però. Intanto è da far notare che anche l'1 rispetta la definizione e tenendo conto dei numeri negativi è banale scoprire che **-1 e 1** non solo sono primi ma sono anche numeri gemelli ovvero numeri primi a distanza 2 visto che l'operazione 1 + (-1) = 0.

Inoltre i numeri primi e gemelli - 1 e +1 sono già di forma ±1 ± 6k = ±1 ± 6*0 = -1 e +1 per k = 0; quindi ottenibili da una forma generatrice di numeri primi negativi e positivi e rispettano oltre alla somma di Goldbach p + q = -1+1 = 0, considerando cioè pari il numero zero, compreso tra due dispari come tutti gli altri numeri pari, anche il prodotto di Goldbach p * q = N con N+1 = quadrato perfetto, infatti -1 * +1 = -1 e -1 + 1 = 0^2 = "quadrato perfetto", anche se ovviamente è uguale a zero.

Inoltre per -1 abbiamo un ragionamento di simmetria violata! Difatti se 1 è considerato neutro in termini di prodotto e di fattorizzazione, non si può dire altrettanto che -1 sia neutro; anzi in un prodotto il fattore -1 fa cambiare di segno al risultato.

L'unico numero intero effettivamente da scartare è lo 0, perché per il concetto di infinito lo 0 non può essere un divisore neanche di sé stesso (0/0 è una forma indeterminata).

Analoga diatriba c'è sempre stata sul fatto, relativo alle forme 6k±1, che 3 e 5 non sono da considerarsi numeri primi gemelli perché il 3 non è ottenibile da una forma 6k±1.

E' una diatriba sterile, perché stiamo parlando di forme generatrici di numeri primi (Vedi *Teorema di Dirichlet* in riferimento [17]): alcune lente ed altre più veloci come rispettivamente 2k+1, 6k±1, etc. ed il cui scopo è solo di avere un mezzo con cui generare numeri dispari primi, escludendo i numeri non primi. Alcune di tali forme hanno però grande importanza ai fini della Natura, proprio perché la Natura tende a scegliere tutte quelle "*situazioni più economiche, simmetriche e facili a riprodursi*". Ad esempio la "simmetria bilaterale" in Natura è di notevole importanza: basta solo pensare che in tal modo alla Natura è sufficiente solo la metà delle informazioni per riprodurre l'intero! E' come se la Natura avesse un metodo per "fare lo zip delle informazioni della vita".

In realtà si fa anche osservare che lo stesso 2 è una stranezza: è il solo pari di tutti i numeri primi!

Il 2 insieme al 3 sono le due eccezioni alle forme generatrici di primi $6k \pm 1$; ma il 3 ed il 5, il primo dei numeri primi generato da tali forme, $5 = 6*1 -1$, sono gemelli a tutti gli effetti, in quanto hanno differenza 2 come tutti gli altri infiniti gemelli; e come questi, soddisfano anche loro il prodotto di Goldbach $p * q = N$ con $N +1 =$ quadrato perfetto, infatti:

$$3*5 = 15 \text{ e } 15 +1 = 16 = 4*4 = [(3+5)^2]/2 + [(5-3)^2]/2 = s^2 + d^2$$

come regola generale già nota (un prodotto tra due numeri qualsiasi si può scrivere come la somma del quadrato della semisomma e del quadrato della semidifferenza). Quindi, 3 e 5 sono gemelli a tutti gli effetti, anche se 3, essendo l'unica eccezione oltre il 2, alla forma generale di tutti gli altri infiniti numeri primi e semiprimi = $6k\pm1$.

In conclusione è solo un'apparente contraddizione, che nasce solo dimenticando lo scopo delle forme generatrici di numeri primi e che anche i numeri interi negativi sono numeri primi.

Ma ritorniamo all'1; ecco qualche spunto interessante su cui indagare. Se anche i numeri negativi possono essere primi e -1 e 1 sono gemelli, si scopre facilmente che esistono anche le forme $1\pm6k$. Con i numeri negativi vale ancora il problema di Goldbach e si può trovare una analoga formula di Fibonacci; tra l'altro si può anche lavorare a cavallo dei numeri interi primi negativi e positivi. E che succede a Goldbach e alle altre funzioni $\phi(n)$, H_n etc? Provateci e confrontiamo i risultati.

Fenomeni naturali, forme 6k±1 e numeri di Fibonacci

A cura del dott. Michele Nardelli, prof. Giovanni Di Maria, prof. Francesco Di Noto

Abbiamo già visto che la Natura fa delle sue scelte geometriche e matematiche. In Natura sembra che le forme $6f\pm1$, dove f è un numero di Fibonacci siano alla base di determinate leggi dell'atomo. Un lavoro su questi argomenti è anche il riferimento [18].

L'infinità, numeri primi, numeri gemelli e densità

A cura dell'ing. Rosario Turco e della prof. Maria Colonnese

Lo studio degli zeri della funzione ζ di Riemann mostra che gli zeri si infittiscono all'infinito; inoltre la stessa formula della ζ suggerisce che esiste un "comportamento inverso" tra zeri e numeri primi.

Ora se gli zeri si infittiscono all'infinito, allora i numeri primi all'infinito si diradano.

Non solo, ma il comportamento all'infinito di numeri naturali, numeri primi e numeri gemelli è di ordine di densità diverso. Se semplicisticamente chiamiamo "densità all'infinito" la quantità seguente quantità:

Đ = numero elementi trovati all'infinito / numero di numeri naturali considerati,

allora indicando con Đn la densità dei numeri naturali, con Đp la densità dei numeri primi e con Đg la densità dei numeri gemelli; allora all'infinito è

Đn > Đp > Đg. Ma Đn = 1 $\Rightarrow$ 1 > Đp > Đg

In altri termini la densità dei numeri naturali è 1, perché abbiamo tanti numeri naturali per quanto è grande l'intervallo di numeri naturali che si considerano; invece la densità dei primi tende a diminuire: ci sono intervalli rarefatti di dimensioni ampie addirittura quanto si vuole (vedi riferimento [19]), quindi la distanza dei numeri primi è notevole e diventa difficile trovare numeri primi a distanza due, ovvero numeri gemelli. Tutto questo non significa che all'infinito non si possano trovare numeri gemelli o che essi non siano infiniti, ma vuol dire che la loro infinità (è questo il concetto non ben definibile), vista attraverso la densità, è di ordine inferiore a quella dei numeri primi stessi.

Numeri gemelli e gap

Ma quanto vale esattamente il gap all'infinito? Per comprenderlo diamo qualche definizione. Se indichiamo con p_n l'ennesimo numero primo e con p_{n+1} il numero primo successivo, allora possiamo definire il gap "*g(p) il numero di composti esistenti tra p_n e p_{n+1}*". Per il Teorema dei Numeri Primi sappiamo anche che ci sono approssimativamente n/log(n) numeri primi minore di n e di conseguenza il "gap medio" tra primi minori di n è log(n). Naturalmente più primi possono produrre anche lo stesso gap.

Per due numeri gemelli p e p+2 è: g(p)=1. Per cui è:

$$\liminf g(p) = 1$$

Per la congettura dei numeri gemelli che sono infiniti (probabilmente vera, da mille indizi) dovrebbe essere vero che g(p)=1 infinite volte o che lim inf g (p) = 1. D'altra parte esistono intervalli grandi quanto si vuole privi di numeri primi [19]. Per vedere questo, sia n un numero intero maggiore di uno e consideriamo la seguente sequenza di numeri interi consecutivi: n!+2, n!+3, n!+4, n!+5, ..., n!+n. Si noti che 2 divide il primo, 3 divide il secondo, ..., n divide la n-1, mostrando che tutti questi numeri sono composti.

Quindi, se p è il più grande primo meno di n!+2 abbiamo g(p)>n-1. Ovviamente ci potrebbero essere più piccoli numeri che producono lo stesso gap. Ad esempio, vi è un gap di 777 composti dopo il primo 42842283925351. Questo numero primo è il minimo principale, che produce una differenza di 777 e che è di gran lunga inferiore a 778! + 2 (che ha 1914 cifre).

Nel 1931 **Westzynthius** ha dimostrato che lim sup g (n)/log pn = infinito che significa che per ogni ß> 0 ci sono infiniti numeri primi p con g (p)> ß log p.

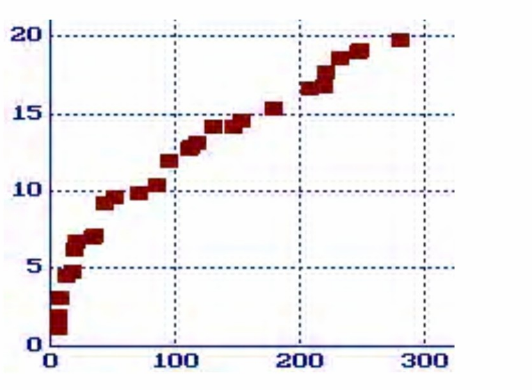
Diamo ora un'occhiata ad alcuni elementi di prova numerica, tratti da http://primes.utm.edu. Nella tabella riportata di seguito si evidenzia il gap massimo fino a 381.

Gap	After	Gap	After	Gap	After	Gap	After
0	2	33	1327	117	1349533	247	191912783
1	3	35	9551	131	1357201	249	387096133
3	7	43	15683	147	2010733	281	436273009
5	23	51	19609	153	4652353	287	1294268491
7	89	71	31397	179	17051707	291	1453168141
13	113	85	155921	209	20831323	319	2300942549
17	523	95	360653	219	47326693	335	3842610773
19	887	111	370261	221	122164747	353	4302407359
21	1129	113	492113	233	189695659	381	10726904659

Table 1. First Occurrence of Gaps (longer table available.)

Per ogni intero non negativo g sia p(g) il più piccolo primo principale con almeno g composti. La tabella 1 ci dice p(148) = p (149) = ... p = (153) = 4652353.

Per i valori nella tabella di cui sopra abbiamo un grafico di log p (g) rispetto g nel grafico sotto.



Da qui si intuisce perché **Shanks** congetturò nel 1964 che:

log p(g) ~ sqrt (g)

mentre **Weintraub** stimò nel 1991 che

log p(g) ~ sqrt (1.165746g).

Inoltre il teorema dei numeri primi dimostra che il valore medio di

g (p) / log p = 1.

Cramer congetturò che $lim\ sup\ g\ (p) / (log\ p)^2 = 1$. Su tale argomenti, non ancora del tutto analizzati, molti altri hanno scritto ulteriori lavori.

Montgomery, infine, cercò di sfruttare gli zeri della funzione di Riemann, per individuare i numeri gemelli e verificare se fossero infiniti. Tale lavoro non portò alla conclusione sperata. Non è tanto facile collegare i valori irrazionali degli zeri ad un valore di numero primo e poi cercare i numeri gemelli. Se vi interessa, con un nostro *progetto Riemann@33*, vi inviamo un milione di valori di zeri, poi ci fate sapere cosa ne avete tratto come estrapolazione e deduzione!

CONGETTURA DI GOLDBACH

Relazioni con la congettura debole, sottoproblema della GRH e la fattorizzazione tramite i prodotti di Goldbach

A cura del dott. Michele Nardelli, prof. Francesco Di Noto

In questo parte del lavoro proponiamo una nuova dimostrazione della congettura di Goldbach, chiarendo il ruolo decisivo dei multipli dispari di 3 nella formazione delle coppie di Goldbach per ogni N pari maggiore di 4; di conseguenza, anche la congettura debole di Goldbach viene dimostrata e viene fatto qualche esempio: dato N dispari uguale o maggiore di 7, se si sottrae da esso un numero primo r, si ottiene un numero pari N' già somma di p + q e quindi N dispari sarà N = r + p + q = somma di tre numeri primi; e questo per ogni numero primo r compreso tra 3 ed N – 4.

Inoltre, tramite i prodotti di Goldbach N = p * q collegati alle somme di Goldbach N = p + q tramite la relazione nota $N = s^2 + d^2$ con p = s – d e q = s + d, si citano i nostri lavori precedenti sulla fattorizzazione tramite quadrati perfetti; infine si accenna alla congettura debole di Goldbach come sottoproblema, ormai risolto, con l'ipotesi di Riemann generalizzata, GRH. Da qui l'importanza di una dimostrazione della congettura di Goldbach, ora connessa ad un nuovo metodo di fattorizzazione (molto veloce per prodotti di due numeri primi p e q molto vicini, cioè con piccole semidifferenze), alla congettura debole come naturale conseguenza, e alla GHR, essendo la congettura debole di Goldbach, insieme alla congettura dei primi gemelli, un suo sottoproblema.

Congettura di Goldbach

Già diversi lavori sulla congettura di Goldbach (vedi Riferimenti) sono stati presentati. In essi abbiamo visto come si formano le coppie di Goldbach per ogni numero N pari maggiore di 4: tali coppie dipendono essenzialmente, oltre che ovviamente dai numeri primi da 3 (il 2 vale solo per N = 4 = 2 + 2) a N/2 e da N/2 a N simmetrici, cioè con uguale semidifferenza, rispetto alla semisomma N/2 come vedremo con un piccolo esempio per N = 24.

Quantitativamente, le coppie di Goldbach dipendono anche dalla forma aritmetica di N e cioè se N = 6k o se N = 6k - 2 oppure se N = 6k + 2. Ricordiamo che la forma dei numeri primi (esclusi il 2 e il 3) e dei semiprimi è 6k ± 1 e che quindi le loro somme o differenze sono sempre pari: la somma N tra due numeri di tale forma è sempre 6k', oppure 6k ± 2.

Per i numeri pari di forma 6k, succede, infatti, che tutti i multipli dispari di 3 simmetrici rispetto a N/2, si accoppiano tra di loro, lasciando più possibilità (cioè facilitando) agli altri numeri dispari, tra i quali i numeri primi, di accoppiarsi tra di loro generando più coppie di Goldbach; se invece N = 6k ± 2, i multipli dispari di 3 si accoppiano anche con parte dei numeri primi, formando coppie che non possono essere di Goldbach (poiché un multiplo dispari di 3 non è primo), e quindi ostacolando la formazione delle coppie di Goldbach; ma non del tutto, poiché le coppie di Goldbach in questo caso sono circa la metà delle coppie di Goldbach per N = 6k compreso tra N' = 6k-2 e N'' = 6k +2, per esempio 28, 30 e 32. (Le forma 6k-2, 6k e 6k +2 coprono tutti i numeri pari, compresi 2 = 6 * 0 + 2 e 4 = 6 * 1 -2, 6 = 6*1, e così via al crescere di k tra i numeri naturali). Infatti, le G(N) coppie di Goldbach per numeri N' ed N '' di forma 6k± 2 sono circa

$$G(N') \approx G(N'') = \frac{N'}{(\ln N')^2} \approx \frac{N''}{(\ln N'')^2} \quad \textbf{(1)}$$

Mentre per N=6k, Le G(N) coppie di Goldbach saranno:

$$G(N) \approx 2\frac{N}{(\ln N)^2} \quad \textbf{(2)}$$

per cui abbiamo l'interessante *relazione di Goldbach*:

$$G(N-2) + G(N+2) \approx G(N)$$

che spiegherebbe l'andamento "oscillante (crescente e decrescente alternativamente) del numero delle coppie di Goldbach al crescere di N, facendo temere un possibile contro esempio G(N) = 0, cioè un numero pari a N, N' o N'', che non sia somma di una coppia di numeri primi p + q.

Le formule logaritmiche di cui sopra, già note ma nella sola versione (1), danno valori approssimati per difetto.

Inoltre la formula (1) è simile a quella per il calcolo approssimato per il numero di coppie di numeri gemelli:

$$g(N) \approx \frac{N}{(\ln N)^2} * 1{,}32032...$$

dove N non ha forma particolare come per Goldbach, e 1,32032 è una costante.

Come vedremo nell'esempio per N = 24, una coppia di gemelli è sempre l'ultima coppia di Goldbach per molti N (ma non tutti) di forma N = 12n e 48 è il primo N di tale forma a non avere come ultima coppia di Goldbach una coppia di primi gemelli, poiché 48/2±1 = 23 primo e 25 composto. Con le forme dei numeri primi e dei semiprimi p = 6k+1 , si hanno coppie di gemelli per infiniti valori di k (ma non tutti), quando p e q condividono lo stesso k ma segno opposto, per esempio:

p = 59 = 6 x 10 -1 e q = 61 = 6 x 10 + 1, e la differenza tra due numeri gemelli è sempre 2 poiché q – p = 6k +1 - (6k-1) = 6k – 6k +1 +1 = 1 + 1 = 2 quale che sia k. Ma veniamo ora all'esempio pratico di come si formano le coppie di Goldbach, ponendo N = 66.

p + q = 66 = 6k = 6 x 11

1	65	
3	63	multipli dispari di 3
5	61	prima coppia di Goldbach
7	59	seconda coppia di Goldbach
9	57	multipli dispari di 3
11	55	coppia mista primo e composto
13	53	terza coppia di Goldbach
15	51	multipli dispari di 3
17	49	coppia mista primo e composto
19	47	quarta coppia di Goldbach
21	45	multipli dispari di 3
23	43	quinta coppia di Goldbach
25	41	coppia mista composto e primo
27	39	multipli dispari di 3
29	37	sesta coppia di Goldbach
31	35	coppia mista primo e composto
33	33	multipli dispari di 6

33 = 66/2 = N/2, fine della formazione delle coppie.

Come si vede, i multipli dispari di 3 si accoppiano tra di loro in ben sei coppie, lasciando agli altri numeri dispari e quindi anche numeri primi, di formare ben sei coppie di Goldbach, quindi avremo G(66) = 6.

Mentre per N' = 6k -2 = 66 – 2 = 64, avremo invece meno coppie di Goldbach, poiché i multipli dispari di 3 si accoppiano anche con i numeri primi, e le coppie di Goldbach risultano così di numero inferiore, circa la metà rispetto a N=66=6k=6x11:

p + q = 64 = 6k -2 = 6 x 11 – 2

1	63	
3	61	prima coppia di Goldbach
5	59	seconda coppia di Goldbach
7	57	coppia mista primo e multiplo dispari di 3
9	55	multiplo dispari di 3 e composto
11	53	terza coppia di Goldbach
13	51	primo e multiplo dispari di 3
15	49	multiplo dispari di 3 e composto

17	47	quarta coppia di Goldbach
19	45	primo e multiplo dispari di 3
21	43	multiplo dispari di 3 e primo
23	41	quinta coppia di Goldbach
25	39	composto e multiplo dispari di 3
27	37	multiplo dispari di 3 e primo
29	35	primo e composto
31	33	primo e multiplo dispari di 3
(32	32)	

32 = 64/2 = N/2 , fine della formazione delle coppie

Ora le coppie di Goldbach sono solo cinque, e se si ripete la formazione delle coppie con N” = 68 = 66 +2, si vedrà che le coppie di Goldbach sono soltanto due, confermando la relazione di Goldbach

$$G(N-2) + G(N+2) \approx G(N) \quad \text{(relazione più evidente per N più grandi)}$$
$$5 + 2 = 7 \approx 6$$

Infatti per N’’ = 68 = 6 x 11 + 2 = 66 + 2:
p + q = 68

1	67	
3	65	multipli dispari di 3
5	63	primo e multiplo dispari di 3
7	61	prima coppia di Goldbach
9	59	multiplo dispari di 3 e primo
11	57	primo e multiplo dispari di 3
13	55	primo e composto
15	53	multiplo dispari di 3 e primo
17	51	primo e multiplo dispari di 3
19	49	primo e composto
21	47	multiplo dispari di 3 e primo
23	45	primo e multiplo dispari di 3
25	43	composto e primo
27	41	multiplo dispari di 3 e primo
29	39	primo e multiplo dispari di 3
31	37	seconda ed ultima coppia di Goldbach
33	35	multiplo dispari di 3 e composto
(34	34)	N/2 = 68/2 = 34 = semisomma

Per lo stesso meccanismo per N’ = 64, si formano solo due coppie di Goldbach per N’’= 68, che è anche l’ultimo numero pari con sole due coppie di Goldbach, cosi come 98 è l'ultimo numero pari che ne abbia solo 3 (e 12 è l'ultimo che ne abbia solo una). Quindi tutti i numeri pari ne hanno almeno una G(N) < 1 e mai G(N) = 0 = contro esempio della congettura, che così risulta definitivamente vera, crescendo G(N) con N e quindi con il numero dei multipli dispari di 3 (in numero di ≈ N /6) che regolano la formazione delle coppie di Goldbach come dagli esempi precedenti relativi ai numeri pari per 64, 66 e 68. Vediamo ora l'esempio per N = 24 = 12k per l'ultima coppia di gemelli 11 e 13:

p + q = 24 = 6k = 6 x 4

1 23 coppia impropria , poiché 1 non si considera p
3 21 multipli dispari di 3
5 19 prima coppia di Goldbach
7 17 seconda coppia di Goldbach
9 15 multipli dispari di 3
11 13 terza ed ultima coppia di Goldbach, e gemelli
(12 12)

Sebbene non tutti i numeri di forma 12k non hanno l'ultima coppia di Goldbach coincidente con una coppia di gemelli, viceversa tutti i numeri di una coppia di gemelli ha somma N = 12k, poiché:

$$p + q = 6k - 1 + 6k + 1 = 6k + 6k = 12k$$

Tutti i numeri pari hanno come ultima coppia di Goldbach o una coppia di gemelli o una coppia di Polignac (cioè una coppia di numeri primi consecutivi), mentre tutte le altre coppie di Goldbach per lo stesso N pari, di qualsiasi forma (6k, 6k-2, 6k +2) sono soltanto coppie di Chen (formate da un primo e da un semiprimo, cioè il prodotto tra due primi tranne il 2 e il 3, per es. 35 = 5 x 7, 121 = 11 x 11, ecc.)

Tutte le coppie di Goldbach e di gemelli sono simmetrici (uguale distanza = semidifferenza) rispetto a N/2. Per esempio, nel caso di N = 24

12 - 11 = 1, 12 + 11 = 23
12 - 9 = 3, 12 + 9 = 21
12 - 7 = 5, 12 + 5 = 17
… … … …
dove 1 e 23, 3 e 21, 5 e 17 sono le varie coppie di numeri dispari primi o composti e la cui somma è N e quindi anche le coppie di Goldbach quando entrambi i numeri dispari sono anche numeri primi. Alcuni altri esempi per la relazione di Goldbach per alcuni N:

G(N-2) + G(N+2) ≈ G(N)

Per N = 102: G(100) + G(104) ≈ G(102)
6 + 5 = 11 ≈ 8

Per N = 1002 : G(1000) + G(1004) ≈ G(1002)
28 + 18 = 46 ≈ 36

Per N = 9 000: G(8 998) + G(9 002) ≈ G(9 000)
101 + 110 = 211 ≈ 242

(vedi http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu Sezione "Articoli del prof. Giovanni Di Maria – Tab. G1, con il numero di coppie di Goldbach per tutti i numeri pari da 6 a 10.000, mentre il tabulato G2 dà tutte le coppie di Goldbach per tutti gli N pari da 5 a 1 000, entrambi utilissimi per chi volesse verificare ulteriormente la nostra suddetta relazione di Goldbach).

La suddetta relazione vale anche per numeri N che siano decine, centinaia, migliaia di unità ecc, purché sempre di forma, ora, N = N x 10k, N x 10 k -20, N x 10 k + 20, ecc. Per esempio :

N = 120, N' = 100 = 120 -20, N'' = 140 = 120 +20
G(100) + G(140) ≈ G(120)
6 + 7 = 13 ≈ 12
N = 1200; N'= 1200 – 200 =1000; N''=1200 + 200 =1400
G(1000) + G(1400) ≈ G(1200)
28 + 34 = 62 ≈ 54

e così via, di solito la somma dei due primi valori è leggermente inferiore o superiore al valore reale di G(N). La congettura di Goldbach è stata già testata fino a $N = 10^{17}$, (forse per una sola coppia Goldbach per ogni N fino a tale numero), ma qualunque ulteriore verifica sarà del tutto inutile, per quanto sopra dimostrato: a regolare la formazione delle coppie di Goldbach per qualsiasi N pari sono i tre diversi elementi che noi abbiamo individuato: anzitutto il numero d ≈ N/6 dei multipli dispari di 3, il numero π(N) dei numeri primi simmetrici rispetto a N/2 e infine la forma di N = 6k, N' = 6k-2 ed N'' = 6k+2

Tali forme coprono tutti i numeri pari:
N = 6 x k +2, -2, +0, , 8
2 = 6 x 0 + 2,
4 = 6 x 1 - 2,
6 = 6 x 1 + 0
8 = 6 x 1 + 2,
10 = 6 x 2 - 2
12 = 6 x 2 + 0,
14 = 6 x 2 + 2

16 = 6 x 3 - 2
18 = 6 x 3 + 0 e così via, alternano -2, +0 e + 2 al crescere di k tra i numeri naturali.

Esclusa per i suddetti motivi la possibilità G(N) = 0,
abbiamo:

G(N) = 1 solo per N = 4, 6, 8 e 12, G(N) = 2 solo per N = 10,14,16, 18, 20,28, 32,38 e 68, e così via , tutti gli altri N hanno almeno tre coppie di Goldbach.

Da questa nostra ultima e definitiva soluzione per la congettura di Goldbach (perfezionamento dei lavori precedenti), abbiamo tratto anche un nuovo metodo di fattorizzazione, esposto in altri nostri lavori insieme all'ing. Rosario Turco, informatico, vedi [9][10] e basato sulla formula già nota:

$$N = p + q = [(p + q)/2]^2 + [(q - p)/2]^2$$

e cioè il prodotto di due numeri interi (in questo caso anche primi) è uguale alla somma tra il quadrato della loro semisomma s e il quadrato della loro semidifferenza d, e che si può scrivere anche come $N = s^2 + d^2$, con la conseguenza p = s–d e q = s + d, cosa che l'ing. Turco ha espresso come $s^2 = Q$, e $d^2 = Q'$ nulla cambiando ai risultati finali: basta trovare Q per trovare contemporaneamente anche Q', e la fattorizzazione è fatta.

Tale metodo è molto veloce per q e p molto vicini, e quindi anche vicini a $n = \sqrt{N}$, quindi con piccole semidifferenze d; così occorrono d tentativi per fattorizzare N, anziché $\pi(p)$ tentativi con il vecchio metodo della fattorizzazione classica di dividere N per tutti i primi fino a p tale che N/p = q, valido invece per p molto piccolo e q molto grande.

Prodotti di Goldbach
Vediamo ora come funziona, tramite il concetto dei "prodotti di Goldbach" basati sulle somme di Goldbach p + q = S pari = 2s, il doppio della semisomma s = N/2 vista nella dimostrazione della congettura di Goldbach, e rispetto alla quale tutte le coppie di Goldbach sono simmetriche (uguali semidifferenze per ogni coppia di Goldbach). Riprendiamo l'esempio per N = 24, ma ora con i prodotti di Goldbach (tutti diversi per ogni coppia) anziché la somma, sempre uguale ad n per tutte le coppie;

p	x	q	=	N crescente fino a $Q = s^2$
1	x	23	=	23
3	x	21	=	63
5	x	19	=	95
7	x	17	=	119

11 x 13 = 143
12 x 12 = 144 = $(N/2)^2$ = Q = s^2

Calcolando la differenza tra s^2 un qualsiasi valore della colonna dei prodotti N, otteniamo un altro quadrato perfetto Q' = d^2 , tale che N = Q + Q' = $s^2 + d^2$
e quindi p = s – d e q = s + d, per ogni coppia p e q il cui prodotto sia p x q = N.

Per i quadrati perfetti, essendo p = q e la loro differenza uguale a zero e quindi anche la semidifferenza e il suo quadrato, avremo ovviamente:

$$p \times p = q \times q = N + 0 = N$$

con anche p = q = n = √N se N è un quadrato perfetto N = Q.

Infatti:

144 - 144	=	0	=	0^2
144 - 143	=	1	=	1^2
144 - 135	=	9	=	3^2
144 - 119	=	25	=	5^2
144 - 95	=	49	=	7^2
144 - 63	=	81	=	9^2
144 - 23	=	121	=	11^2

Qui il quadrato della semidifferenza è sempre dispari poiché anche la semidifferenza è dispari, mentre per le semidifferenze pari (che qui non ci interessano, anche il loro quadrato è pari, per es. N = 10 x 14 = 140, 144 – 140 = 4 = 2^2 e p = 10 = 12 -2, q = 14 = 12 + 2, come da regola generale p = s –d e q = s + d, che non vale soltanto per i numeri primi ma anche per tutti gli altri numeri, come si può facilmente verificare. Qui essa viene applicata ai numeri primi delle coppie di Goldbach p + q = S pari e ai prodotti di Goldbach = p x q = N, collegando in tal modo la ex congettura di Goldbach (classico e più noto problema additivo) alla fattorizzazione (problema moltiplicativo, come pure la nota funzione zeta di Riemann, produttorio degli inversi dei numeri primi elevati ad un numero complesso z). Risolta ora la fattorizzazione tramite un misto "additivo"di semisomme e semidifferenze e di moltiplicativo N = p x q (si ricorda che questo metodo è molto veloce per p e q molto vicini tra loro e quindi anche alla radice n = √N, poiché in tal caso bastano solo d tentativi per fattorizzare N), si potrebbe tentare una soluzione della ipotesi di Riemann RH tramite problemi additivi, applicati però a ipotesi equivalenti alla RH, per esempio la RH1 = RH tramite la somma H_n (numero armonico) e la funzione σ(n) , somma dei divisori, ed è proprio quello che due di noi (Di Noto e Nardelli) abbiamo fatto con la nostra proposta di soluzione della variante di Lagarias RH1 = RH (vedi riferimenti).

E anche la nostra presente soluzione della congettura di Goldbach sembra essere connessa alla RH1, poiché i multipli di 6 (tra i quali tutti i fattoriali e loro multipli) sono abbondanti, sia perché hanno $\sigma(n) > n$ sia perché hanno anche più coppie di Goldbach, e anche perché i grafici di L(n) e i grafici di G(N) sono simili, e hanno contro esempi teorici simili ($L(n) \geq 0$ e $G(N) = 0$), dimostrati impossibili dai grafici dei valori delle due funzioni; possibile segno, questo, di connessioni matematiche ancora più profonde e ancora da studiare meglio.

Infine, la soluzione della congettura forte di Goldbach ha come conseguenza diretta anche la soluzione della congettura debole di Goldbach, sottoproblema della GRH e quindi anche della RH, al pari della congettura dei primi gemelli (vedi riferimenti).

La congettura debole dice che un numero dispari maggiore di 7 si può scrivere anche come somma di tre primi, poniamo r, p e q tali che $r + p + q = N$ dispari.

Facciamo un solo piccolo esempio per tutti, che chiunque può estendere a qualsiasi numero dispari, anche grandissimo (anzi, più grande è meglio è, a conferma della verità di Goldbach debole).

Poniamo N dispari = 21; se si sottrae da 21 successivamente tutti i sei numeri primi r fino a N – 4 = 17, otteniamo sei numeri pari S, a loro volta somma di coppie di Goldbach p + q = S, ne consegue che 21 è la somma di r e dei due numeri primi che compongono le coppie di Goldbach per il numero pari S, e tanto più grande è S, tante più sono le sue coppie di Goldbach p + q = S. In altre parole, tanto più grande è N dispari, tanto più grandi sono i numeri pari S = N - 3, N - 5, N – 7, N – 11, e così via, fino a N – (N-4) se anche N-4 fosse r primo, in modo da ottenere il numero pari più piccolo , 4, già somma di 2 + 2 = sua unica coppia di Goldbach.

Infatti, per N = 21:

N r S = p + q	N = r + p + q	
21 – 3 = 18 = 5 + 13	**21 = 3 + 5 + 13**	**a**
21 – 3 = 18 = 7 + 11	**21 = 3 + 7 + 11**	**b**
21– 5 = 16 = 3 + 13	21 = 5 + 3 + 13	
21 – 5 = 16 = 5 + 11	**21 = 5 + 5 + 11**	**c**
21 - 7 = 14 = 3 + 11	21 = 7 + 3 + 11	
21 - 7 = 14 = 7 + 7	**21 = 7 + 7 + 7**	**d**
21 – 11 = 10 = 3 + 7	21 = 11 + 3 + 7	

21 - 11 = 10 =   5   +   5   <u>21 = 11 + 5 + 5</u>

21 - 13 =   8 =   3   +   5   <u>21 = 13 + 3 + 5</u>

21 - 17 =   4 =   2   +   2   **21 = 17 + 2 + 2   e**

Abbiamo in totale 10 terne di primi, dalle quali si tolgono le cinque terne ripetute , sottolineate; e ne rimangono 5, tutte diverse l'una dall'altra, contrassegnate dalle lettere: a, b, c, d, e.

Consideriamo ora i numeri N pari vicini, 20, con due coppie di Goldbach, e 22, con tre coppie di Goldbach: hanno in totale cinque coppie di Goldbach, cioè meno delle sei terne di Goldbach debole per N = 21, il che succede anche per tutti gli altri N dispari, per cui non esiste un numero dispari che non sia somma di tre numeri primi, il che dimostra la congettura debole sulla base della verità della congettura forte.

Per i numeri dispari minori, abbiamo:

7   = 2 + 2 + 3 con N = 7 numero minimo per la congettura
9   = 3 + 3 + 3 = 2 + 2 + 5   (due terne di numeri primi)
11 = 2 + 2 + 7 = 3 + 3 + 5   "   "   "
13 = 3 + 5 + 5 = 3 + 3 + 7   "   "   "
15 = 2 + 2 +11 = 3 + 5 + 7   "   "   "
17 = 2 + 2 + 13 = 3 + 3 + 11 = 5 + 5 + 7 = 7 + 7 + 3   (quattro terne)
19 = 3 + 3 + 13 = 5 + 7 + 7 = 3 + 5 + 11   (tre terne   "   )
21 vedi esempio precedente, con cinque terne
 …   …   …   …   …
(le terne effettive sono circa la metà delle terne trovate)

Al crescere di N dispari, crescono anche le T(N) terne effettive di Goldbach debole, cosi come al crescere di N pari, crescono le G(N) coppie di Goldbach , senza mai avere T(N) = 0 neanche per Goldbach debole.

In seguito vedremo di trovare qualche formula, ma già sappiamo che T(N) > G(N±1), per esempio per N = 19, T(19) = 3 > 2 = G(18) e   3 > 2 = G(20) oltre che per N = 21 T(N) = 5 > G(N) =20   e 5 < 3 = G(22).

Quindi, la congettura cosiddetta debole è invece, numericamente: T(N) > G(N±1), ancora più forte della congettura forte di Goldbach, poiché, come abbiamo visto con alcuni esempi, il numero di T(N) terne per N dispari è sempre maggiore del numero G(N±1) di coppie di Goldbach per i numeri pari N-1 ed N+1 adiacenti ad N.

Conclusione

L'ormai ex congettura di Goldbach potrebbe essere connessa alla RH1 tramite la funzione $\sigma(N)$ con N = 6n, e alla fattorizzazione veloce per piccole semidistanze d tra q e p; mentre la anch'essa ormai ex congettura debole di Goldbach è connessa alla GRH (e indirettamente alla RH) come suo sottoproblema tramite la funzione T(N) con N dispari; e con T(N) il numero delle terne effettive di numeri primi r, p, e q tali che $r + p + q = N > 7$.

Con una piccola tabella si rende più semplice la maggiore quantità di T(N) rispetto a G(N±1):

N	G(N±1)	T(N)	con N numeri dispari
4	1	-	
6	1	-	
7		1	
8	1		
9		1	
10	2		
11		2	
12	1		
13		1	
14	2		
15		2	
16	2		
17		4	
18	2		
19		3	
20	2		
21		5	**maggiore di 2 = G(20) e di 3 = G(22)**
22	3		
…	…	…	

Come si vede T(N) per i numeri dispari tende ad essere sempre più grande di G(N) per i numeri pari N+1 ed N–1 adiacenti.

Simmetria nel problema di Goldbach

A cura dell'ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

Il problema di Goldbach è stato affrontato già ampiamente sopra e nel lavoro del riferimento [14], dove si fa uso del Postulato di Bertrand (dimostrato per la prima volta da Chebyscev). Qui ci proponiamo di dare una visione ulteriormente differente dello stesso problema, insistendo esclusivamente sulla simmetria e la teoria dei gruppi e mostrando un semplice metodo di individuazione dei numeri primi che contribuiscono alla somma di un numero pari.

Nell'insieme dei numeri naturali, disegnando i numeri su una semiretta orientata, due numeri si dicono simmetrici rispetto ad un numero n se sono equidistanti da esso (cioè ad una stessa distanza di numeri naturali).

Esempio n=8
Ora 5+11 sono una soluzione di Goldbach per il numero pari 16. Si osserva che sia 5 che 11 sono equidistanti (d=2) da n=8 e la loro somma è 2n=16.

Da qui nasce un semplice metodo. Supponiamo di voler trovare tutte le soluzioni di Goldbach corrispondente a 2n=64. La simmetria e la Teoria dei gruppi che ci ha insegnato? Vediamo il seguente algoritmo logico.

Step 1: Ricaviamo n (nell'esempio n=32)

Step 2: consideriamo i numeri primi che precedono 32 ed i numeri primi che lo seguono fino a 2n-1:
2,3, 5,7,11,13,17,19,23,29,31,32,33,37,39,41,43,47,51,53,59,61

Step 3: calcolo della differenza tra 2n=64 ed il numero primo che precede n
Se la differenza è "un numero primo" (**secondo la Teoria di Galois**) allora la coppia di numeri primi trovata è simmetrica rispetto ad n ed il numero 2n si può scomporre nella somma di due numeri primi (uno per costruzione e uno per differenza)

Esempio

64-31 =	33 no	
64-29 =	35 no	
64-23 =	41 si	(23 e 41 sono simmetrici rispetto a 32)
64-19 =	45 no	
64-17 =	47 si	(17 e 47)
64-13 =	51 no	
64-11 =	53 si	(11 e 53)
64-7 =	57 no	
64-5 =	59 si	(5 e 59)
64-3 =	61 si	(3 e 61)

Goldbach negli insiemi rarefatti di numeri primi

Uno dei problemi che assillano i teorici è di capire se effettivamente "*ogni pari possa essere somma di due numeri primi*".

Negli intervalli rarefatti di numeri primi, i numeri pari hanno una soluzione di Goldbach? La risposta è affermativa, perché grazie alla simmetria esisteranno valori a destra e a sinistra del valore centrale intero tale da ottenere delle soluzioni di Goldbach.

Ad esempio l'intervallo 7!+2 a 7!+7, cioè valori numerici da 5042 a 5047:

5042 non primo e pari con 59 soluzioni di Goldbach
5043 non primo
5044 non primo e pari con 66 soluzioni di Goldbach
5045 non primo
5046 non primo e pari con 115 soluzioni di Goldbach
5047 non primo

Le effettive 115 soluzioni di Goldbach (vedi tabulato G1 tra i lavori del prof. Di Maria) per N = 5046 = 6*841 sono circa il doppio delle altre 66 soluzioni per N – 2 = 5046 -2 = 5044, e delle 54 soluzioni effettive per N +2 = 5046 +2 = 5648, infatti 66 + 54 = 120 ≈ 115 = G(5046), confermando la relazione di Goldbach:

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & & c \\ G(N-2) & + & G(N+2) & = & G(N) \\ 66 & + & 54 = 120 & \approx & 115 \end{array}$$

a + b non può mai essere uguale c, perché ciò significherebbe che a oppure b dovrebbero essere 0, e il che significherebbe che a oppure c non dovrebbero avere multipli dispari di 3 e nemmeno numeri primi, gli elementi che determinano la formazione delle coppie di Goldbach), è ciò succede soltanto per a = b = N = 2, ma non per tutti gli altri N successivi, presenti nella suddetta relazione di Goldbach; d'altra parte, considerando 1 numero primo (poiché di forma generale 6k +1 per k=0 anche 2 avrebbe la sua coppia di Goldbach 1 + 1 = 2, in tal caso 4 avrebbe le due coppie di Goldbach 2+2 = 4 e 1+3 = 4 anziché solo la prima, finora l'unica considerata.

Il suddetto ragionamento per assurdo, ponendo a = 0 oppure b = 0, dimostra ancora una volta la congettura di Goldbach, poiché qualsiasi numero pari N > 4 ha almeno un multiplo dispari di 3 (per N = 4 abbiamo solo 3 = 3*1) e almeno due numeri primi per formare una almeno una coppia di Goldbach (fino a 4 abbiamo il 2 e il 3).

L'ultima soluzione di Goldbach, però, per numeri pari e multipli di 12 ma interni a intervalli rarefatti di numeri primi non individua mai numeri gemelli, anche perché nell'intervallo non ci sono numeri primi. Ad esempio nell'intervallo rarefatto di primi tra 12!+2 e 12!+12, il numero 12!+12 è multiplo di 12 (n=12N) e di conseguenza anche pari e come valore corrispondente a 479001612: esso ha soluzioni di Goldbach ma l'ultima soluzione di Goldbach non individua numeri gemelli.

Questa precisazione, quasi ovvia, serve solo a dire che l'ipotesi rigorosa sul **Teorema dell'ultima soluzione di Goldbach e i numeri gemelli** è la seguente: "*L'ultima soluzione di Goldbach, per numeri pari multipli di 12 (n=12N) e non appartenenti a intervalli numerici rarefatti di primi, individua sempre una coppia di numeri gemelli*".

Numeri gemelli e l'ipotesi generalizzata di Riemann

A cura della prof. Annarita Tulumello

Nel riferimento [20] si parla della nostra dimostrazione della congettura dei numeri primi gemelli, della recente dimostrazione di due matematici cinesi, e dl una nostra dimostrazione per assurdo (usando le forme 6n±1) simile a quella dei due Autori cinesi: data un'ipotetica ultima coppia di gemelli, se ne può sempre trovare una ancora più grande e successiva; ed accennando anche alle coppie di gemelli come ultime coppie di Goldbach per molti N = 12k, cosa che lega indissolubilmente le due congetture, finora trattate sempre separatamente; al massimo si è fatto un semplice paragone tra le relative formule di calcolo:

$G(N) \approx N/(\log N)^2$ = coppie di Goldbach per N e $g(n) \approx N/(\log N)^2 * c$

Dove:
c=1,32032… è una costante
g(n) numero delle coppie di primi gemelli fino ad N.

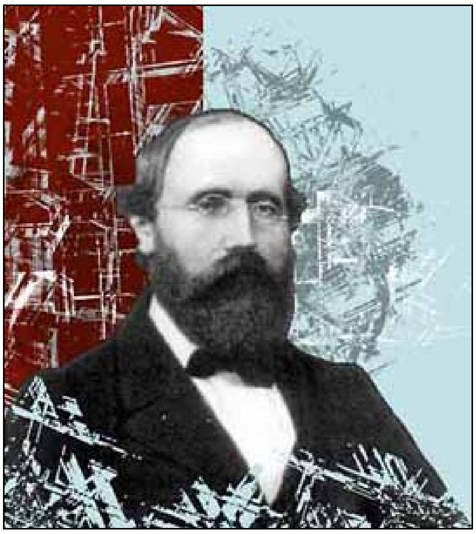
Il segreto della spirale Ulam

A cura dell'ing. Rosario Turco

Nel riferimento [15] si dà una definitiva chiave di lettura, da un altro punto di vista, della "*spirale di Ulam*", svelandone il mistero, proprio evitando di osservarla attraverso le diagonali. Essa viene svelata come la spirale di numeri gemelli. Viene, poi, mostrata la "*spirale di Marteinson*" legata alle forme 6k±1 ed in ultimo la "*spirale di Turco*" legata al problema di Goldbach e al Teorema sull'ultima soluzione di Goldbach per i numeri gemelli.

La funzione zeta di Riemann

A cura dell'ing. Rosario Turco



E' noto che la funzione zeta di Riemann è espressa in generale nel seguente modo :

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \Pi_p \frac{1}{1-\mathrm{p}^{-z}} \quad (1)$$

Dove z=a+jb con z ε C ovvero numero complesso, mentre il produttorio è sviluppato all'infinito rispetto a tutti i numeri primi.

La parte destra della (1) esprime che la funzione zeta di Riemann è una serie costituita dalla "potenza complessa" di tutti i numeri naturali; mentre la parte sinistra della (1), ricavata già da Eulero in campo reale R, mostra il legame esistente tra la serie ed il prodotto dei numeri primi; questo in sostanza perché anche i numeri primi fanno parte dell'insieme dei numeri naturali.

La dimostrazione di come si giunge alla parte sinistra è mostrata di seguito con i passaggi (a)(b)(c)(d). Difatti è:

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \ldots \quad (a)$$

Se nella (a) si moltiplica per $1/2^z$ si ottiene:

$$\frac{1}{2^z}\zeta(z) = \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{6^z} + \frac{1}{8^z} + \ldots \quad (b)$$

Se alla (a) si sottrae la (b) si ottiene:

$$(1 - \frac{1}{2^z})\zeta(z) = 1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} \quad (c)$$

Se si ripete il procedimento all'infinito anche per 1/3z, 1/5z, 1/7z etc, si ottiene:

$$(1 - \frac{1}{2^z})(1 - \frac{1}{3^z}).....\zeta(z) = 1 \quad (d)$$

Dalla (d) discende rapidamente la (1) osservando di avere a che fare con numeri primi.

La (d) permette anche una chiave di lettura concreta, interpretando la (1) come somma infinita di rettangoli di area $1/n^z$.

Una volta compreso il significato della (1), ci si rende conto rapidamente che, volendo dare una interpretazione geometrica (o vettoriale o polare) basata sulla rappresentazione di un numero complesso come un vettore, è più facile lavorare con la parte destra della (1), cioè con la serie.

Difatti dalla (1) discende che:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} n^{-jb} \quad (2)$$

Ora ponendo che:

$$\theta = -b \ln n$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$$

Otteniamo la (3):

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} e^{-jb \ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} (\cos\theta + j \sin\theta) \quad (3)$$

In particolare per una rappresentazione grafica si può far variare θ secondo $d\theta = -b/n$. In tal caso il grafico della zeta di Riemann si può giustificare secondo la (3) tenendo presente, nel piano complesso, gli infiniti vettori in gioco nella serie al variare di dθ tra 0 e 2kπ (con k intero che varia). Quando dθ=2kπ, allora i vettori saranno concordi e la curva sarà un po' più lineare e tirata mentre quando dθ=(2k+1)π i vettori saranno discordi e la curva presenterà situazioni meno lineari e raccogliendosi a spirale. Il processo si ripete appena dθ=(2k+2)π. Il numero di spirali è uguale al numero di valori n per cui dθ è divisibile per 2π, cioè b/2π. Per valori di n piccoli le spirali si notano poco perché raggruppate in pochi punti, mentre all'aumentare di n le spirali sono più evidenti.

La serie espressa dalla (1) è assolutamente convergente per la Re(z)>1 Abbiamo visto che: $n^{-z} = n^{-a-jb} = n^{-a} n^{-jb} = n^{-a} e^{-jb\ln(n)}$ L'esponenziale ha valore assoluto 1; entrambi i lati della (1) sono convergenti nel semipiano per a>1. Riemann mostrò che è possibile estendere (prolungare) la funzione ζ(z) dal semipiano ad una *funzione meromorfica* a tutto il piano complesso C, analitica ad eccezione del polo in z=1. La continuazione per a>0 è ottenibile osservando la seguente formula (che non dimostriamo):

$$\zeta(z)-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^{-z}-\int_{n}^{n+1}x^{-z}dx\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}(n^{-z}-x^{-z})dx$$

$$\forall x\in\left[n,n+1\right](n\geq 1)\ a>0$$

$$|\,n^{-z}-x^{-z}\,|=|\,z\int_{n}^{x}y^{-1-z}dy\,|\leq|\,z\,|\,n^{-1-a}$$

In altri termini $\zeta(z)$ – 1/(1-z) è una somma di funzioni analitiche convergenti assolutamente nell'insieme {a + jb : a>0}. Per a>0 si può ottenere la continuazione analitica, ricordando che la funzione gamma di Eulero $\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}e^{-x}x^{z-1}dx$ e che $z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$, giungendo all'equazione funzionale di Riemann:

(4) $\xi(z)=\xi(1-z)$

dove $\xi(z)=\pi^{z/2}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z)$ per a>0

Ipotesi di Riemann (RH)

L'ipotesi di Riemann dice che: "la funzione $\xi(z)$ si estende ad una funzione meromorfica in C, regolare eccetto che per poli semplici in z=0,1 i quali soddisfano l'equazione funzionale $\xi(z)=\xi(1-z)$. Da qui segue che anche la funzione $\zeta(z)$ si estende ad una funzione meromorfica in C che è regolare eccetto per un semplice polo a z=1, e che la continuazione analitica di $\zeta(z)$ ha dei semplici zeri per valori negativi pari -2,-4,-6 … e nessun altro zero è al di fuori della striscia critica $0\leq a\leq 1$".

Molte dimostrazioni sono state presentate negli anni, tra cui anche quella del riferimento [5]. Riassumendo, da considerazioni varie e da dimostrazioni, la **congettura RH** dice che "gli zeri non banali della funzione $\zeta(z)$ di Riemann stanno sulla retta a=1/2, detta *linea critica"*.

La storia della ricerca degli zeri è riassunta nella tabella successiva.

Anno	Numero di zeri	Autore
1903	15	Gram
1914	79	Backlund
1925	138	Hutchinson
1935	1,041	Titchmarsh
1953	1,104	Turing
1956	25,000	Lehmer
1958	35,337	Meller
1966	250,000	Lehman
1968	3,502,500	Rosser, Yohe, Schoenfeld
1979	81,000,001	Brent
1982	200,000,001	Brent, Van de Lune, Te Riele, Winter

1983	300,000,001	Van de Lune, Te Riele
1986	1,500,000,001	Van de Lune, Te Riele, Winter
2001	10,000,000,000	Van de Lune
2004	900,000,000,000	Wedeniwski
2004	10,000,000,000,000	Gourdon en Demichel

Dalla (4) segue che se:

$$\theta(\mathrm{b}) = \arg(\pi^{-\frac{1}{2}ib}\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{ib}))=\Im[\log\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{ib})]-\frac{\mathrm{b}}{2}\log\pi$$

Allora:

$Z(b) = e^{j\theta(b)}\zeta(\frac{1}{2}+ib)$ è reale (per b reale). In particolare è: $|Z(b)|=|\zeta(\frac{1}{2}+ib)|$

Per cui, risultato fondamentale, è che gli zero di Z sono la parte immaginaria degli zeri di ζ sulla linea critica. La Z è la funzione di Riemann-Siegel.

Rappresentazione della zeta di Riemann

La zeta di Riemann non si può rappresentare in 4D. La strategia migliore è rappresentare la (3) separatamente come funzione sia della parte Reale che della parte Immaginaria, rispetto a z=a+jb. Per cui la rappresentazione tridimensionale prevede tre assi: a, b mentre Re(Z) e Im(Z) sono rappresentati sullo stesso asse.

Rappresentazione degli zeri

Da quanto appreso precedentemente è soprattutto lo studio della funzione Z di Riemann-Siegel di maggiore interesse, perché o numericamente o graficamente si hanno le parti immaginarie degli zeri (visto che a=1/2).

A che serve cercare gli zeri della funzione zeta di Riemann? Si è compreso che gli zeri sono legati ai numeri primi e per implicazione di tale relazione essi sono infiniti. Attualmente gli zeri trovati algoritmicamente sono in quantità notevoli sulla retta che passa per a=1/2. Serve trovarne altri? La risposta è negativa. Cercarli tutti è impossibile: non basterebbe la vita dell'universo stesso; gli zeri sono infiniti (perché i primi sono infiniti: teorema di Euclide e teorema di Hadamard-Poussin). Serve, quindi, una dimostrazione logica-matematica con un approccio diverso, per superare la situazione di stallo.

Numeri irrazionali

L'osservazione è che gli zeri (la parte immaginaria), giustamente, hanno dei valori corrispondenti a numeri irrazionali e sono perciò localizzati su rette (o più in generale su curve) rappresentate da zeri (o radici) di polinomi a coefficienti interi del tipo:

$$P(x) = a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + ... + a_1 * x + a_0 = 0$$

Infatti eventuali radici razionali, se esistessero, dovrebbero essere del tipo r/s, dove r è un divisore di a0 e s di an; altrimenti le radici sono irrazionali (perché non sono periodiche né razionali altrimenti si potrebbero esprimere tramite frazioni). D'altra parte un modo per costruire numeri irrazionali è proprio con numeri algebrici irrazionali, cioè con i coefficienti di un polinomio come sopra accennato. Il contesto di base degli zeri della RH è proprio questo. Nel caso specifico il polinomio si riduce ad una retta:

$$P(x) = a_1 * x + a_0 = 0$$

e la soluzione è x=1/2.

La ricerca di qualche zero che si comportasse in modo anomalo fuori della striscia critica potrebbe essere interessante; ma l'ipotesi di Riemann per "diverse vagonate di iper-miliardate di zeri sulla retta a=1/2" continua a essere vera.

Trovare più zeri di quelli noti, ormai è chiaro a tutti che porta solo ad entrare nel "guiness dei primati", mentre la strada che porta alla vetta "RH risolta" passa per un altro sentiero.

Se, per ipotesi, oggi non conoscessimo ancora i numeri irrazionali continueremo a cercare tutte le cifre decimali di $\sqrt{2}$ per vedere se è periodico? Oppure dimostreremmo invece che è irrazionale? Per la verità, ancor oggi, si cerca sempre l'ennesima cifra del numero irrazionale trascendente per eccellenza: π. Però si sa che è solo una ricerca di primato che non ci dice nulla di più del fatto che il numero ha infinite cifre dopo la virgola.

D'altra parte i numeri primi seguono il Teorema di Dirichlet: dice che: per ogni q > 0 e qualsiasi a, coprimo con q, allora vi sono infiniti primi nella forma a + kq.

Il teorema giustifica, quindi, la forma 6k+1 e l'infinità dei primi ottenibili. Inoltre se consideriamo un q>1 ogni progressione del tipo a mod q ha asintoticamente la stessa densità dei numeri primi. In tal caso definendo π(x;q,a) := #{p≤x: p ≡ a mod q} allora per a coprimo con q si ottiene che:

$$\pi(x;q,a) \sim 1/\varphi(q) * \mathrm{Li}(x)$$

Dove Li(x) è il dilogaritmo di Gauss.

Numeri primi e numeri irrazionali

Un ultimo seme, per chi vuole percorrere nuovi sentieri: "c'è un legame tra numeri irrazionali e numeri primi"? Tale legame ci può servire o è solo una condizione di arresto algoritmica? Conosciamo tutte le proprietà e teoremi su questo argomento?

Ad esempio un modo per dimostrare che un numero è primo è di verificare che non abbia divisori fino alla sua radice quadrata. In altri termini si lega una proprietà di un intero (primalità) a quello di un numero irrazionale. Il motivo tra l'altro è semplice se x è composto allora x=F1*F2 e poiché $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$; per cui se $F_1 > \sqrt{x}$ allora $F_2 < \sqrt{x}$. Per cui è sufficiente arrestare la ricerca al fattore minore.

Legami tra Numeri primi, Goldbach e funzione di Riemann sono presentati in [12].

Crittografia

A cura dell'ing. Rosario Turco

La dimostrazione della RH e della GRH ha una applicazione pratica nella crittografia? Attualmente molti teoremi, fiduciosi sulla dimostrazione della RH e/o della GRH, iniziano con la frase:"Supponiamo che la RH sia vera, allora …". In campo matematico e fisico ha sicuramente una grande importanza e utilizzo. I numeri primi sono legati agli zeri della funzione zeta di Riemann, in particolare con la parte immaginaria dello zero. Ne conosciamo anche i valori ed il legame con i numeri primi.

Facciamo un'ipotesi: supponiamo che la RH e la GRH siano state dimostrate, questo consente di scardinare la crittografia? I numeri primi sono di interesse ad esempio sia nel RSA che nelle funzioni ellittiche. La conoscenza degli zeri della Z di Riemann riusciamo a collegarli ad esempio alla funzione di Eulero (vedi riferimento [8]):

$$\phi(m)= \phi(p *q)=(p-1)*(q-1)$$

con p e q primi ?

Gli Hacker non hanno i mezzi tecnico-teorici o è il premio dell'organizzazione Clay o della RSA o la Field Medal a non essere stimolanti? Se esistesse un solo modo, anche approssimativo o di brute force grazie agli zeri attraverso la RH o GRH, per poter demolire o dimostrare di poter demolire facilmente la crittografia RSA o ellittica (di grosso interesse per i dispositivi mobili), un qualunque hacker sperduto nel mondo l'avrebbe già trovato da qualche anno, nonostante tutta la security tecnica o governativa di ogni paese del pianeta. Un hacker del genere oggi sarebbe multi-premiato e assunto, come dipendente o come consulente, dalle maggiori aziende o agenzie di sicurezza o dai servizi segreti. Non solo ma oggi grazie a INTERNET c'è un più rapido scambio di know-how e di informazioni teoriche e la stessa INTERNET rende possibili progetti come Zeta Grid con innumerevoli risorse di calcolo distribuito e con una accelerazione alla ricerca di soluzioni. Solo che il problema non può essere solo risolto attraverso una ricerca numerica di una soluzione.

RSA e numeri semiprimi

Una domanda però ce la poniamo: "E' possibile fattorizzare un RSA senza far uso della funzione modulo esponenziale?". In realtà sì, si può usare anche solo una funzione modulo in una equazione di secondo grado. Un lavoro in tale direzione è quello in [16].

Il lavoro [16] è un metodo di fattorizzazione per semiprimi, ovvero composti esprimibili come prodotto di due primi N = p * q e rappresenta una semplificazione del metodo “Quadratic sieve” adatto alla fattorizzazione di composti con parecchi fattori primi. Anche un numero RSA è un numero semiprimo. Ecco l’importanza della cosa.

Qualche altro spunto: i numeri primi si generano anche con equazioni ellittiche e le curve ellittiche servono alla crittografia. In particolar modo le chiavi generate con curve ellittiche sono di dimensione minori e di sicurezza analoga all’RSA; questo rende la crittografia ellittica importante per i dispositivi mobili, come telefonini, palmari, blackberry etc.

Crittografia e Linguaggi Formali

A cura dell’ing. Rosario Turco

E’ possibile formalizzare tutti i sistemi crittografici, a chiave pubblica o privata, a meccanica quantistica o a curve ellittiche, con un unico sistema formale? In realtà sì.

Uno domanda-spunto. Se è possibile fare questo vuol dire che è possibile anche esprimere il sistema crittografico con un linguaggio formale oppure con un linguaggio formale verificare se esso è violabile o meno? In linea di principio è possibile.

Teoria delle stringhe e Linguaggi formali

Una formalizzazione matematica della teoria delle stringhe è possibile ottenerla con un Linguaggio formale. Sui linguaggi formali molto si deve a Chomsky.

Teoria dei gruppi, Gruppi di Lie e Teoria delle stringhe

A cura del prof. Francesco Di Noto

Nell’articolo su “LE SCIENZE” di Maggio 2007 “Il gruppo delle stringhe”, il Prof. Piergiorgio Odifreddi scrive tra l’altro che: “ …Introdotti da Sophus Lie nel 1874, i gruppi di Lie sono gruppi dotati di un sistema di coordinate locali rispetto al quale le operazioni di gruppo risultano analitiche (cioè infinitamente differenziabili): già dalla loro definizione, dunque, risultano essere un’interessante mistura di algebra, topologia, e analisi, e fin dalla loro introduzione hanno trovato applicazione nei campi più svariati della matematica e della fisica.

Tipici esempi di gruppi di Lie sono il gruppo delle rotazioni di un cerchio, indicato sia con U(1) sia con SO(2), e avene dimensione 1 (perchè un suo elemento è specificato dall’angolo di rotazione attorno al centro). O il gruppo delle rotazioni della sfera, indicato con SO(3) e avente dimensione 3 (perché un suo elemento è specificato dall’asse di rotazione, che richiede due parametri, e dall’angolo di rotazione rispetto ad esso).

Nel 1888 Wilhelm Killing intraprese una classificazione dei gruppi semplici di Lie,che sono i costituenti elementari dei gruppi di Lie in un senso analogo a quello per cui i numeri primi lo sono per gli interi. Tale classificazione, perfezionata da Elie Cartan nel 1894, stabilì che ci sono quattro famiglie infinite di gruppi semplici di Lie, i cui elementi sono indicati con An, Bn, Cn e Dn (per un qualunque intero n), e cinque gruppi eccezionali, che non rientrano in nessuna di queste famiglie, indicati con G2, F4, E6 ed E8, e aventi rispettivamente dimensione 14, 52, 78, 133 e 248.

Tra i gruppi di Lie eccezionali, E8 è il più complicato e interessante: Anzitutto da un punto di vista matematico visto che contiene come sottogruppi E6 ed E7. Ma anche da un punto di vista fisico, visto che una sua doppia coppia caratterizza la teoria eterotica delle stringhe, permettendo la compattificazione di 16 delle 26 dimensioni nelle quali vive la teoria; e poiché la dimensione del gruppo è 248, la teoria precede l’esistenza di 496 bosoni di campo che trasmettono le forze, cioè un numero perfetto nel senso dei Greci! ”

Premesso che “…dai gruppi E6, E7 ed E (si ottengono i gruppi delle simmetrie dei solidi regolari” (relazione con le simmetrie, connesse alla Teoria dei gruppi di Galois), noi abbiamo intravisto un possibile legame i numeri delle dimensioni e i nostri numeri primi naturali, di forma 6f + 1 dove f sono i numeri di Fibonacci (nei numeri primi normali in generale, n sono gli interi positivi). Infatti i numeri primi p più vicini ai suddetti numeri d di dimensione sono:

d	p	= 6 * f	+	1	
14	13	6 * 2	+	1	con 2 numero di Fibonacci
52	53	6 * 9	-	1	con 9 = 8 + 1 numeri di Fibonacci
78	79	6 * 13	+	1	con 13 = numero di Fibonacci
133	131	6 * 22	-	1	con 22 = 21 + 1 numeri di Fibonacci
248	251	6 * 42	-	1	con 42 = 34 + 8 numeri di Fibonacci.

con:
14 – 13 = 1, 53-52 = 1, 79 -78 = 1, 133-131 = 2, 251-248 = 3, e tali differenze 1, 1, 1, 2 e 3 sono anch’esse numeri di Fibonacci. Un legame, sia pure debole, tra numeri di dimensione dei gruppi di Lie e numeri primi naturali (e quindi anche di Fibonacci) sembra esserci , e comunque da approfondire, perché i numeri primi naturali emergono anche in altri fenomeni naturali, a cominciare proprio dalle stringhe (i valori delle vibrazioni delle stringhe sono numeri primi naturali, vedi [11][12]), per arrivare alle durate delle orbite dei pianeti, ecc.

Quindi Teoria dei gruppi di Galois e relative simmetrie, numeri primi, numeri primi naturali tramite i numeri f di Fibonacci, e le teorie di stringa sembrano in qualche modo connessi, e tali connessioni potrebbero essere approfondite in futuro, perché potrebbero portare ad ulteriori connessioni con la funzione zeta di Riemann e quindi con la relativa ipotesi RH, e alla nostra soluzione della congettura di Goldbach (connessa alle simmetrie, ai numeri primi gemelli e alla fattorizzazione collegando somme di Goldbach p + q e prodotti di Goldbach p * q), ecc.

Riferimenti

1. http://math-it.org/Mathematik/Riemann/
2. http://Mathworld.wolfram.com
3. Partial Euler Products as a new approach to Riemann Hypotesys - Jean-Paul Jurzak http://lanl.arXiv.org/abs/math/0202273v1
4. Separation of the complex zeros of the Riemann Zeta function – Herman te Riele – Symposium Berlin, 20-21 July 2006
5. Proposta di dimostrazione della variante Riemann di Lagarias – Francesco Di Noto e Michele Nardelli http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu/ (vedi lavori del dott. Nardelli)
6. http://xoomer.alice.it/stringtheory/Hoeme.html - Michele Nardelli
7. Tecniche di Primalità e Teoremi – Rosario Turco www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 sezione MISC
8. Le basi della crittografia – Rosario Turco www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 sezione MISC
9. Test di primalità, fattorizzazione e $\pi(N)$ con forme 6k±1 - Rosario Turco, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello – CNR SOLAR Marzo 2008 http://150.146.3.132/ CRN Solar www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 sezione MISC
10. Fattorizzazione con algoritmo generalizzato con quadrati perfetti in ambito delle forme 6k+1" – Rosario Turco, Michele Nardelli, Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, Annarita Tulumello, Maria Colonnese – CNR SOLAR
11. Teoria dei numeri e Teoria di Stringa, ulteriori connessioni Congettura (Teorema) di Polignac, Teorema di Goldston –Yldirim e relazioni con Goldbach e numeri primi gemelli" – Michele Nardelli e Francesco Di Noto – CNR SOLAR Marzo 2007;
12. Teoremi sulle coppie di Goldbach e le coppie di numeri primi gemelli: connessioni tra Funzione zeta di Riemann, Numeri Primi e Teorie di Stringa" Nardelli Michele e Francesco Di Noto- CNRSOLAR Luglio 2007;
13. Note su una soluzione positiva per le due congetture di Goldbach" - Nardelli Michele, Di Noto Francesco, Giovanni Di Maria e Annarita Tulumello - CNR SOLAR Luglio 2007.
14. Algoritmi per la congettura di Goldbach - G(N) reale- Rosario Turco – CNR SOLAR (2007)
15. Il segreto della spirale di Ulam, le forme 6k±1 e il problema di Goldbach – Rosario Turco - R CNR Solar 2008 – The secret of Ulam's spiral, the forms 6k±1 and the Goldbach's problem - http://www.secamlocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/ulam.htm
16. Semiprimi e fattorizzazione col modulo – Rosario Turco, Maria Colonnese – CNR SOLAR Maggio 2008
17. Forme generatrici di numeri primi, numeri gemelli,congetture di Collatz – Rosario Turco - www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 sezione MISC
18. Articoli del prof. Di Noto – http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu
19. Congetture di Chen e Brocard - Rosario Turco - www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 sezione MISC
20. I numeri primi gemelli e l'ipotesi di Riemann generalizzata", a cura della Prof. Annarita Tulumello, http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu