

# Considerazioni generali sulle possibili connessioni tra i Gruppi Algebrici ed alcuni settori della Teoria dei Numeri nelle Teorie di Stringa (con accenno anche alla fisica quantistica ed alle matrici)

Francesco Di Noto e Michele Nardelli<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Dipartimento di Scienze della Terra  
Università degli Studi di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10  
80138 Napoli, Italy

<sup>2</sup>Dipartimento di Matematica ed Applicazioni “R. Caccioppoli”  
Università degli Studi di Napoli “Federico II” – Polo delle Scienze e delle Tecnologie  
Monte S. Angelo, Via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

## Abstract

In this paper, we have described and summarized the various mathematical connections between the algebraic groups and some sectors of the Number Theory in String Theory. Furthermore, we want to show and remember the fundamental contribution that some sectors of Number Theory, principally the Fibonacci's number, the partition of numbers, the prime numbers and the prime natural numbers, can give to many subjects concerning the theoretical physics (string theory, supersymmetry, gauge theories, etc...).

## Introduzione

Nel Modello Standard della fisica quantistica e anche nelle teorie di stringa, com'è noto, hanno molta importanza i gruppi algebrici finiti, ciclici o sporadici, detti anche gruppi di Lie, e nei quali emerge il concetto matematico di simmetria, legato ai gruppi di permutazioni e quindi ai fattoriali (e da qui ai molti fattori primi del numero di elementi contenuti in uno qualsiasi dei suddetti gruppi). Poiché tale concetto di simmetria è molto importante anche nelle teorie di stringa, ma non è il solo elemento di base, vogliamo affiancargli il contributo che potrebbero dare alcuni settori della Teoria dei Numeri, e precisamente: numeri primi; numeri primi naturali; numeri di Fibonacci; numeri p-adici, partizioni di numeri. Un nostro lavoro su questo argomento è stato di recente pubblicato sul sito <http://xoomer.alice.it/stringtheory/> con il titolo “I Gruppi di Lie e la simmetria in fisica e in matematica”, insieme a tanti altri articoli sulle connessioni tra teorie di stringa e teoria dei numeri.

In questo lavoro vogliamo solo evidenziare bene il possibile contributo della teoria dei numeri, ed in modo particolare di alcuni settori sopra ricordati, ricordando che per i numeri primi sono coinvolte la funzione zeta di Riemann e relativa ipotesi (RH), ed i numeri primi naturali sono

connessi ai numeri di Fibonacci. Nei numeri di Fibonacci sono coinvolti il numero aureo e la sezione aurea; per le partizioni di numeri sono coinvolti alcuni multipli dei numeri di partizione,  $p(n)$ , più piccoli; infine, sono coinvolte anche le funzioni modulari di Ramanujan (vedi i vari lavori di uno di noi (Michele Nardelli), utilizzando spesso qualche utile contributo del Gruppo ERATOSTENE (Rif. 3), in particolare di Francesco Di Noto). Gli studi su tali connessioni tra l'algebra e la simmetria dei Gruppi di Lie e i suddetti settori della teoria dei numeri proseguiranno in futuro, in quanto molto interessanti ed utili per lo sviluppo della parte più matematica della fisica teorica, anche secondo il parere di alcuni specialisti di matematica e fisica teorica.

...

In un recente libro, "L'equazione impossibile" (BUR Ed.), Mario Livio scrive a pag. 281:

"Narra la Bibbia che, una volta lasciato l'Egitto, il popolo d'Israele fu condotto nel deserto dal Signore, che andava davanti a loro << di notte in una colonna di fuoco per far loro luce >>. La simmetria è stata la colonna di fuoco degli scienziati, li ha condotti verso la teoria della relatività generale e il Modello Standard. Può condurre anche ad una unificazione dei due?...Tutte le grandi idee a partire da quelle di Einstein sulla relatività ci insegnano che bisogna mettere la simmetria al primo posto"

Noi, con questo lavoro, vogliamo suggerire agli studiosi di mettere la Teoria dei Numeri (ed in modo particolare quei settori sopra indicati) al secondo posto, viste le numerose e profonde connessioni già scoperte e ancora da approfondire, e altre ancora da scoprire. Facciamo qualche esempio:

- 1) i numeri di dimensioni coinvolte nelle teorie di stringa bosonica sono 26, di cui 16 compattate, e ne rimangono 10; ora, dividendo questi numeri per due, otteniamo rispettivamente 13, 8 e 5, tutti e tre numeri consecutivi di Fibonacci, sebbene in ordine inverso, ma  $5 + 8 = 13$ , essendo consecutivi (ogni numero di Fibonacci è la somma dei due numeri precedenti) e  $5 + 8 + 13 = 26$  che è uguale al numero delle dimensioni; questa semplice constatazione è solo un caso?
- 2) Le stringhe vibrano con frequenze connesse ai numeri primi naturali, di forma  $6f + 1$  con  $f$  numeri di Fibonacci, (mentre i numeri primi normali sono di forma  $6n + 1$  con  $n$  numeri interi qualsiasi) e tali numeri primi naturali si ritrovano anche nei numeri della stabilità nucleare, nelle orbite dei pianeti, ecc..., come in una reazione a catena, che partirebbe proprio dalle stringhe. Noi sospettiamo che i numeri di Fibonacci diano in qualche modo (da soli o tramite i numeri primi naturali) stabilità e regolarità a vari fenomeni (a parte le considerazioni sull'eleganza e la bellezza di galassie, fiori, conchiglie, monumenti, ecc.).
- 3) Poiché le stringhe potrebbero vibrare con tutte le frequenze possibili, si prospettano i seguenti tre casi possibili (esposti nel lavoro "Numeri primi naturali materia oscura", vedi sito di cui sopra, rubrica "Non solo stringhe"):
  - a) i quark e le conseguenti particelle bosoniche e fermioniche che danno luogo alla materia visibile potrebbero essere dovute alle sole stringhe che vibrano con frequenze uguali ai numeri primi naturali;
  - b) la materia oscura sarebbe dovuta alle vibrazioni con frequenze uguali ai numeri primi normali;
  - c) l'energia oscura sarebbe dovuta infine alle vibrazioni con frequenza uguale ai numeri composti.Questa supposizione ci è venuta in mente constatando che, come detto nel suddetto articolo, le proporzioni di materia visibile (5%), di materia oscura (20%) e di energia oscura (75%) sono molto vicine, rispettivamente, alle proporzioni di numeri primi naturali, numeri primi normali e numeri composti. A causa delle regolarità e stabilità dovute ai numeri  $f$  di Fibonacci nei numeri primi naturali, le stringhe del caso a) producono particelle e forze (elettromagnetica, debole, forte e gravità) che poi originano il mondo visibile; mentre nel caso b) e c) si hanno particelle che interagiscono debolmente o per nulla con la materia visibile o tra di loro (da qui la

loro "invisibilità"), e sono soggette solo alla forza di gravità, e quindi solo indirettamente, e tramite osservazioni astronomiche sui loro effetti sulla forza di gravità, si possono individuare grandi zone, attorno alle galassie visibili, con presenza di materia o energia oscura, creata insieme alla materia visibile, ma non interagente con essa, non essendo soggetta alle altre tre forze oltre la gravità. Anche questa similitudine tra le percentuali di materia visibile, materia oscura ed energia oscura con le percentuali di numeri primi naturali, numeri primi normali e numeri composti, sarebbe solo un caso, considerato che la materia visibile sarebbe dovuta alle sole stringhe vibranti con frequenze uguali ai numeri primi naturali? Come studiosi, non crediamo molto al caso e alle coincidenze. Ma per il momento fermiamoci qui, lasciando per ora ad altri uomini di cultura la conferma o la confutazione di tali nostre ipotesi. Qui ci interessa, soprattutto per le ulteriori ricerche sulle teorie di stringhe, affiancare al concetto di simmetria, sia pure molto importante, il contributo di alcuni concetti della teoria dei numeri, ed in modo particolare i numeri primi, i numeri di Fibonacci, e le partizioni, come altri pilastri (oltre alla simmetria) sui cui poggia il mondo dell'infinitamente piccolo. Quando questi pilastri sono più deboli o non ci sono affatto, ecco gli altri "mondi", fatti di sola materia o energia oscura, da sole o anche insieme tra loro.

Nota 1 – Schema grafico della convergenza finale tra Algebra e Teoria dei Numeri verso i Numeri Primi Naturali:



Si ricorda J. Derbyshire, “L’ossessione dei numeri primi”, pag 327:

“...non sorprende che la teoria pura dei numeri – i concetti che riguardano i numeri naturali e le loro relazioni reciproche, - debba avere attinenza con la fisica subatomica. La fisica quantistica ha una componente aritmetica molto più forte rispetto alla fisica classica, poiché dipende dall’idea che materia ed energia non siano infinitamente divisibili. L’energia si presenta in forma di 1, 2, 3, o 4 quanti, ma non come  $1 + 1/2$ ,  $2 + 17/32$ ,  $\sqrt{2}$  o  $\pi$  quanti...”

Nelle pagine successive parla dei numeri p-adici basati sui numeri primi (interi) e sugli adeli (strutture algebriche anch’esse basate sui numeri p-adici e quindi anche sui numeri primi, e sia i numeri p-adici che gli adeli hanno un loro ruolo nella fisica quantistica, nelle teorie sulla gravità ecc.) .

Ricordiamo cosa scrive Marcus Du Sautoy nel suo libro “L’enigma dei numeri primi” (Rizzoli) a pag . 261:

“... (le partizioni) Sono numeri che spuntano nel mondo fisico quasi con la stessa frequenza dei numeri di Fibonacci. Per esempio, dedurre la densità dei livelli energetici in certi sistemi quantistici semplici si riduce a comprendere meglio il modo in cui cresce il numero delle partizioni”

Ecco quindi come dalla Teoria dei Numeri, in particolare da numeri primi, serie di Fibonacci e partizioni, tutti numeri interi e rappresentabili con curve logaritmiche, possono scaturire conseguenze per la fisica quantistica e le teorie di stringa, incontrandosi con l’importante principio di simmetria (concetto della Teoria algebrica) nel punto in cui si trovano i numeri primi naturali, come fattori privilegiati (rispetto ai numeri primi normali) del numero di elementi di un gruppo algebrico finito sporadico, vedi per esempio il gruppo di E8, sul quale si basa la simmetria E8 x E8 relativa alle stringhe eterotiche. Accanto al principio di simmetria, quindi, anche la Teoria dei Numeri reclama il suo giusto posto, sia nel Modello Standard sia nelle Teorie di stringa, utili alle attuali e future ricerche sull’unificazione di forze e particelle (teorie GUT, di grande unificazione, con lo scopo di unificare finalmente anche la gravità alle altre tre forze fondamentali)

Ma anche la Fisica quantistica e le Matrici sono collegabili ai numeri primi e alla funzione zeta, come nello schema precedente.

A supporto di quanto sopra, riportiamo qualche brano dal libro di Marcus du Sautoy “L’enigma dei numeri primi” pag. 519:

“... La nuova svolta impressa da Berry potrebbe portare ad un’unificazione di tre grandi temi scientifici: la fisica quantistica ( la fisica dell’estremamente piccolo), il caos (la matematica dell’impredicibilità) e i numeri primi (gli atomi dell’aritmetica). Forse, tutto considerato, l’ordine che Riemann aveva sperato di scoprire nei numeri primi è descritto dal caos quantistico. Ancora una volta i numeri primi ribadiscono il loro carattere enigmatico. L’apparente legame fra la distribuzione statistica degli zeri e quella dei livelli energetici ha convinto molti fisici a prendere parte alla ricerca di una dimostrazione dell’ipotesi di Riemann. All’origine degli zeri potrebbero esserci proprio le frequenze di un tamburo matematico; se così fosse, i fisici quantistici risulterebbero essere i meglio equipaggiati per individuare quei tamburi. Le loro stesse esistenze vibrano al suono di quei tamburi.

Anche se abbiamo tutte queste prove del fatto che gli zeri di Riemann sono vibrazioni, tuttavia non sappiamo che cosa sia a vibrare (le stringhe? N.d.A.A.) Può darsi che la fonte della vibrazione sia puramente matematica, senza alcun modello fisico. E’ vero che la matematica che spiega gli zeri potrebbe essere la stessa matematica del caos quantistico, ma questo non significa che una soluzione avrà necessariamente una manifestazione fisica. Berry non la pensa così. Secondo lui, una

volta che la matematica sarà stata definita completamente, emergerà un corrispondente modello fisico i cui livelli energetici rispecchieranno gli zeri di Riemann. << Non ho alcun dubbio che quando qualcuno avrà trovato l'origine degli zeri, quel qualcuno realizzerà il modello fisico. >> Non è possibile che quel modello esista già, nascosto da qualche parte dell'universo, in attesa di essere scoperto?"

E anche un brano dal libro di J. Derbyshire "L'ossessione dei numeri primi" (Bollati Boringhieri), pag. 335:

"... Questo è il genere di spazio che Alain Connes ha costruito per il suo operatore di Riemann, uno spazio adelico. Poiché è adelico, incorpora in sé i numeri primi, per così dire. Gli operatori che agiscono su questo spazio sono necessariamente basati sui numeri primi. Ora potete, spero, vedere come si può costruire un operatore di Riemann i cui autovalori sono proprio gli zeri non banali della funzione zeta, e il cui spazio (lo spazio sul quale opera) abbia incorporati i numeri primi (vedi connessioni con i Gruppi simmetrici di Lie e i numeri primi N.d.A.A.)". E ancora: "In un certo senso è vero, e la costruzione di Connes è brillante e davvero molto elegante, con i livelli di energia che sono proprio gli zeri di zeta sulla retta critica. Purtroppo, finora non ha fornito alcun indizio circa il perché non potrebbero esistere zeri di zeta fuori dalla retta critica!"

Forse la spiegazione risiede nel fatto che:

- a) Tutti gli autovalori di una matrice hermitiana sono numeri reali, e non numeri immaginari;
- b) Tutti i livelli energetici debbono essere espressi da numeri reali (e non da numeri immaginari, cosa che le leggi della fisica quantistica vietano), inoltre, b) potrebbe essere benissimo una conseguenza di a)
- c) Poiché le stringhe, alla base della fisica quantistica (stringhe –quark- bosoni (forze) – fermioni – atomi (materia)), vibrano con frequenze esprimibili con numeri primi, a) e b) sarebbero dirette conseguenze di c). Ecco quindi come i numeri primi, normali o naturali (connessi ai numeri di Fibonacci  $f$  - tramite la loro forma  $6f+1$ , come già accennato all'inizio) che fossero, si ritrovano poi a cascata su tutti i fenomeni fisici (e non) sottostanti: quantistici, nucleari (stabilità di alcuni elementi chimici), astronomici (orbite dei pianeti), persino biologici (degenerazione del DNA legata ai numeri p-adici e quindi anche ai numeri primi) ecc. ecc. Vedi il nostro lavoro (Rif. 1): "I numeri primi in natura : fisica quantistica, fisica nucleare, biochimica, genomica , psicologia" nel quale sono citati, tra gli altri, i lavori di B. Dragovich and A. Dragovich "p-Adic Modelling of the Genome and the Genetic Code" e "p-Adic Degeneracy of the Genetic Code", il primo dei quali reperibile sul sito indicato dell'Università inglese di Exeter (Rif. 2)

Rif. 1 <http://xoomer.alice.it/stringtheory>

Rif.2 <http://www.secamlocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/physics.htm>

Rif.3 <http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu>