Block Notes Matematico

La congettura di Collatz in N

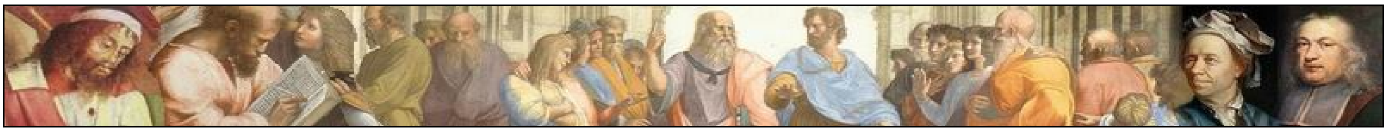
ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

Sommario

Gli autori presentato un problema mai risolto negli ultimi 60 anni, ovvero le congettura di Collatz o “problema del 3n+1”, esaminandone i vari aspetti e le possibilità di dimostrazione.

Email

mailto:rosario_turco@virgilio.it



INDEX

FIGURES

TABLES

Congettura di Collatz: Successione oscillante Pari – Dispari

Il problema posto da Collatz è ricordato in tanti modi: problema di Collatz, problema di Siracusa, problema di Ulam, problema di Kakutani, algoritmo di Hasse, congettura di Thwaites.

Sono sessanta anni da quando è stato formulato: supponiamo di scegliere un numero n che chiamiamo "seme" di partenza. Se n è pari lo dividiamo per 2 finché il risultato è sempre pari.

Se, invece, il risultato n esce dispari lo moltiplichiamo per 3 e aggiungiamo 1 (ovvero applichiamo la formula 3n+1). In realtà una successione è una applicazione (o funzione) del tipo **f: N -> N.** In particolare la funzione f in gioco è del tipo:

$$\textbf{(a)} \quad f(n) = \begin{cases} 3n+1, & se\ n\ dispari \\ n/2, & se\ n\ pari \end{cases}$$

La successione oscillante dei numeri, ottenuta a partire dal seme di partenza dalla (a), per alcuni semi converge rapidamente a 1, per altri semi non rapidamente. I numeri ottenuti nella successione sono ricordati come "numeri di Hailstone".

La rapidità di convergenza (il numero di passi) della successione al valore 1 non dipende dalla grandezza del seme di partenza. Ad esempio il seme 10000 converge a 1 con meno passi del seme 27.

Difatti ci si rende conto, invece, che la rapidità di convergenza dipende dalla quantità dei suoi divisori 2 o equivalentemente se il seme è una potenza di 2; quindi è un problema di fattorizzazione, anche se l'unico fattore importante in gioco è il 2.

In altri termini dipende dal fatto se il seme di partenza inserito in 3n+1 dà un risultato pari parecchie volte consecutive (per questo le potenze di 2 sono avvantaggiate). Alcuni numeri attraverso 3n+1 hanno la fortuna di agganciarsi a potenze di 2: ad esempio 85 facilmente si aggancia a 256.

E’ vera la seguente proposizione sulla “successione oscillante pari - dispari” (**R. Turco**):

La successione oscillante pari - dispari ottenuta dalla applicazione f: N -> N, dove:

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1, \; se\ n\ dispari \\ n/2, \; se\ n\ pari \end{cases}$$

gode delle seguenti proprietà:

1. La successione oscillante converge sempre al numero intero 1 (questo se escludiamo l’1 dai dispari, altrimenti la successione oscilla all’infinito tra 4,2,1);
2. Se il numero intero n è pari e potenza di 2, cioè $n = 2^k$ allora la successione oscillante associata alla f(n) converge al numero intero 1 in k passi;
3. Se il numero intero n è dispari ed esprimibile come $n = (2^k -1)/3$ con k pari e k >2 (numeri di Collatz), allora converge ad 1 con k+1 passi;
4. Se il numero intero n è dispari ed esprimibile come prodotto di fattori del tipo $n=m*2^t$, allora m è dispari e se $m =(2^k -1)/ 3$, con k pari, allora converge a 1 in t + (k+1) passi; la cosa è estendibile anche se $n=m*v*...*2^t$ e in tal caso il numero di passi aumenta, in dipendenza dai fattori dispari che non sono riconducibili ad un numero di Collatz;
5. Se il numero n non rientra nelle categorie di cui sopra, il numero di passi ad esso necessari per la convergenza a 1 è superiore al numero di passi necessari al numero “potenza di 2” immediatamente vicino al seme (superiore o inferiore)
6. Se chiamiamo T(n) la **Glide** o la traiettoria o il numero di passi della successione affinché arrivi a 1, si osserva che: $\forall$n dispari è T(4n+1) = T(n) + 2

I numeri n dispari tali che: $n = (2^k -1)/3$ con k pari e n dispari sono i “*numeri di Collatz*”. E’ vera anche la seguente proposizione “*I numeri di Collatz sono infiniti*”. Questo semplicemente perché con k pari si possono generare infiniti numeri dispari con la forma $n = (2^k -1)/3$.

Si osserva che essi su un intervallo molto ampio di numeri dispari, ad esempio da 3 a 3,66504E+11 (escluso l’1), sono pochi. Nell’esempio dell’intervallo solo 19 (vedi tabella).

espon.	numeri Collatz
2	1
4	5
6	21
8	85
10	341
12	1365
14	5461
16	21845
18	87381
20	349525
22	1398101
24	5592405
26	22369621
30	357913941
32	1431655765
34	5726623061
36	22906492245
38	91625968981
40	3,66504E+11

Tabella 1 – Numeri di Collatz

La probabilità ci può aiutare a dare subito una prima spiegazione della proprietà 1. Se n è pari, n/2 può essere un risultato pari o dispari (2 possibilità su 3). Se n è dispari, 3n+1 è pari (1 possibilità su 3). Per cui la probabilità che i valori della successione crescano è minore di quella che i valori diminuiscono verso 1; per cui la successione alla fine ha più probabilità di convergere a 1. Questo non dimostra però che la successione non diverge o se non converge o se non è oscillante.

Le altre proprietà sono una conseguenza diretta della scomposizione in fattori e della forma 3n+1.

La **congettura debole di Collatz** afferma:"Nessun intero è divergente".

La **congettura forte di Collatz** afferma:"Tutti gli interi positivi sono convergenti".

Se si appurasse che ci possa essere un valore $n \neq 1$ per cui la successione è ciclica, allora sarebbe vera solo la congettura debole. Se non esiste nessun contro-esempio allora valgono sia congettura debole che quella forte.

L'immaginario di Collatz (R. Turco)
Nell'*immaginario di Collatz* la successione di numeri, prodotta dalla f(n) precedente, si può pensare come ad un aquilone che viene lanciato ad una quota pari al seme(condizione iniziale); che l'aquilone vola ad una quota massima (massimo valore della successione) e scende poi al suolo (l'1 dell'immaginario di Collatz) dopo un certo numero di passi. Nell'immaginario il numero di passi o glide è anche il numero di passi minimo necessario nell'economia del sistema aquilone-ambiente. I numeri di Collatz, in questo immaginario, rappresentano dei risucchi d'aria, dei "tornado" che portano a terra velocemente l'aquilone; rappresentano dei "catalizzatori numerici" del problema di Collatz.

Da questo immaginario discendono varie cose su cui indagare:

- dato un seme (una quota di partenza dell'aquilone) si può prevedere il massimo valore (la massima quota) a cui arriva la successione?
- Dato un seme si può determinare il numero di passi totali?

Inoltre, più in generale, dato un seme (o condizione iniziale) la successione (la traiettoria dell'aquilone) diverge, converge o oscilla (è ciclica)? dipende dal seme?

Esistono fenomeni oscillanti (smorzati) in natura che si comportano come la successione di Collatz?

In realtà la f(n) esprime un "sistema dinamico discreto (SDD) con una equazione alle differenze" (di primo grado nel caso particolare):

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

dove t=0,1,... e x è una successione definita in modo ricorsivo.

Esempi:
<u>Proprietà 1</u>

In questo lavoro è ancora da dimostrare, la probabilità da sola non è certo sufficiente. I quesiti che ci si pone a questo punto sono:

- Esiste un contro-esempio di divergenza o di ciclicità?
- Si può dimostrare che un numero collassa sempre in un numero di Collatz?
- E' possibile dimostrarlo matematicamente e non solo verificarlo numericamente?
- Esiste un legame col piano complesso?

Se questi sono quesiti circa la dimostrazione, molti altri quesiti sono quelli posti precedentemente nel lavoro.

Attualmente la "matematica ufficiale" è ferma; mentre quella non ufficiale ferve con verifiche numeriche e proposte di dimostrazioni.

Il problema di Collatz tra l'altro, fa bella figura anche, tra i tanti problemi di *Alan Turing*, tra quelli teorici decisionali e di verifica di arrestabilità di un algoritmo a cui viene dato in input un dato uguale a N.

Conway, nel 1972, usando proprio come leva la teoria dei problemi decisionali degli algoritmi, ha cercato di dimostrare (vedi *Godel* e "L'incompletezza dei Teoremi" etc) che almeno formalmente la congettura è "indimostrabile" o "indecidibile".

Paul Erdős, grande matematico del secolo scorso ebbe a dire: "La matematica non è ancora pronta per problemi di questo tipo".

Il gruppo ERATOSTENE, nel lavoro sopra menzionato, ha introdotto <u>una interessante variante della congettura di Collatz</u> per i *numeri divisibili per potenze pari di 3*, basata su 4n+5 e introdotto i "numeri di Collatz".

<u>Proprietà 2</u>
$256=2^8$
256 converge a 1 in k passi, ovvero k=8.

<u>Proprietà 3</u>
$85= (2^8 -1)/3$
85 converge in 9 passi (difatti prima passa per 256) e i passi sono k+1=9, con k=8

Perché, nei numeri di Collatz, k deve essere pari?

Facciamo un esempio con k dispari: $512=2^9$, è evidente che non esiste nessun numero intero dispari ottenibile da $n = (2^9-1)/3$. Ecco perché k deve essere pari.

<u>Proprietà 4</u>
Un esempio di previsione del numero di passi:
$160=(2^4-1)/3 * 2^5$
160 converge in 10 passi; difatti (k+1) + t = (4+1) + 5 =10

<u>Proprietà 6</u>
n=7, T(7)=16
4*7+1=29, T(29)=16+2=18
4*29+1=117, T(117)=18+2=20
4*117+1=469, T(469)=20+2=22

Da qui si scopre che
469-1/4=117-1/4=29-1/4=7: 3 iterazioni per arrivare a 7
T(469)=16+2*3=22

<u>Proprietà 5</u>
seme x=7
Si ottiene la successione dei numeri:
7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1
 # passi: 16

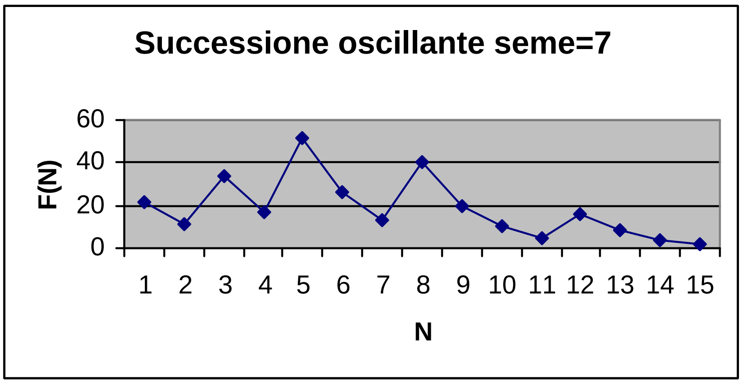


Figura 1 – successione oscillante

seme 8 (2^3)
8,4,2,1
passi: 3
Numero di pari: 3

seme x=27
27,82,41,124,62,31,94,47,142,71,214,107,322,161,484,242,121,364,182,91,274,
137,412,206,103,310,155,466,233,700,350,175,526,263,790,395,1186,593,1780,
890,445,1336,668,334,167,502,251,754,377,1132,566,283,850,425,1276,638,319,958,
479,1438,719,2158,1079,3238,1619,4858,2429,7288,3644,1822,911,2734,1367,4102,2051
,6154,3077,9232,4616,2308,1154,577,1732,866,433,1300,650,325,976,488,244,122,61,
184,92,46,23,70,35,106,53,160,80,40,20,10,5,16,8,4,2,1
 # passi: 111

seme x=33
33,100,50,25,76,38,19,58,29,88,44,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1
 # passi: 26

seme x=111
111,334,167,502,251,754,377,1132,566,283,850,425,1276,638,319,958,479,
1438,719,2158,1079,3238,1619,4858,2429,7288,3644,1822,911,2734,1367,4102,
2051,6154,3077,9232,4616,2308,1154,577,1732,866,433,1300,650,325,976,488,
244,122,61,184,92,46,23,70,35,106,53,160,80,40,20,10,5,16,8,4,2,1
 # passi: 69

seme x=10000
10000,5000,2500,1250,625,1876,938,469,1408,704,352,176,88,44,22,11,34,17,52,26,13,
40,20,10,5,16,8,4,2,1
 # passi: 29

Numeri negativi e cicli
Se includiamo anche i numeri negativi, allora esistono almeno 4 cicli:

- 4, 2 ,1
- -2, -1
- -5, -14, -7, -20, -10
- -17, -50, -25, -74, -37, -110, -55, -164, -82, -41, -122, -61, -182, -91, -272, -136, -68, -34

In appendice un algoritmo in C per il problema di Collatz.

Congettura di Collatz: si può dimostrare?

Ci proponiamo di comprendere se la successione ottenibile da:

$$\textbf{(1)} \quad f(n) = \begin{cases} 3n+1, \text{ se } n \text{ dispari} \\ n/2, \text{ se } n \text{ pari} \end{cases}$$

ha un numero di passi finito (f(n) converge a 1) oppure se è divergente o se è ciclica (o periodica).

I numeri della successione prodotta dalla (1) sono ricordati come "numeri di Hailstone".

Le ipotesi possibili sulla (3) sono, quindi, le seguenti:

(2)	$f^k(n)$	$= 1$	$\forall k,n$ (converge a 1)
(3)	$\lim_{k\to\infty} f(n)$	$= \infty$	(diverge)
(4)	$f^k(n)$	$\neq 1$	(con $f^k(n)$ periodica)

I numeri di una stessa successione di Collatz si possono definire "*C-equivalenti*"; in simboli dire che m è C-equivalente a n, si può rappresentare nel seguente modo $m \cong n$.

La C-equivalenza ci dà un semplice modo algoritmico per verificare se è possibile decidere che l'algoritmo s'arresta, cioè raggiunga l'Halt (l'arresto).

Il problema racchiuso dalla (2), della convergenza a 1, ha diversi punti da verificare come sotto-problemi:

- un qualunque seme di partenza, intero positivo, è C-equivalente ad un intero minore o maggiore?
- un seme di partenza, intero positivo nella successione di Collatz, farà sì che la successione sempre collasserà verso un numero intero esprimibile come potenza di 2 o ad un numero di Collatz?.
- il problema è formalmente decidibile o indecidibile?

Lemmi della C-equivalenza
Sono vere le seguenti proposizioni:

1. *Un numero pari è sempre C-equivalente ad un numero intero minore;*
2. *I numeri dispari del tipo* ***d1=4m+1*** *sono sempre C-equivalenti ad un numero minore (ovvero d1-m)*.

3. *I numeri dispari del tipo* ***d2=4m+3*** *sono C-equivalenti ad un numero minore o ad uno maggiore.*

Dimostrazione

Scegliendo un seme costituito da numero pari n=2m con m pari o dispari, esso è sempre C-equivalente ad un numero minore (m = n/2), quindi $n \cong m$ ovvero n è C-equivalente a m<n.

In generale per ottenere l'unione di tutti i numeri dispari, i dispari si possono suddividere in due insiemi espressi nelle forme:

- d1=**4m+1** per m=0,1,2,3... danno l'insieme {1,5,9,13, ...}.
- d2=**4m+3** per m=0,1,2,3... danno l'insieme {3,7,11,15, ...}.

Infatti preso il dispari d1 e posto nella formula richiesta da Collatz, è:

$$(5)\ 3m+1 \Rightarrow 3(4m+1)+1=12m+4 \cong 3m+1 \cong d1-m$$

Mentre è:

$(6)\ 3m+1 \Rightarrow 3(4m+3)+1=12m+10=6m+5 \cong 3(6m+5)+1=18m+16 \cong 9m+8$ cioè maggiore di d2.

I numeri di Collatz espressi da $(2^k -1)/3$ con k pari appartengono anch'essi ai numeri dispari della forma 4n+1. In particolare tutti i numeri dispari della forma 4n+1, compreso i numeri di Collatz, sono tali che n%4=1; cioè divisi per 4 danno resto 1. Per essi è facile trovare che **T(4n+1)=T(n)+2**. Infatti sono C-equivalenti.

Esempio
$85 = 2^8-1/3 = 4*21+1$
$45 = 4*11+1$

T(85)=T(21)+ 2 = 7+ 2 = 9
T(45)= T(11) + 2 = 14 + 2 = 16

La differenza tra un numero dispari di Collatz ed un numero dispari generico 4n+1 sta solo nella velocità dei passi; quello di Collatz fa qualcosa di meno.

Si deduce che i <u>numeri più "difficoltosi" sono soprattutto i dispari d2=4m+3</u> (ad esempio 47 converge solo dopo 104 passi). Tali numeri sono tali che n%4=3; cioè divisi per 4 danno resto 3. Per essi il numero di passi è più alto ed occorre verificare se all'aumentare dei passi la successione non diverga.

La forma 4m+3

La successione che si ottiene da 4m+3 si può suddividere in almeno 4 parti, la cui unione ridà l'insieme ottenibile con la sola forma 4m+3:

(7) d21=16m+3
(8) d22=16m+7
(9) d23=16m+11
(10) d24=16m+15

d21

I numeri ottenibili da (7) sono l'insieme {3,19,35,...}. Da qui si deduce che:

$16m+3 \cong 3(16m+3) + 1 = 48m+10=24m+5 \cong 3(24m+5)+1=72m+16 \cong 9m+2$

Quindi i numeri del tipo d21 nella (7) sono C-equivalenti a numeri minori.

d22
I numeri ottenibili da (8) sono l'insieme {7,23,39,...}. Da qui si deduce che:

$16m+7 \cong 3(16m+7) + 1 = 48m+22 \cong 24m+11 \cong 3(24m+11)+1=72m+34 \cong 36m+17=4(9m+4)+1$

Ma $4(9m+4)+1$ è un numero dispari della forma d1 per cui d22 $\cong$ d1-m :

(11) $16m+7 \cong 4(9m+4)+1-(9m+4)=27m+13$

- **d22 con m dispari**
  Dalla (11) esce un numero pari; per cui dimezzandolo si ottiene un numero C-equivalente inferiore di quello iniziale.

- **d22 con m pari**
  Se m pari il numero dispari ottenuto è maggiore di quello di partenza, cioè C-equivalente ad un numero maggiore. Qui non possiamo dire con certezza se la successione per un dato valore non possa divergere o addirittura diventare ciclica.

d23
I numeri ottenibili da (9) sono l'insieme {11,27,43,...}. Si può dividere la (9) in due successioni:
(11) d23a=32m+11
(12) d23b=32m+27

Dalla (11) discende:

$3m+1=3(32m+11)+1=96m+34 \cong 48m+17 \cong 3(48m+17)+1=144m+52 \cong 36m+13$

Numero simile alla forma d1

$36m+13=36m+12+1=4(9m+3)+1$

Per cui dalla (5) è:

$4(9m+3)+1 \cong 4(9m+3)+1 - (9m+3)=27m+10$

Quindi con d23a si giunge ad un numero C-equivalente minore.

Dalla (12) discende:

$3m+1=3(32m+27)+1=96m+82 \cong 48m+41=48m+40+1=4(12m+10)+1 \cong$

$4(12m+10)+1-(12m+10)=36m+31=36m+28+3=4(9m+7)+3$

Siamo ritornati a forme 4m+3 i cui valori sono distribuiti tra le (7)(8)(9)(10).
Per cui con d23b non si può asserire la non divergenza o ciclicità.

d24
I numeri ottenibili da (10) sono l'insieme {15,31,47,...}. Da qui si deduce che:

$3m+1=3(16m+15)+1=48m+46 \cong 24m+23$

Il numero ottenuto è C-equivalente maggiore di (10), inoltre è ancora della forma: 4(6m+5)+3; per cui siamo ritornati a forme 4m+3 i cui valori sono distribuiti tra le (7)(8)(9)(10).

Quindi con d24 non si può asserire la non divergenza o ciclicità.

Conclusioni
Per taluni interi positivi dispari il problema, almeno formalmente, è un problema indecidibile (mancano soprattutto gli strumenti matematici).

Non tutti i numeri di Hailstone possono collassare verso numeri potenza di 2 o a numeri di Collatz.

Intanto gli algoritmi si arrestano sempre a 1; mentre la ciclicità si è trovata solo per 4 situazioni: l'1 e dei valori negativi.

Riferimenti

- **J. C. Lagarias**: **"***The 3x+1 Problem: An annotated Bibliography***"**
- **C. A. Feinstein**: **"***The Collatz 3n+1 Conjecture is Unprovable*
- **Sergio Faccia** (blog Eureka! di kataweb http://serghej.blog.kataweb.it/) "Sul problema 3n+1 o di Collatz" del 14 Giugno 2006
- **Gruppo ERATOSTENE** - Vari articoli (tra cui "Dimostrazione della Congettura di Collatz - rivista METODO n. 22 - 2006") sul sito gruppo ERATOSTENE e su CNR Solar.

Sites

CNR SOLAR
http://150.146.3.132/

Prof. Matthew R. Watkins
http://www.secamlocal.ex.ac.uk

Aladdin's Lamp (eng. Rosario Turco)
www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 menu MISC section MATEMATICA

ERATOSTENE group
http://www.gruppoeratostene.com or http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu

Dr. Michele Nardelli
http://xoomer.alice.it/stringtheory/

Appendice informatica

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(int argc, char *argv[])
{
  int Num = 0;
  unsigned int passi = 0;
  unsigned int pari = 0;

  printf("\n*** Congettura di Collatz (3n+1) ***\n\n");

  do{

      printf("\nInserisci numero naturale positivo: ");
      scanf("%d",&Num);

      if( Num == 0 ) exit(0);

      printf("\nSeme: %d\n", Num);
      do
      {
         if( Num %2 == 0) {
         /* pari */
            Num = Num/2;
            pari++;
         }
         else{
            Num = Num * 3 + 1;

         }
         if( Num == 1 ){
           printf("%d", Num);
         }
         else
         {
           printf("%d,", Num);
         }
         passi++;

    }while(Num != 1);

    printf("\n\nNum. passi:\t %d\n", passi);
    printf("Num. pari:\t %d\n\n", pari);
    passi = 0;
    pari=0;

  }while(Num != 0);

  system("PAUSE");
  return 0;
}}
```