Block Notes Matematico

Il problema di Collatz
Le forme 4n+3 e i numeri dispari bizzarri

ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

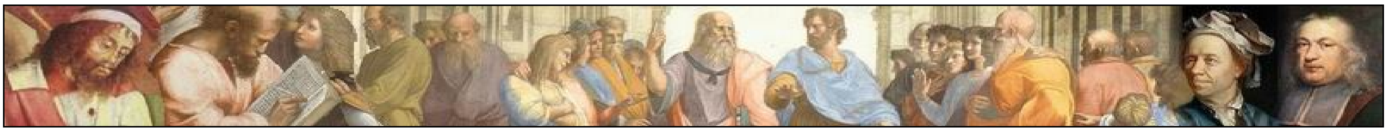
Sommario

Nel lavoro dal titolo “il problema di Collatz in N”, presente su CNR Solar, gli autori hanno usato il “*metodo della C-equivalenza*”, metodo non nuovo, per analizzare i dati di partenza dell’algoritmo per dedurre se si arrivasse ad una forma numerica convergente o, equivalentemente, ad un arresto dell’algoritmo. Con la “C-equivalenza” si osserva però che da una forma 4m+3 si può arrivare ad altre forme 4m+3; il che non dava spunti per dei criteri di arresto algoritmici.

Il presente lavoro, invece, è un approfondimento sulle forme 4m+3, dove gli autori dimostrano che non costituiscono un problema alla convergenza a 1 della successione, attraverso l’introduzione di numeri particolari, battezzati all’occasione come *numeri dispari bizzarri*.

Email

mailto:rosario_turco@virgilio.it



INDEX

TABLES

Introduzione

Nel problema di Collatz abbiamo la seguente definizione di algoritmo "*Dato un numero n intero positivo qualsiasi, se n è pari lo dividiamo per 2; se, invece, n è dispari lo moltiplichiamo per 3 e aggiungiamo 1 (ovvero applichiamo la formula 3n+1) e così via.*"

Il problema fondamentale è capire se la successione di valori ottenuti da tale algoritmo converge sempre a 1. Difatti sappiamo che una successione è una applicazione (o funzione) del tipo **f: N -> N.** In particolare la funzione f in gioco è del tipo:

$$\textbf{(a)} \quad f(n) = \begin{cases} 3n+1, & se\ n\ dispari \\ n/2, & se\ n\ pari \end{cases}$$

I numeri ottenuti nella successione sono ricordati come "numeri di Hailstone".

La **<u>congettura debole di Collatz</u>** afferma:"Nessun intero è divergente".

La **<u>congettura forte di Collatz</u>** afferma:"Tutti gli interi positivi sono convergenti".

Se si appurasse che ci possa essere un valore n≠1 per cui la successione è ciclica, allora sarebbe vera solo la congettura debole. Se non esiste nessun contro-esempio allora valgono sia congettura debole che quella forte e in tal caso sarebbe vero il *<u>teorema</u>* che: "Data la successione oscillante pari - dispari ottenuta dalla applicazione f: N -> N, dove:

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1, & se\ n\ dispari \\ n/2, & se\ n\ pari \end{cases}$$

La successione oscillante converge sempre al numero intero 1 (escludendo l'1 e i numeri dispari, altrimenti la successione oscilla all'infinito)".

Analisi del problema

Se fosse vero il teorema precedente, allora l'algoritmo proposto in APPENDICE si arresterebbe da solo, anche senza una condizione di arresto, che eviti il ciclare all'infinito.

Ma dall'analisi del tipo di dato in input N (seme della sequenza) si può arrivare a tale conclusione? Vediamo.

Definiamo T(n) la **glide** (traiettoria o numeri di passi della successione oscillante associata alla f(n) convergente al numero intero 1), allora sono vere le seguenti proprietà sulla "successione oscillante pari - dispari".

Proprietà delle "potenze di 2"
Se il numero intero n è pari e potenza di 2, cioè $n = 2^k$, allora la **Glide** T(n) è:

$$T(2^k) = k$$
$$T(2^{k+1}) = k+1$$

....

Proprietà dei "numeri di Collatz"
Se il numero intero n dispari è esprimibile come $n = (2^k - 1)/3$ con k pari e $k \geq 4$ (*numeri di Collatz*), allora la glide T(n) è:

$$T(n) = k+1$$

K deve essere pari altrimenti $n = (2^k - 1)/3$ non è intero. I numeri di Collatz sono di forma 4m+1.

Proprietà delle "forme 4m+1"
Per i numeri dispari di **forma 4m+1,** la glide è:

$$T(4n+1) = T(n) + 2$$

Proprietà delle "forme 4m+3"
Proponiamo di definire "*Numeri dispari bizzarri*" i numeri dispari generati come $(2^k-4)/4$ per ogni $k>4$ che nella sequenza di Collatz danno luogo a dispari di forma 4m+3 non consecutivi.

Se indichiamo col simbolo #b il numero di dispari 4m+3 non consecutivi generati dalla sequenza di Collatz con seme uguale ad un numero dispari bizzarro b, si nota che tale numero incrementa di 1 quello del numero bizzarro precedente b ',

$$\#b = \#b' + 1.$$

I numeri bizzarri, sono ricavabili anche come b=2b'+1 e se si accoppiano a due a due tutti i bizzarri, la glide di una coppia differisce solo di 1:

$$T(b) = T(b') + 1$$

Partendo con un numero bizzarro b la sequenza di Collatz dopo m=k-3 numeri di forma 4m+3, tali che Mod(b-3,4) = Mod(0,4), entra in un numero di forma 4q+1. Per cui la glide totale è:

$$T(b) = 2*(k-3) + T(4q+1)$$

Dimostrazione delle proprietà
La probabilità ci può aiutare a dare subito una prima intuizione del Teorema. Se n è pari, n/2 può essere un risultato pari o dispari (2 possibilità su 3). Se n è dispari, 3n+1 è pari (1 possibilità su 3). Per cui la probabilità che i valori della successione crescano è minore di quella che i valori diminuiscono verso 1; per cui la successione alla fine ha più probabilità di convergere a 1. Questo non dimostra però che la successione non diverge o se non converge o se non è oscillante.

Per le verifiche useremo il programma in APPENDICE senza criterio di arresto e con la dimostrazione delle proprietà stesse dimostreremo che non è mai necessario.

Proprietà delle potenze di 2

$256=2^8$
T(256)=8

Proprietà dei numeri di Collatz
$85= (2^8 -1)/3$
T(85)=k+1=8+1=9

Un numero di Collatz è $5 = 2^4-1/3$. Inoltre 5=4*1+1 (forma 4m+1).

Proprietà delle forme 4m+1
n=7, T(7)=16

4*7+1=29, T(29)=16+2=18

4*29+1=117, T(117)=18+2=20

4*117+1=469, T(469)=20+2=22

Da qui si scopre che
469-1/4=117-1/4=29-1/4=7: 3 iterazioni per arrivare a 7
T(469)=16+2*3=22

Proprietà delle forme 4m+3
Vediamo la tabella successiva che ci indica il numero bizzarro generato con $(2^k-4)/4$ ed il numero associato di dispari 4m+3 (compreso il bizzarro) prodotti consecutivamente dal problema di Collatz.

k	Bizzarro	#4m+3 consecutivi	T(n)
5	7	2	16
6	15	3	17
7	31	4	106
8	63	5	107
9	127	6	46
10	255	7	47
11	511	8	61
12	1023	9	62

Tabella 1 – Numeri bizzarri e problema di Collatz

La tabella mostra che per ogni k, pari o dispari appartenente a N:

- per passare da un numero bizzarro b al successivo è: b=2b'+1. Esempio se b'=7 b=2*7+1=15.
- Le fasce colorate in tabella 1 accoppiano i numeri bizzarri e si vede che la glide di una coppia differisce solo di 1.
- Nel passare da un bizzarro al successivo si aumenta di 1 il numero di forme 4m+3 consecutive ottenute nel problema di Collatz

- Il numero di passi in più, rispetto ad un numero di forma 4m+1, è dato da 2*(k-3); ad esempio k=10 è k-3=7 numeri bizzarri.

Per verificare rapidamente che esistono numeri successivi di forma 4m+3 generati in una sequenza di Collatz con PARI/GP si sfrutta Mod(n-3,4): se è uguale a Mod(0,4) allora è una forma 4m+3. Se è una forma 4m+1 si ottiene Mod(2,4) e si interrompe la consecutività ed il primo numero è di forma 4m+1.

Esempi di successione di Collatz con numeri bizzarri segnati in rosso (forme 4m+3 non consecutive) e la prima forma che si incontra 4m+1 sottolineata:

7 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1 #passi: 16

15 46 23 70 35 106 53 160 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1 #passi: 17

31 94 47 142 71 214 107 322 161 484 242 121 364 182 91 274 137 412 206 103 310 1
55 466 233 700 350 175 526 263 790 395 1186 593 1780 890 445 1336 668 334 167 50
2 251 754 377 1132 566 283 850 425 1276 638 319 958 479 1438 719 2158 1079 3238
1619 4858 2429 7288 3644 1822 911 2734 1367 4102 2051 6154 3077 9232 4616 2308 1
154 577 1732 866 433 1300 650 325 976 488 244 122 61 184 92 46 23 70 35 106 53 1
60 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1 #passi: 106

63 190 95 286 143 430 215 646 323 970 485 1456 728 364 182 91 274 137 412 206 10
3 310 155 466 233 700 350 175 526 263 790 395 1186 593 1780 890 445 1336 668 334
167 502 251 754 377 1132 566 283 850 425 1276 638 319 958 479 1438 719 2158 107
9 3238 1619 4858 2429 7288 3644 1822 911 2734 1367 4102 2051 6154 3077 9232 4616
2308 1154 577 1732 866 433 1300 650 325 976 488 244 122 61 184 92 46 23 70 35 1
06 53 160 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1 #passi: 107

Conclusioni
Quanto visto dimostra che non c’è possibilità di ciclare tra forme 4m+3 e che se aumenta la dimensione del numero bizzarro aumenta certamente il numero di passi ma si tratta pur sempre di un numero finito di passi.

Con questo si conclude che a partire da un qualsiasi intero n appartenente a N, la successione di Collatz terminerà sempre in un numero finito di passi ed ad un algoritmo non serve un criterio di arresto, perché il problema qualunque sia il dato di input N si arresta da solo e di conseguenza è vero il Teorema di partenza.

Riferimenti

- **J. C. Lagarias**: “*The 3x+1 Problem: An annotated Bibliography*“
- **C. A. Feinstein**: “*The Collatz 3n+1 Conjecture is Unprovable*
- **Sergio Faccia** (blog Eureka! di kataweb http://serghej.blog.kataweb.it/) “Sul problema 3n+1 o di Collatz” del 14 Giugno 2006
- **R. Turco, M. Colonnese** “Il problema di Collatz in N” CNR Solar
- **Gruppo ERATOSTENE** - Vari articoli (tra cui “Dimostrazione della Congettura di Collatz - rivista METODO n. 22 - 2006”) sul sito gruppo ERATOSTENE e su CNR Solar.

Siti

CNR SOLAR
http://150.146.3.132/

Prof. Matthew R. Watkins
http://www.secamlocal.ex.ac.uk

Aladdin's Lamp (eng. Rosario Turco)
www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 menu MISC section MATEMATICA

ERATOSTENE group
http://www.gruppoeratostene.com or http://www.gruppoeratostene.netandgo.eu

Dr. Michele Nardelli
http://xoomer.alice.it/stringtheory/

Appendice informatica

```
/**********************************************************
* Collatz

* Rosario Turco

**********************************************************/
{printCollatz(n) = local (j, k, f);

 if( n<2 , error("printCollatz(n): You must insert an integer n>1"));

 print1(n, " ");

 j=0;
 k=0;
 f=0;

 while( n>1,

        f=0;
        if( n%2 != 0 & f==0, n=3*n+1; f=1;);
        if(n%2 == 0 & f==0, n=n/2; f=1;);
        j++;

        if( (n-1)%4 == 0, k++;);

        print1(n, " ");

      );
      print(" #passi: ", j, "\n");
      if( k>0, print("4m+3: ", k, "\n"););
}

{getCollatz(n) = local (j,f);

 if( n<2 , error("getCollatz(n): You must insert an integer n>1"));

 j=0;
 f=0;
 while( n>1,
```

```
        f=0;
        if( n%2 != 0 & f==0, n=3*n+1; f=1;);
        if(n%2 == 0 & f==0, n=n/2; f=1;);

        j++;
      );
      return(j);
}
```