DAI NUMERI PRIMI ALLE

TEORIE DI STRINGA

(Un ponte tra Numeri e Fisica, tramite i Numeri Primi Supersingolari e di Fibonacci)

Francesco Di Noto e Michele Nardelli[1,2]

[1] Dipartimento di Scienze della Terra
Università degli Studi di Napoli Federico II, Largo S. Marcellino, 10
80138 Napoli, Italy

[2] Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli "Federico II" – Polo delle Scienze e delle Tecnologie
Monte S. Angelo, Via Cintia (Fuorigrotta), 80126 Napoli, Italy

Riassunto

In questo lavoro vedremo come dalle forme generatrici di numeri primi P =6k$\pm$1 si può arrivare ai numeri primi supersingolari, legati sia alle curve ellittiche sia ai gruppi di Lie, a loro volta legati alle simmetrie ed al Modello Standard della fisica.

In questo percorso si incontrano, nell'ordine, i numeri primi di Chen, i numeri primi gemelli, i numeri primi naturali e per concludere anche i numeri di Fibonacci.

Introduzione

Le forme generatrici di numeri primi P = 6k±1, già scoperte dal famoso matematico svizzero Eulero, sono alla base di questo lavoro. I numeri primi così generati sono i cosiddetti numeri primi di Chen p = 6k -1 e p +2 = 6k +1; se essi sono entrambi primi, sono ovviamente anche primi gemelli, oppure solo uno di essi è primo.

Per esempio, per n = 3 abbiamo p = 6 x 3 -1 = 17 e p +2 = 6 x 3+1 = 19, con 17 e 19 entrambi primi e quindi gemelli; mentre per n = 4, p = 6 x 4 -1 = 23 e p +2 = 6 x 4 + 1 = 25 composto. Un sottoinsieme dei numeri di Chen è quello dei numeri supersingolari. Questi sono connessi alle curve ellittiche ed ai gruppi di Lie (sono infatti fattori primi del loro ordine, o numero di dimensione). Poiché tali numeri supersingolari sono in tutto quindici, vediamo come si generano i numeri primi in generale e di Chen in particolare (e quindi anche i numeri primi supersingolari) fino a N = 101:

Scrivendo su due colonne i numeri di forma 6k -1 e i numeri di forma 6k +1 (due colonne particolari delle forme 6k'+2, 6k'+3, 6k'+4, 6k'+5, 6k -1, 6k e 6k +1 che contengono tutti i numeri), e quindi per k fino a 17, poiché 6 x 17 -1 = 102 -1 = 101, avremo 34 numeri tra primi e composti; eliminando questi ultimi, rimarranno 34 – 9 = 25 numeri primi (di cui 24 fino a 100):

k			6k -1	6k+1	
0	2	3			
1			5	7	gemelli
2			11	13	gemelli
3			17	19	gemelli
4			23	25	
5			29	31	gemelli
6			35	37	
7			41	43	gemelli
8			47	49	
9			53	55	
10			59	61	gemelli
11			65	67	
12			71	73	gemelli
13			77	79	
14			83	85	
15			89	91	
16			95	97	
17			101	103	
…			…	…	

I numeri composti sono diminuiti e di fatto eliminati, mentre i 21 numeri primi di Chen sono sottolineati, e sono 21 su un totale di 26 (i numeri primi 43, 61, 73, 79 e 97 non sono numeri primi di Chen).

I numeri primi di Chen sono quindi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53, 59, 67, 71, 83, 89 e 101

Da questo sottoinsieme (21) dei 26 numeri primi fino a 101, togliamo i 15 numeri primi supersingolari, così chiamati dalla omonima voce di Wikipedia:

“ Se E è una curva ellittica definita sui numeri razionali, allora un primo p è supersingolare per E se la riduzione di E modulo p è una curva ellittica supersingolare nel campo residuo Fp. Più in generale, se K è un qualsiasi campo globale, cioè un’estensione finita o di Q o di $F_p(t)$, ed A è una varietà abeliana definita su k, allora un primo supersingolare p per A è un posto finito di K tale che la riduzione di A modulo p è una varietà abeliana supersingolare. Alternativamente, il termine primo supersingolare è usato per un divisore primo dell’ordine del Monster group M, il più grande dei gruppi eccezionali semplici. Ma in questo caso ci sono precisamene 15 primi supersingolari (Nota 1, N.d.A.A.) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59 e 71

(Sequenza OESIS A002267) “

(mancano i numeri primi 37, 43, 53 , 61, 67, che non sono numeri primi naturali, seppure anche 41, 59 e 71 non lo sono; ma nove su tredici, cioè escludendo il 2 e il 3 dai 15 in tutto, lo sono, quindi una buona maggioranza)

Questi 15 numeri primi supersingolari, come abbiamo visto, sono anche parte dei 21 numeri primi di Chen, a loro volta sottoinsieme dei 26 numeri primi fino a 101. Avremo modo di ritornare in seguito su questo punto.

La suddetta definizione di numeri supersingolari fa riferimento ad una curva ellittica E e ad una varietà abeliana, cioè ad una struttura algebrica come un gruppo (come un gruppo abeliano); un altro riferimento

simile è sulla rivista "Archimede" (aprile-giugno 2006), pag. 181:

"Le curve ellittiche sono curve i cui punti a coordinate in un campo finito possiedono una struttura di gruppo abeliano, e il teorema di Morden-Weil afferma che tale gruppo, nel caso dei punti a coordinate in un campo di numeri, è finitamente generato".

Da queste due citazioni, si evince che i gruppi (abeliani) di Lie sono connessi, (Monster group compreso) alle curve ellittiche, e quindi anche alle curve ellittiche ed ai numeri primi supersingolari come fattori dell'ordine dei gruppi di Lie, solo nel Monster group essi sono tutti e 15 come fattori del loro ordine (numero di dimensione), mentre negli altri gruppi di Lie più piccoli ne risultano di meno.

Tra i numeri primi supersingolari notiamo anche cinque coppie di numeri primi gemelli e sette numeri primi naturali, di forma $6f \pm 1$ con f numeri di Fibonacci , anziché di forma $6k \pm 1$ con k numero naturale come nei numeri primi normali; i numeri primi naturali sono connessi alle vibrazioni delle stringhe (vedi Nota 2 sulla possibile relazione tra vibrazioni di stringhe, numeri primi di Chen e numeri primi naturali).

I numeri primi supersingolari sono anche fattori, sebbene in misura minore, degli ordini degli altri gruppi di Lie più piccoli, oltre che del Monster group (il cosiddetto "mostro"), dove figurano tutti e 15;
per esempio, per i primi cinque gruppi di Lie, abbiamo:

14 = $\underline{2}$ x $\underline{7}$

52 = $\underline{2}$ x $\underline{2}$ x $\underline{13}$ = $\underline{2}^2$ x $\underline{13}$

78 = $\underline{2}$ x $\underline{3}$ x $\underline{13}$

133 = $\underline{7}$ x $\underline{19}$

248 = $\underline{2}$ x $\underline{2}$ x $\underline{2}$ x $\underline{31}$

… … … … …

con 2, 3, 7, 13, 19 e 31 tutti numeri primi supersingolari (con la particolarità che 7, 13, 19 e 31 sono tutti di forma 6k +1, che sembra essere quella preferita dai gruppi minori, oltre che 7,13, 19 e 31 sono anche numeri primi naturali, visto che i numeri k 1, 2, 3 e 5 sono anche numeri f di Fibonacci, sui quali ritorneremo in seguito.)

Per gli altri gruppi più grandi si veda il nostro precedente articolo "I gruppi di Lie e la simmetria in fisica e in matematica" (già su questo sito), dove tutti gli altri gruppi sono fattorizzati in relazione ai numeri primi naturali. Ora possiamo rivederli anche alla luce dei numeri primi supersingolari.

Inoltre, l'ordine L_m di tutti i vari gruppi di Lie è anche la somma

$$L_m = k \cdot n! + k' \cdot f$$

(vedi Nota 5) che connette (un multiplo di fattoriale più un multiplo di Fibonacci) i fattoriali (collegati alle permutazioni e quindi alle simmetrie dei gruppi di permutazioni), con i numeri *f* di Fibonacci, che spuntano spesso anche in altri lavori sulle teorie di stringa.

Per esempio:

L_m		k		n!		k'		*f*
14	=	2	x	3!	+	1	x	*2*
52	=	2	x	4!	+	2	x	*2*
78	=	3	x	4!	+	2	x	*3*
248	=	2	x	5!	+	1	x	*8*
7920	=	1	x	7!	+	20	x	*144*
…				…		…		…

(vedi altra nota finale più completa)

Abbiamo ora i seguenti gruppi di numeri:

26 numeri primi da 2 a 101 di cui:
21 numeri primi di Chen:
15 numeri primi supersingolari;
9 numeri primi naturali;
5 coppie di numeri primi gemelli;
4 coppie di gemelli di forma 6f $\pm$1 e 6k$\pm$1, tranne cioè la sola coppia di gemelli 3 e 5.

Con i seguenti rapporti progressivi, vicini al numero aureo $\Phi = 1{,}618$ o a sue potenze o radici quadrate:

$26/21 = 1{,}23 \approx 1{,}27 = \sqrt{\Phi}$

$26/15 = 1{,}73 \approx \Phi \times \sqrt[8]{\Phi} \approx 1{,}618 \times 1{,}06 = 1{,}71$

$26/9 = 2{,}88 = 1{,}69\text{^}2 = \Phi\text{^}2 = 2{,}61$

$26/5 = 5{,}2 = 1{,}51\text{^}4 \approx \Phi\text{^}4 = 1{,}618\text{^}4 = 6{,}85$

$26/4 = 6{,}5 = 1{,}59\text{^}4 \approx \Phi\text{^}4 = 6{,}85$

$21/15 = 1{,}4 \approx 1{,}618 = \Phi$

$21/9 = 2{,}33 \approx 1{,}52\text{^}2 \approx \Phi\text{^}2 = 2{,}61$

$21/5 = 4{,}2 = 1{,}43\text{^}4 \approx \Phi\text{^}3 = 4{,}23$

$21/4 = 5{,}25 = 1{,}53\text{^}4 \approx \Phi\text{^}3{,}5 = 5{,}38$

$15/9 = 1{,}666 \approx \Phi = 1{,}618$

$15/4 = 3{,}75 = 1{,}94\text{^}2 \approx \Phi\text{^}2{,}5 \times \sqrt[4]{\Phi} = 3{,}75$

$9/5 = 1{,}8 \approx 1{,}618 = \Phi$

$9/4 = 2{,}25 = 1{,}5\text{^}2 \approx \Phi\text{^}2 = 2{,}61$

$5/4 = 1{,}25 \approx 1{,}27 = \sqrt{\Phi}$

Tutti rapporti molto vicini a potenze o radici di $1{,}618 = \Phi$, o loro combinazioni.

Inoltre, cosa ancora più importante, la suddetta serie 4, 5, 9, 15, 21, 26 dei numeri primi coinvolti in questo lavoro, è molto vicina alla serie di Fibonacci

serie di numeri primi	serie *f* di Fibonacci	differ.
4	*3*+*1*	+1
5	*5*	0
9	*8*+*1*	+1
15	*13*+*2*	+2
21	*21*	0
26	*27,5* (21+5)	+1,5

con 27,5 media aritmetica (*21* + *34*)/2 =27,5

La serie 4, 5, 9, 15, 21 e 26 corrisponde all'incirca anche al numero di dimensioni spazio - temporali coinvolte nelle teorie di stringa:

serie	serie di Fibonacci	differenza.	dimensioni coinvolte 2F
4	3	+1	6
5	5	0	10
9	8	+1	16
15	13	+2	26
21	21	0	(42)
26	27,5	+1,5 (21+5)	(52)

Sembra quindi proprio esserci una forte connessione tra tutti i numeri coinvolti (di Chen, primi naturali,

supersingolari) con la serie di Fibonacci, e quindi con il rapporto aureo Φ =1,618.

Accenniamo ora brevemente ai nove numeri primi naturali coinvolti, e di forma 6*f*±1:

f

5 = 6 x *1* - 1

7 = 6 x *1* +1

11 = 6 x *2* - 1

13 = 6 x *2* +1

17 = 6 x *3* -1

19 = 6 x *3* +1

29 = 6 x *5* -1

31 = 6 x *5* +1

47 = 6 x *8* -1

79 = 6 x 13 +1 mentre:

101 = 6 x *17* -1 con 17 media = (*13* + *21*)/2

103 =6 x *17* +1

… … …

quindi numeri primi seminaturali o quasi naturali, con f = 1, 2, 3, 5, 8, 13 numeri di Fibonacci. I nove numeri primi naturali che sono insieme numeri di Chen e numeri primi supersingolari sono sottolineati (come già detto, essi sono nove, su quindici numeri supersingolari, con rapporto 15/9 = 1,666 ≈ Φ=1,618).

Circa invece le coppie di numeri primi gemelli e supersingolari, esse sono quattro, e applicando loro la congettura di Goldbach (somma di due numeri primi = N pari), abbiamo:

p	q	12*f*		*f*
5 + 7 =		12 =	12 x	*1*
11 + 13 =		24 =	12 x	*2*
17 + 19 =		36 =	12 x	*3*
29 + 31 =		60 =	12 x	*5*

con *1, 2, 3 e 5* numeri di Fibonacci

mentre per il numero 47 abbiamo <u>47</u> + 49 = 96 = 12 x *8*, anche se la coppia 47 e 49 non è una coppia di numeri primi gemelli (solo 47 è primo, ed anche primo supersingolare); l'ultimo numero primo supesingolare, 71, fa parte della coppia di gemelli <u>71</u> e 73, con somma 144 = 12 x 12, con il secondo 12 non numero di Fibonacci, ma molto vicino a *13* numero di Fibonacci.
Quindi, anche la somma dei numeri gemelli supersingolari e la somma di numeri primi supersingolari p e p +2 (per p = 47 e 71) è un multiplo f di 12, il che connette Goldbach ai numeri primi supersingolari ed alla serie di Fibonacci.

Concludendo, abbiamo la connessione generale:

Numeri primi normali P, di forma 6k ± 1

↓

Numeri di Chen

↓

Numeri primi supersingolari (s.s.) → **curve ellittiche gruppi di Lie simmetrie**

↓ ↓

$L_m = k \cdot n! + k' \cdot f$

↓

Numeri primi naturali di forma 6f ± 1 → **Serie f di Fibonacci**

↓ ↑

Coppie di numeri primi gemelli supersingolari ↑

↓ ↑

Somme di Goldbach p + q = N = 12 x *f*), con q = p + 2 connessione generale eventualmente da approfondire meglio con prossimi lavori.

Riferimenti

1. “I gruppi di Lie e la simmetria in fisica e in matematica” sul sito del Dott. Nardelli (vedi nota 3)
2. “Fibonacci, primi e teorie di stringa”, idem
3. “Fibonacci, dimensioni, stringhe: nuove interessanti connessioni”, idem.

Note

Nota 1. Relazione tra numeri di Chen e quadrato magico. Da Wikipedia, “Numero primo di Chen:

“ Rudolf Ondreika (1928-2001) ha scoperto il seguente quadrato magico 3 x 3 di nove numeri di Chen:

17	**89**	**71**
113	**59**	**5**
47	**29**	**101”**

con somma costante 177 per ogni riga, colonna o diagonale, e con loro media aritmetica 177/3 = 59 = numero di Chen centrale.

Nota 2. Numeri supersingolari e stringhe

I numeri primi supersingolari sono chiaramente connessi anche alle frequenze di vibrazioni delle stringhe (oltre che con i numeri primi naturali)
Dal nostro precedente articolo " Fibonacci, primi e teorie di stringa" (Rif. 2.), pag. 5:

"2. Possibili relazioni matematiche tra teorie di stringa e serie di Fibonacci.
Nardelli ha provato a paragonare le frequenze emesse da una stringa alle frequenze emesse dalle note musicali. Ad ogni nota è cioè assegnata una ben determinata frequenza. Ogni frequenza è a sua volta, associata a ben determinati numeri primi. Le frequenze che vanno dal Do naturale al Si naturale sono:
262 Hz, 294 Hz, 330 Hz, 349 Hz, 392 Hz, 440 Hz, 494 Hz.
Scomponendo in fattori, i numeri primi che costituiscono tali frequenze sono:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 131 e 349 "

Di tali numeri da 2 a 131 sono numeri di Chen (ben otto su nove), mentre 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 19 sono anche numeri supersingolari (sette su nove, e sono sottolineati)), soltanto il numero 349 non è numero di Chen né numero primo supersingolare.
E poi ancora, a pag. 7:

" Dalle serie delle frequenze, compresi i semitoni, il Nardelli ricava la serie di numeri primi:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 31, 47, 59, 83, 131 e 233"

che sono tutti numeri primi di Chen, mentre i primi dieci (su quattordici) sono anche numeri primi supersingolari, e sottolineati. Quindi sono collegati ai fattori dei gruppi di Lie, con nuova connessione vibrazioni di stringhe→gruppi di Lie, con le loro permutazioni e simmetrie, e con la serie di Fibonacci, connessione già vista tramite i numeri primi naturali 5, 7, 11, 13, 19, 31, e 47 connessi alle frequenze di vibrazioni delle stringhe. I numeri supersingolari coinvolti nelle vibrazioni di stringhe sono quindi 10/15, con rapporto 15/10= 1,5 e con percentuale del 66%, significativamente superiore al 50% di una distribuzione puramente casuale.

Una relazione comune a tutti i tipi di numeri è quella con la serie di Fibonacci, in modo particolare con i numeri primi naturali, i numeri di dimensioni spazio - temporali D = 2F (vedi Rif.3) e la formula

$$L_m = k \cdot n! + k' \cdot f$$

con F ed *f* numeri di Fibonacci.

Brevemente, riportiamo la tabella sulla relazione D = 2F

D = 2 x F	
2	*1*
4 dimensioni universo attuale	*2*
6 dimensioni compattificate al Big-Bang	*3*
10 dimensioni al momento del Big bang	*5*
16 dimensioni stringhe bosoniche – quelle al momento del Big-Bang	8
26 dimensioni in cui vibrano le stringhe bosoniche	*13*

Da questa semplice ed originaria relazione tra numeri primi e numeri primi supersingolari, tramite i numeri primi di Chen, le coppie di primi gemelli, i numeri primo naturali, si possono ricavare tutte le altre relazioni tra curve ellittiche, gruppi di Lie, stringhe e loro vibrazioni, ecc. Il tutto anche in base alle forme aritmetiche dei vari tipi di numeri primi, che brevemente riepiloghiamo:

Numeri primi	forma aritmetica	note
Normali	$6k \pm 1$	k = num. naturale
Gemelli	$6k \pm 1$	k condiviso tra p e p +2
Naturali	$6f \pm 1$	f = num. Fibonacci
Di Chen	6k -1 tutti, 6k +1 non tutti	

Supersingolari di Chen , e fattori dei gruppi di Lie (sono in tutto 15, e tutti fattori del Monster group M,

il cosiddetto “mostro”ed in misura minore anche fattori dei gruppi di Lie più piccoli)

Una connessione ancora più generale che ne deriva è la seguente:

Teoria dei numeri (numeri primi, curve ellittiche, serie di Fibonacci)

↓

Algebra (gruppi abeliani di Lie e simmetrie)

↓

Fisica (Modello Standard e Teorie di Stringa)

Il “ponte” tra numeri e fisica è ora molto più chiaro.

Nota 3. Numeri primi di Chen (asteriscati) e supersingolari (sottolineati) coinvolti in alcuni fenomeni naturali

Tabella dei fenomeni e dei numeri s.s.coinvolti

Stabilità nucleare	Vibrazioni stringhe	Vibrazioni stringhe con semitoni	Orbite dei pianeti	Emissione biofotoni	Numeri primi supersingolari (s.s.)
(1)					
7	2	2	1	7	2
19	3	3	1	13	3
29	5	5	2	31	5
47	11	11	5	269*	7
83*	13	13	7		11
113*	19	19	11		13
127*	131*	31	17		17
181*	349*	37	29		19
293*		47	47		23
		59			29
		83*			31
		131*			41
		233*			47
					59
					71

Osservazioni : i numeri primi di Chen che non sono anche numeri primi supersingolari, sono sempre in fondo alle relative colonne, tranne il 37 nella terza colonna; come se il fenomeno interessato perda alla fine la “supersingolarità” dei suoi numeri, pur conservando la “primalità” dei numeri di Chen che lo riguardano.

Soltanto il 349 finale della seconda colonna è un numero primo normale, ma non di Chen e nemmeno supersingolare (unica eccezione alla regola che tutti i numeri primi coinvolti nei fenomeni considerati, sono

numeri primi supersingolari, oppure numeri primi di Chen) . Numeri primi supersingolari, o al massimo numeri primi di Chen, quindi, alla base di diversi fenomeni naturali, cosa molto importante, ed entrambi i due tipi di numeri sono un sottoinsieme dei numeri primi normali, come abbiamo già visto.

Ed a proposito della forma aritmetica 6k±1 dei numeri primi normali, sembra che i numeri di primi Chen ed i numeri primi supersingolari abbiano delle preferenze per la forma 6k -1:

sette numeri su undici delle vibrazioni di stringa sono di tale forma (vedi terza colonna);
cinque su sei nelle orbite dei pianeti;
nove su tredici nei numeri supersingolari
(in tutti i casi ovviamente escludendo i numeri 1, 2 e 3 che non sono di forma 6k ±1). Per i numeri primi supersingolari, 9 su 13 sono il 69,23 % del totale, una percentuale significativa e non dovuta al caso, che ne avrebbe fornito solo il 50%. La natura, quindi, preferisce, chissà perché, la forma 6k-1 dei numeri primi di Chen o supersingolari per i suoi fenomeni (quelli qui considerati potrebbero essere una piccola parte di quelli ancora sconosciuti e regolati da tali numeri). E' questa un'osservazione che potrebbe essere notata in futuro anche per altri fenomeni, ed infine sarà chiarito il perchè di questa evidente preferenza per tale forma aritmetica. Potrebbe essere collegata alla leggerissima preferenza di tutti i numeri primi normali per tale forma, già notata da Eulero, che però per i primi 24 numeri primi fino a 100, riguarda solo 13

numeri primi contro 12 della forma 6k+1, e quindi solo il 4 % del totale.

Nota 4 . Tabella più completa per la formula

$$Lm = k \cdot n! + k' \cdot f$$

(considerando tutti I possibili k)

Lm	=	k	·	n!	+	k'	·	*f*
14	=	1	x	3!	+	1	x	*8*
14	=	2	x	3!	+	1	x	*2*
52	=	1	x	4!	+	7	x	4 (= *2* x *2*)
52	=	2	x	4!	+	2	x	*2*
78	=	1	x	4!	+	18	x	*3*
78	=	2	x	4!	+	6	x	*5*
78	=	3	x	4!	+	2	x	*3*
248	=	1	x	5!	+	16	x	*8*
248	=	2	x	5!	+	1	x	*8*
7920	=	1	x	6!	+	900	x	*8*
7920	=	2	x	6!	+	810	x	*8*
7920	=	3	x	6!	+	40	x	*144*
7920	=	4	x	6!	+	35	x	*144*
7920	=	5	x	6!	+	30	x	*144*
7920	=	6	x	6!	+	25	x	*144*
7929	=	1	x	7!	+	20	x	*144*
175560	=	1	x	8!	+	6440	x	*21*

Metodo indiretto

I fattori di L_m – n! contengono numeri di Fibonacci

175560 - 8! = 175560 – 40320 = 135240 = 2^3 x 3 x 5 x 7^2 x 23

f* = *Fattori di fibonacci = 2,3,5, 8, 21 = 3 x 7.

175560 – 2 x 40320 = 175560-80640 = 94920 = 2^3 x3 x 5 x 7x 113

f = Fattori di Fibonacci = 2, 3 , 5, 8, 21

175560 – 3 x 40320 = 175560 – 120960 = 54600 = 2^3 x 3 x 5^2 x 7 x 13

f = fattori di Fibonacci = 2,3,5,8, 13,21

(ai precedenti si aggiunge ora anche il 13)

175560 - 4 x 40320 = 175560 - 161280 = 14280 = 2^3 x 3 x 5 x 7 x 17

F = fattori di Fibonacci = 2, 3, 5, 8, 21, 34 = 17 x 2

(ora manca il 13, ma si aggiunge il 34)

… … … … …

e così via anche per i gruppi di Lie più grandi: tra i fattori della differenza tra L_m ed il fattoriale precedente (o suoi piccoli multipli) , ci sono numeri di Fibonacci, sia diretti (2, 3, 5, 2^3 = 8) sia indiretti (3 x 7 = *21*, 17x 2= *34*) e cosi via (si troverà in seguito 5 x 11 = 55, ultimo numero di Fibonacci prima di 71, ultimo numero supersingolare)

Come si vede, tra i fattori = numeri di Fibonacci ci sono quasi sempre il numero 8, che è il numero dei modi di vibrazione di una superstringa, ed il 144 = 8 x 18 (o 12 x 12 e 24 x 6 dove 24 è il numero dei modi di

vibrazione di una stringa bosonica), con 18 media aritmetica tra 16 e 20, con 16 numero di dimensioni coinvolte nelle teorie di stringa (delle 26 dimensioni previste dalla teoria di stringa bosonica, 16 si compattano lasciandone 10, e la metà di tali numeri fornisce rispettivamente *13*, *8* e *5*, tutti numeri di Fibonacci secondo la nostra relazione D =2F già accennata).

Ma abbiamo anche 144 = $2^4 \times 3^2$ = 16 x 9, con 2 e 3 numeri di Fibonacci.

Tale relazione tra gruppi di simmetria (e quindi tra i fattoriali) ed i numeri di Fibonacci come fattori della differenza tra l'ordine dei gruppi di Lie e i fattoriali più piccoli di L_m, ossia di $L_m - k \cdot n!$, seppure a prima vista molto interessante, potrebbe essere approfondita in misura maggiotr in seguito, per confermare, anche sotto questo aspetto, il coinvolgimento dei numeri di Fibonacci nelle teorie di stringa (gli altri aspetti sono i numeri primi naturali, che ora sappiamo appartenere anche ai numeri di Chen ed anche ai numeri primi supersingolari, nove numeri primi naturali, ricordiamo, su quindici numeri primi supersingolari; e la relazione D = 2F; infine, i recenti articoli del Dott. Nardelli sulla sezione aurea coinvolta sempre più spesso nelle teorie di stringa, e già sul nostro sito e sul data base di Solar CNR). Per concludere, ci sono le basi per introdurre anche i numeri di Fibonacci , oltre ai numeri primi supersingolari, nelle teorie di stringa, stabilendo un nuovo ed interessante legame tra Teoria dei Numeri e Fisica.