Congettura di Levy

proposta di soluzione della congettura e ipotesi RH equivalente di Levy

ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese, Dr. Michele Nardelli, prof. Giovanni Di Maria, Francesco Di Noto, prof. Annarita Tulumello

Sommario

In questo lavoro presenteremo la congettura di Levy, evidenziando come essa non possa avere contro esempi $P_L(N) = 0$, così come avviene per la congettura forte di Goldbach G(N) = 0 e per quella debole T(N) = 0, alle quali la stessa congettura di Levy è strettamente collegata. Gli autori presentano poi vari Lemma e una proposta di dimostrazione della congettura di Levy e, infine, introducono e dimostrano un'ipotesi *equivalente RH* legata alla congettura di Levy che permette di considerare vera la formula asintodica di approssimazione per il calcolo delle coppie di Levy.

INTRODUZIONE

In vari lavori precedenti abbiamo collegato la congettura forte di Goldbach alla congettura dei numeri primi gemelli: una coppia di numeri primi gemelli è sempre l'ultima coppia di Goldbach p + q = N pari per molti N di forma 12n, ma non viceversa, poiché non tutti i multipli di 12 sono somma di due numeri primi gemelli.

Ad esempio 48 è il primo a non esserlo, poiché 48/2 $\pm$ 1 = 23 primo e 25 non primo.

Abbiamo, inoltre, collegato il tutto anche alla congettura di Polignac: una coppia di numeri primi consecutivi con differenza q – p = 2n, di cui tali coppie sono estensioni dei numeri primi gemelli per i quali n = 1, quindi con q – p = 2 x 1 = 2.

Inoltre anche una coppia di Polignac è l'ultima coppia di Goldbach per molti N pari: tutti i numeri pari sono di forma N = 6n-2, 6n, 6n+2.

Ad es. 47 e 53 poiché 47 + 53 = 100, e 53 – 47 = 6 = 2 x 3, e con 47 e 53 numeri primi consecutivi. Le altre coppie di Goldbach, eccetto l'ultima, sono invece costituite da due numeri primi non consecutivi. Per esempio, per N = 100 = 11 + 89 = 17 + 83 e così via, con diversi numeri primi tra i due numeri delle coppie di Goldbach p + q = 100.

Infine l'ipotesi di Polignac è collegata alla congettura di Cramer sulle differenze più grandi (gap) tra due numeri primi consecutivi, vedi lavoro "Soluzione unificata per alcune congetture…" nella sezione "Lavori della Prof. Tulumello).

Con questo lavoro mostreremo la congettura di Levy, con le relazioni con le ex - congetture di Goldbach (forte e debole).

La congettura di Levy, infatti, dice che tutti gli interi dispari maggiori di 5 possono essere rappresentati come somma di un numero dispari (con l'eccezione dell'unico numero primo pari, 2) e di un semiprimo pari; o equivalentemente, come la somma di un numero primo p più un numero primo q moltiplicato per due.

La **congettura di Levy** è:

$$\forall n > 2, p, q \in P \rightarrow N = 2n + 1 = p + 2q$$

con P insieme dei numeri primi.

Su *Wikipedia* alla voce "La congettura di Levy"si ha: "Algebricamente, equivale a dire che 2n +1 = p + 2q ha sempre soluzione per p e q primi (*non necessariamente distinti*) per n > 2: Se la congettura di Goldbach è vera, la congettura di Levy implica la congettura debole di Goldbach (il semiprimo richiesto dalla congettura deve essere un numero pari e, se è vera la congettura di Goldbach, ovvero che un numero pari è la somma di due primi, segue che la somma di un primo e di un semiprimo è uguale alla somma di tre primi. Ad esempio, 47 = 13 + 2 x 17 = 37 + 2 x 5 = 43 + 2 x 2 rappresenta alcuni modi"

Modi che noi, invece, chiameremo **P_L(N) o coppie di Levy** (sottintendendo come coppia p e 2q), tali che un numero dispari maggiore di 5 possa essere scritto come N = p + 2q

Secondo *Mathworld* “la congettura è stata provata per ogni valore dispari positivo minore di 10^9. La congettura comunque è ancora aperta mentre per Goldbach è stata provata fino a 10^17 (*Oliveira e Silva*).”

Verifiche sulla congettura di Levy – ricerca di contro-esempi
Per la verità delle due congetture di Goldbach, vedi il nostro lavoro “Procedure per la formazione delle coppie di Goldbach e delle terne di Goldbach” – con l’impossibilità di contro esempi G(N) = 0 e T(N) = 0 - sul sito ERATOSTENE, sezione “Lavori del prof. Di Noto).

Ora poiché la congettura di Levy è legata alle due congetture di Goldbach, dove con esempi, tabelle numeriche e grafici abbiamo escluso l’esistenza di contro esempi, ne consegue che anche questa congettura è necessariamente vera, senza possibilità di contro esempi $P_L(N) = 0$, cioè non esistono numeri dispari N > 5 che non abbiano almeno una possibilità di essere scritto come N = p + 2q.

Infatti, nella Tabella seguente fino a N = 21, la congettura viene sempre più soddisfatta al crescere di N (come vedremo anche con gli esempi per N = 101 e per N = 1003) quali che siano N > 5, p e q con la sola eccezione di 2, l’unico numero primo pari, come valore di p, mentre può assumere il valore di q, essendo anche 2 x 2 = 2 + 2 = 4 numero pari, come qualsiasi somma di due numeri dispari).

n	N=2n+1	p	q
3	7	3	2
4	9	3	3
		5	2
5	11	5	3
		7	2
6	13	3	5
		7	3
7	15	5	5
		11	2
8	17	7	5
		11	3
9	19	5	7
		13	3
10	21	7	7
		11	5
		17	2

Tabella 1 – coppie di Levy fino a N=21

Come si nota facilmente, solo 7 ha $P_L(7) = 1$, mentre tutti gli altri N fino a 19 ne hanno due e 21 ne ha tre. Al crescere di N, cresce in proporzione anche $P_L(N)$, anche perché crescono i numeri primi p e q fino ad N.

Si osserva facilmente che al crescere di p, q invece decresce, fino ad arrivare spesso a q = 2 quando N - 4 è primo.

Esempio per N = 101

N	p		q
1) 101 =	7	+ 2 x	47
2) 101 =	19	+ 2 x	41
3) 101 =	67	+ 2 x	17
4) 101 =	79	+ 2 x	11
5) 101 =	87	+ 2 x	7
6) 101 =	97	+ 2 x	2

Abbiamo quindi $P_L(100)$ = ben 6 possibilità di scrivere 101 come p + 2q; e 6 è anche il numero G(100) di coppie di Goldbach per N =100, il numero pari (l’altro è ovviamente 102) più vicino a 101. Ed ecco una connessione numerica che lega la congettura di Levy e la congettura di Goldbach, connessione che verrà confermata successivamente, rendendo uguali le formule logaritmiche per il calcolo sia di $P_L(N)$ sia di $G(N \pm 1)$.

Pertanto, anche la congettura di Levy la riteniamo vera, come pure le due congetture di Goldbach, anch'esse legate ai numeri primi fino a N.

Per Goldbach forte hanno un ruolo particolare i multipli dispari di 3 fino ad N, poiché, eliminandosi a vicenda nella formazione delle coppie di Goldbach per N = 6n, facilitano la formazione di tali coppie, fino ad un numero che è quasi il doppio di G(6n $\pm$2), mentre niente del genere succede per la congettura di Levy, e $P_L(N)$ cresce in modo uniforme anziché con le oscillazioni osservate per G(N) e dovute al fatto che N sia o no un multiplo di 6 e quindi 6n.

Tale incremento uniforme di $P_L(N)$ al crescere di N rende ancora più evidente la mancanza di un contro esempio $P_L(N) = 0$, cosa che risultava più difficile per le oscillazioni di G(N), ora da noi spiegate tramite i multipli dispari di 3, ma che prima facevano temere una possibile esistenza di contro esempi per la congettura di Goldbach, e infatti alcuni lavori di Vaughan- Littlewood ed Estermann ammettono questa possibilità, per noi considerata solo una eccezione teorica vista l'inesistenza attuale di contro-esempi: G(N) in ogni caso è dato, anche per lieve difetto, dalla formula logaritmica:

$$G(N) \approx N / (\ln N)^2 \qquad \text{per } N = 6n \pm 2 \qquad \textbf{(1)}$$

e circa il doppio per N = 6n

Valida anche per $P_L(N)$:

$$P_L(N) \approx N / (\ln N)^2 \qquad \textbf{(2)}$$[1]

Per la congettura debole di Goldbach, invece, le T(N) terne di numeri primi p, q ed r tali che un numero dispari N $\geq$ 7 si possa scrivere come N = p + q + r, sono addirittura più numerose delle coppie di Goldbach per i numeri pari vicini N $\pm$ 1, perchè N sia di forma N = 6n $\pm$ 2; e quindi la cosiddetta congettura debole di Goldbach risulta, in questi casi, numericamente più forte della congettura forte di Goldbach; e quindi neanche la congettura debole di Goldbach ha contro esempi T(N) = 0, e pertanto è vera anch'essa.

Le coppie $P_L(N)$ della congettura di Levy sono, peraltro, anche casi particolari della congettura debole di Goldbach, poiché viene ripetuto due volte (p + 2q = p + q + q). Per esempio per N = 47, questo numero si può scrivere anche come

47 = 13 + 17 + 17 anziché 13 + 2 x 17
47 = 37 + 5 + 5 anziché 37 + 2 x 5
47 = 41 + 3 + 3 anziché 41 + 2 x 3
47 = 43 + 2 + 2 anziché 43 + 2 x 2

poiché sia la congettura di Levy sia la congettura debole di Goldbach ammettono ripetizioni. Ma torniamo brevemente alla formula logaritmica (2) per il calcolo di $P_L(N)$.

Si trova facilmente, anche dagli esempi riportati per N=47, ed N =101 che

$P_L(47)$ = ***4*** ≈ N /(ln N)^2 = 47 / 14,82 = ***3,17***

$P_L(101)$ = ***6*** ≈ 101 / 21,29 = ***4,74***

Mentre per N = 1003,

$P_L(1003)$ = ***23*** ≈ 1003 / 47,75 = ***21,0052***.

Per cui, anche la congettura di Goldbach può essere benissimo paragonata alla congettura forte di debole come formula di calcolo, e alla congettura debole di Goldbach come N somma di tre numeri primi N = p + q + q con q ripetuto, equivalente alla definizione classica N = p + 2q; e quindi anche la congettura di Levy può essere, come la congettura forte di Goldbach, considerata un'ipotesi RH equivalente, con le stesse tabelle e le stesse formule usate per la congettura forte di Goldbach, vedi nostri lavori precedenti " Sulle spalle dei giganti" e "Goldbach, twin prime and Polignac ".

Un primo semplice algoritmo

Si può creare un semplice algoritmo per trovare ordinatamente i diversi modi o $P_L(N)$ in cui un numero dispari N, grande a piacere, si può scrivere come N = p + 2q o nella forma equivalente N = p + q + q.

---

[1] La dimostrazione che la (2) è corretta ed è una formula asintodica, valida cioè per valori di N elevati, sarà mostrata nell'ipotesi equivalente RH dell'articolo, più avanti.

a) si sottraggono ad N i numeri primi successivi 3, 5, 7, 11, ecc.; la differenza così ottenuta è ovviamente un numero pari,dato che sia N sia p sono dispari, e tale numero pari è, per la ex congettura di Goldbach, la somma di due numeri primi p e q; in questo caso, p già lo abbiamo, e ci interessano solo i casi in cui la differenza d = N – p sia 2q = q + q;

b) si divide tale differenza d per due, e solo se d/2 è primo e intero, allora la congettura di Levy è soddisfatta, avendo ottenuto N = p + q + q, quale che siano N, p e q. Abbiamo già escluso la possibilità di contro esempi $P_L(N) = 0$ poiché $P_L(N)$ cresce con N e coi numeri primi p e q fino ad N.

Un secondo algoritmo più veloce

E' presentato sul sito di ERATOSTENE con la libreria LibThN.txt (sezione lavori ing. Rosario Turco) e liberamente scaricabile per concessione dell'autore. Esso è utilizzabile con Pari/GP.

All'avvio del software basta usare **getLevy(N)** per ottenere il numero di coppie di Levy, mentre con **listLevy(N)** si ottiene la stampa delle coppie di Levy.

Coppie di Levy per N=1003

Facciamo un esempio per N = 1003, con p = 5 (per p = 3 la differenza 1003 - 3 = 1000, che non è il doppio di un numero primo q). Il primo modo in cui 1003 si può scrivere come N = p + 2q, è quindi (1003 - 5) /2 = 998 , e 998 /2 = 499 numero primo, e quindi la congettura di Levy con p = 5 è soddisfatta, poiché 1003 si può scrivere come

1003 = 5 + 2 x 499 (congettura di Levy)
1003 = 5 + 499 + 499 (congettura debole di Goldbach)

Questo, e tutte le altre 22 coppie che soddisfano la congettura di Levy per N = 1003, sono riportati nella tabella seguente, ordinata in base al valore crescente dei numeri primi p utili a tale scopo, cioè la possibilità di scrivere il numero dispari N = 1003 come somma tra ognuno di questi numeri primi e il doppio di un altro numero primo q, tali che N = p + 2q, per quanto prima esposto.

Pl(N)	**(N -p)/2**	***q***
1	(1003 – *5*)/ 2	*499*
2	(1003 – *29*)/2	*487*
3	(1003 – *89* / 2	*457*
4	(1003 – *137*)/2	*433*
5	(1003 - *257*)/2	*373*
6	(1003 - *269*)/2	*367*
7	(1003 - *389*)/2	*307*
8	(1003 - *449*)/2	*277*
9	(1003 - *461*)/2	*271*
10	(1003 - *521*)/2	*241*
11	(1003 - *557*)/2	*223*
12	(1003 - *617*)/2	*193*
13	(1003 - *641*)/2	*181*
14	(1003 - *677*)/2	*163*
15	(1003 - *701*)/2	*151*
16	1003 - *797*)/2	*103*
17	(1003 - *809*)/2	*97*
18	(1003 - *857*)/2	*73*
19	(1003 - *881*)/2	*61*
20	(1103 - *929*)/2	*37*
21	(1003 - *941*)/2	*31*
22	(1003 - *977*)/2	*13*
23	(1003 - *997*)/2	*3*

Tabella 2 - coppie di Levy per N=1003

Facendo anche qui un paragone con le coppie di Goldbach per N pari = 1004 = 1003 +1 (il numero pari più vicino ad N non di forma 6n), abbiamo ben 18 coppie reali di Goldbach p e q tali che p + q = 1004, con 18 valore molto vicino a 23; con la formula logaritmica (2) otteniamo un valore G(1004) = 21,01, anche questo molto vicino a 18, oltre che a 23. Tale formula logaritmica dà in genere risultati lievemente approssimati per difetto sia per G(N) che per $P_L(N)$, purché N sia di forma $6n \pm 2$

Per Goldbach; infatti, se N = 6n, il numero reale di coppie di Goldbach è circa il doppio rispetto al valore ottenuto con la (2), a causa del ruolo già prima accennato dei multipli dispari di 3; mentre per la congettura di Levy questo problema non esiste, e $P_L(N)$ cresce con maggiore uniformità al crescere di N, senza le oscillazioni osservate per Goldbach e riguardanti i numeri pari N di forma 6n e $6n \pm 2$. Infatti, per N = 1002 contiguo a 1003,e di forma 1002 = 6 x 167, G(1002) = 36 valore reale, mentre con la formula logaritmica (2) si ottiene 20,98, circa la metà del valore reale 36.

Formula asintodica di approssimazione per $P_L(N)$ [(2)]
Prendendo un valore di N molto elevato, per esempio 10^9 (ultimo numero testato per la congettura di Levy), possiamo dire con la (2) che:

P(10^9) ≈ N/(ln N)^2 = 10^9 / 20,72^2 = 2 328 599

modi (coppie) di scrivere 10^9 = p + 2q, ma anche G(10 ^9) ≈ 2 328 599 coppie di Goldbach, senza contare le ancora più numerose terne di Goldbach per la congettura debole di Goldbach; o anche le coppie di numeri primi gemelli fino a 10^9 , che sono stimate in g(N) ≈ G(N) x 1,32032 = 3074 443; in realtà sono 3 424 506, dal quale si può ricavare un valore più preciso sia per G(N) sia per $P_L(N)$ con G(N) ≈ $P_L(N)$ ≈ g(N) /1,32032 = 2 593 693 (trascurando i decimali).

Quindi per N = 10^9 ± 1, ci sono circa ben 2 593 693 coppie di Levy.

Considerazioni sulla congettura di Levy
Congettura forte di Goldbach , congettura di Levy e congettura debole di Goldbach (della quale, come abbiamo già accennato, la seconda è un caso particolare, N = p + q + q anziché p + q + r come nel caso generale), sono tutte correlate tra loro, oltre che tutte vere, e connesse all'ipotesi di Riemann, RH (come pure la congettura dei numeri primi gemelli, vera anch'essa), come ipotesi RH equivalenti (e anche la congettura di Polignac, estensione dei numeri primi gemelli).

Reticolo generale pari/dispari e reticolo di Levy

Come per la congettura di Goldbach**,** anche per la congettura di Levy si possono usare reticoli numerici (tavole di addizione tra numeri pari = 2q e numeri primi p) per evidenziare come si formano le coppie $P_L(N)$ di Levy in modo ordinato e successivo, e come esse crescono al crescere di N dispari (nelle $P_L(N)$ caselle all'incrocio tra 2q e p) e quindi anche come non ci possono essere contro esempi $P_L(N)$ = 0, così come per Goldbach con G(N) = 0.

	3	5	7	~~9~~	11	13	~~15~~	17	19	~~21~~	23	~~25~~
4	7	9	11	~~13~~	15	17	~~19~~	21	23	~~25~~	27	~~29~~
6	9	11	13	~~15~~	17	19	~~21~~	23	25	~~27~~	29	~~31~~
~~8~~	~~11~~	~~13~~	~~15~~	~~17~~	~~19~~	~~21~~	~~23~~	~~25~~	~~27~~	~~29~~	~~31~~	~~33~~
10	13	15	17	~~19~~	21	23	~~25~~	27	29	~~31~~	33	~~35~~
~~12~~	~~15~~	~~17~~	~~19~~	~~21~~	~~23~~	~~25~~	~~27~~	~~29~~	~~31~~	~~33~~	~~35~~	~~37~~
14	17	19	21	~~23~~	25	27	~~29~~	31	33	~~35~~	37	~~39~~
~~16~~	~~19~~	~~21~~	~~23~~	~~25~~	~~27~~	~~29~~	~~31~~	~~33~~	~~35~~	~~37~~	~~39~~	~~41~~
~~18~~	~~21~~	~~23~~	~~25~~	~~27~~	~~29~~	~~31~~	~~33~~	~~35~~	~~37~~	~~39~~	~~41~~	~~43~~
~~20~~	~~23~~	~~25~~	~~27~~	~~29~~	~~31~~	~~33~~	~~35~~	~~37~~	~~39~~	~~41~~	~~43~~	~~45~~
22	25	27	29	~~31~~	33	35	~~37~~	39	41	~~43~~	45	~~47~~
~~24~~	~~27~~	~~29~~	~~31~~	~~33~~	~~35~~	~~37~~	~~39~~	~~41~~	~~43~~	~~45~~	~~47~~	~~49~~
26	29	31	33	~~35~~	37	39	~~41~~	43	45	~~47~~	49	~~51~~

Tabella 3 Reticolo generale di addizione pari / dispari

La tabella 4 di sopra la chiameremo "*Reticolo generale pari/dispari*".

Il reticolo generale, per esempio, può essere utile per studiare la congettura debole di Goldbach, poiché i numeri pari N±1 sono la somma di due numeri primi tante volte quante sono le G(N±1) coppie di Goldbach per N ±1 pari e le terne dei numeri primi che soddisfano la congettura debole di Goldbach sono formate dalla somma (p + q) + r, dove p + q è il numero pari nella prima colonna a sinistra, ed r il numero primo della prima riga in alto nel reticolo generale. La congettura di Levy, ricordiamo, è il caso particolare in cui N = p + 2q = p + q + q, con q ripetuto due volte, mentre il caso generale della congettura debole di Goldbach è N = p + q + r, dove (p + q) si può sostituire con la loro somma N±1 pari, come da congettura forte di Goldbach.

[2] *La dimostrazione che la (2) è una formula asintodica corretta lo vedremo nell'ipotesi RH equivalente dell'articolo; essa è dimostrata vera anche nel caso di Goldbach in un altro nostro lavoro di ipotesi RH equivalente ma con le coppie di Goldbach G(x) al posto delle coppie di Levy $P_L(x)$*

Per ottenere il reticolo di Levy della tabella 5 partiamo dalla Tabella 4. A destra del reticolo barriamo in rosso i numeri pari che in ***2q*** non hanno q primo, eliminando anche le righe corrispondenti; mentre sopra il reticolo barriamo in blu i dispari che non sono primi con la corrispondente colonna.

	3	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**
4	7	9	11	15	17	21	23	27	33
6	9	11	13	17	19	23	25	29	35
10	13	15	17	21	23	27	29	33	39
14	17	19	21	25	27	31	33	37	43
22	25	27	29	33	35	39	41	45	51
26	29	31	33	37	39	43	45	49	55
34	37	39	41	45	47	51	53	57	63
38	41	43	45	49	51	55	57	61	67
46	49	51	53	57	59	63	65	69	75
58	61	63	65	69	71	75	77	81	87

Tabella 4 Reticolo di Levy

$P_L(M)=0$?

Man mano che si riduce il reticolo di Levy non si arriva mai ad un contro esempio $P_L(M) = 0$, poiché $P_L(M)$ dipende moltissimo dal numero di numeri primi fino ad M, cioè da $\pi(M)$. Stessa cosa si potrebbe dire per numeri grandi. Se per i numeri grandi si avesse $P_L(M)=0$ significherebbe che si è incontrato un numero dispari per cui eventualmente $\pi(M)$ non fornisce primi ulteriori rispetto ad uno dei dispari precedenti (ma esistono almeno i numeri primi precedenti) e che i primi disponibili non sono tali che M=p+2q; il che è praticamente impossibile, visto che la congettura di Levy è più debole di quella di Goldbach poiché si possono usare anche primi ripetuti, ad esempio p=7, q=7 M=21. E' lo stesso dire che poiché è consentito $MCD(p,q)\neq 1$ è ammissibile che 2q+p= 0 mod q e 2q+p=0 mod p (possibile cioè se p = q) ovvero M non deve essere necessariamente coprimo sia con p che con q.

Lemma dei coprimi di Levy

Siano $p,q\in P$, dove P è l'insieme dei numeri primi . Sia p+2q=N con p e q anche uguali. Se $p\neq q$ allora M è coprimo con p e q e p e q sono coprimi tra loro (MCD(p,q)=1). Se p = q allora M non è coprimo con p e q; inoltre nemmeno p e q lo sono tra loro.

Dimostrazione

Se $p,q\in P$ con $p\neq q$ allora MCD(p,q)=1, per cui $2q+p \neq 0$ mod t. Difatti se 2q+p =0 mod t si andrebbe contro l'ipotesi che p e q sono coprimi. Ad esempio se MCD(p,q)=t significa che $\exists t\in P$: q=t*q1 p=t*p1 quindi non sono primi $\Rightarrow$ 2q+p= t*(2q1+p1)=0mod t. Se p =q $\Rightarrow$ MCD(p,q)=p per cui 2q+p=3p =N sicuramente N è divisibile sia per 3 che per p cioè N = 0 mod p, mentre p e q non sono coprimi pur essendo primi.

Ad esempio
M=17 p=11 q=3, M è coprimo sia con p che con q.
M=21 p=7 q=7, M non è coprimo con p e q e nemmeno p e q lo sono tra loro.
M=3x p = x q = x, con x primo, M non è coprimo con p e q e nemmeno p e q sono coprimi tra loro.

Lemma dei composti di Levy

Data la sequenza numerica 9+6k con $k\geq 0$ i numeri dispari composti N che si ottengono da essa sono coppie di Levy N=p+2q con numero primo p = q; la sequenza è identica a quella 3p con p numero primo.

Dimostrazione

Il Lemma è una conseguenza del Lemma precedente. Ad esempio se N=3p e a p assegno ogni numero primo a partire da 3 ottengo come primo numero il 9 che è un composto, il successivo prendendo p=5 è 15 a distanza 6 da 9, etc. Ciò è ottenibile anche con 9+6k.

Nel seguito introduciamo un "nostro metodo di analisi" per la congettura di Levy.

Problema inverso e metodo “iterativo della cerniera”
Finora nel lavoro la congettura di Levy è stata affrontata scegliendo un qualsiasi N dispari e verificando se esistono dei numeri primi p e q per cui N=p+2q e ci si pone il problema se esiste un N per cui ciò non sia vero.

In realtà si può considerare anche il problema inverso: “Dati dei numeri primi p e q , in quantità m, al variare di essi e delle progressioni numeriche ottenibili con p+2q si possono ottenere tutti i numeri dispari? “

Soprattutto occorre capire, circa la matrice quadrata m x m dei valori (che battezziamo come *matrice di Levy*) che si ottengono, quali caratteristiche (le condizioni necessarie e sufficienti) deve avere la matrice affinché il “Teorema della compensazione dei dispari in una matrice di Levy” sia vero; naturalmente se è vero il Teorema in generale, sarà vera anche la congettura di Levy.

A tal proposito introduciamo concettualmente un metodo di analisi che chiamiamo *metodo della cerniera*: un corpo che ha due gradi di libertà ha la possibilità, ad esempio, di muoversi sia in modo traslatorio che rotatorio. Per poterlo vincolare si usa, ad esempio, una cerniera che non gli consente di traslare ma solo di ruotare.

Potremmo usare tale tecnica creando un *immaginario a cerniera* dove la posizione p, data dal numero primo $p \geq 3$, sia fissa mentre si fa variare (ruotare) solo il numero primo q. In tale immaginario p assume inizialmente il valore 3 mentre q assume tutti i valori primi fino all’infinito (o ruota in modulo p facendo, quindi, assumere a N tutti i valori tra 0 e p-1).

In tal caso è evidente che se p = q si ottiene un dispari composto (Vedi i due Lemmi precedenti); mentre se $p \neq q$ si ottengono numeri primi o anche composti. Se, poi, si ripete il procedimento spostando la cerniera a p=5, si ottiene un altro numero composto quando p = q mentre per $p \neq q$ altri numeri primi o composti. Iterando il procedimento si ottengono sempre numeri dispari, anche ripetuti ed esattamente tutti quelli che esistono fino all’infinito.

I composti dispari si possono ottenere sia nel caso p = q che nel caso p e q coprimi e primi. Ad esempio ottengo composti anche con:

25=3+2*11=11+2*7=19+2*3
27=5+2*11=13+2*7=17+10=23+4

Ovviamente posso ottenere anche numeri primi:
17=3+2*7=7+2*5 etc

Considerando gli elementi di una matrice quadrata m x m ottenuta con m numeri primi con cui si ottengono valori di progressioni numeriche con p+2q , si nota che gli elementi lungo una stessa colonna fanno riferimento a stessi valori di q ma con valori p diversi; mentre lungo una riga è sempre lo stesso p ma varia q. In altri termini sia in verticale che in orizzontale le differenze tra i valori sono un multiplo di 2 (questo richiama anche il problema dei Gemelli, di Goldbach e di Polignac).

Partendo da un dispari se si somma un numero pari come 2 o multiplo di 2 si ottiene sempre un dispari, ma nella sequenza tra 9 ed 3N può saltare qualche dispari. Tale mancanza è apparente perché aumentando il numero di primi in gioco oltre m e quindi con ulteriori righe e colonne si trovano i dispari che prima non c’erano.

Ad esempio se N=17 si ottengono tutti i dispari tra 9 e 51 ad eccezione di 49. Se si considera N=19 si ottengono tutti i dispari tra 9 e 57 ed il 49 è presente. Inoltre esistono valori ripetuti ottenibili da progressioni numeriche differenti.

Col metodo iterativo della cerniera abbiamo imparato a far variare q mantenendo fisso p. Se fissiamo p ed il massimo numero primo N che vogliamo usare allora otteniamo una progressione numerica di $\pi(N)$-1 valori (il -1 è dovuto al fatto che scartiamo il 2). Però anche p può assumere $\pi(N)$-1 valori e quindi ci sono in tutto $\pi(N)$-1 progressioni numeriche da considerare.

Indichiamo con $\mathbf{C_{p=q}}$ il numero di composti dovuti a p = q nelle varie progressioni numeriche di cui prima, ora è:

$$\mathbf{C_{p=q}} = \boldsymbol{\pi(N)-1}, \quad \text{con } \mathbf{C_{p=q}} > 0$$

Sono i numeri che si trovano sulla diagonale che parte da in alto a sinistra e termina in basso a destra nell’esempio di sotto. Questi composti sono multipli di 3, evidenziati in rosso nell’esempio.

progressione p=3	9, 13, 17, 25, 29
progressione p=5	11, 15, 19, 27, 31
progressione p=7	13, 17, 21, 29, 33
progressione p=11	17, 21, 25, 33, 37
progressione p=13	19, 23, 27, 35, 39

Allora in base a quanto detto, il numero totale di dispari ottenibili dalle progressioni numeriche con m primi è:

$$\mathbf{Dt = mxm= [\pi(N)-1]^2 = C_{p=q}{}^{2}}$$

Ad esempio se N=13, π(N)-1=5 per cui il numero di dispari totale θ 5^2=25 e la matrice di Levy si presenterà come segue:

Ora i valori contenuti in Dt contengono sia numeri primi, sia composti con p=q che composti con p≠q:

$$\mathbf{Dt = P + C_{p\neq q} + C_{p=q} = C_{p=q}{}^{2}}$$

Assumiamo che i composti p = q sulla diagonale non vanno sottolineati; in altri termini quelli sulla diagonale non consideriamoli tra i dispari ripetuti.

Da qui è:

$$\mathbf{P + C_{p\neq q} = C_{p=q} * (C_{p=q} - 1) = [\pi(N)-1][\pi(N)-2] > C_{p=q}}$$

ma ovviamente $\mathbf{P + C_{p\neq q} < C_{p=q}{}^{2}}$

Ora la quantità Dt = P + $C_{p\neq q} + \mathbf{C_{p=q}}$ contiene sia dispari ripetuti che non ripetuti (dispari effettivi) ed è uguale a:

$$\mathbf{Dt = Dr + De}$$

Dire che otteniamo dispari ripetuti significa che tra i valori delle progressioni esiste almeno un valore che si ripresenta. Un dispari si ripresenta quando p1+2q1 = p2 + 2q2, ovvero quando:

$$\mathbf{p2-p1 = 2\,(q1- q2)}$$

Differenze di primi che sono il doppio di differenze di altri primi (anche ripetuti) possiamo ottenerne infinite al variare delle coppie di primi che scegliamo e questo giustifica che le coppie di Levy possono essere anche più di una (ad eccezione del 7). Ad esempio p1=3, q1=7, p2=7, q2=5 etc. Per cui considerando più progressioni numeriche si ottengono dispari ripetuti e quindi Dr>0.

Caratteristica di una matrice di Levy

Se A è una matrice di Levy con m>3 e andiamo a calcolare col metodo di Laplace il determinante, allora det (A)=0; anzi avremmo potuto anche non calcolarlo perché una matrice di Levy è una *matrice singolare*; infatti le sue righe e/o le sue colonne sono combinazioni lineari di altre righe o colonne per cui per forza il determinante è nullo. Questo comporta anche come conseguenza che necessariamente il numero di dispari non duplicati è minore di m x m. Solo il caso banale m=2 ha determinante pari a -8. Tuttavia il concetto del determinate e delle combinazioni lineari fa nascere l'idea di un Teorema.

Teorema della compensazione dei dispari in una matrice di Levy

Sia P l'insieme dei numeri primi, con p,q∈P e sia possibile anche p = q. Siano A una matrice di Levy m x m e B una matrice di Levy m' x m' con m'>m, con B ricavata da A aggiungendo m'-m righe e colonne i cui valori sono ottenuti dalle progressioni numeriche p+2q, usando numeri primi p successivi a quelli di A e facendo variare q da 3 a p.

Condizione necessaria e sufficiente a B per compensare parte dei dispari assenti in A, tenendo presente come è costruita B da A, è che per le righe di B ed A sia vero che:

$$(a_{m-1j} + b_{m+1j}) - (a_{m-1j} + a_{mj}) \equiv 0 \bmod 2$$

e che per le loro colonne sia:

$$(a_{im-1} + b_{im+1}) - (a_{im-1} + a_{im}) \equiv 0 \bmod 4$$

Dimostrazione
Nel teorema di sopra le due condizioni nascono dalle combinazioni lineari tra gli elementi di righe diverse di B, che è una matrice ricavata da A, ma con colonna fissa e tra colonne diverse della matrice B ricavata da A, ma con riga fissa. Infatti è evidente che se consideriamo un matrice di Levy o la tabella risultante che risulta dalla regola p+2q con p e q numeri primi, se si prendono in considerazione due elementi di due righe contigue ma corrispondenti ad una stessa colonna, ognuno degli elementi è dato da p+2q e p’ + 2q con p’>p (stesso q ma p diverso) allora p+2q - (p’-2q) = p’-p = 2.

Mentre se consideriamo due colonne contigue gli elementi di una stessa riga hanno uguale p ma q e q’ diverso, con q’>q e quindi p+2q - (p-2q’)= 2(q’-q)=4. Se invece si considerano righe distanti con p’’ > p’ > p ma 2 q sempre uguale allora è p+2q + p’’+2q – (p+2q + p’+2q)= p’’- p’= 2; analogamente per le colonne sarà p fisso e q’’ > q’ > q quindi p+2q+p+2q”- (p+2q+p+2q’)=2(q’’-q’).

Se indichiamo col simbolo ≡ il concetto di congruenza, allora generalizzando, qualunque sia la distanza tra i primi, è in un caso:

$$p' - p \equiv 0 \mod 2$$

mentre nel secondo caso:

$$2(q'-q) \equiv 0 \mod 4$$

Da qui poiché sono sempre vere le condizioni del Teorema e poiché è sempre possibile scegliere un m’ grande quanto si vuole, cioè allargando sempre più B (e quando aumentiamo la dimensione la matrice B precedente assume il ruolo della matrice A) e tale da rispettare le due condizioni di prima, sicuramente B riesce sempre a compensare buona parte o in alcuni casi tutti i numeri dispari (il che dipende dal m’ che si sceglie) assenti della matrice A precedente. Man mano che si aumenta m’ (e quindi B rispetto ad A) si ottengono sempre nuovi dispari ed il procedimento si può iterare con m’ che tende all’infinito.

Inoltre consideriamo una tabella che parte nella prima riga con il valore 9 e si incrementano di 4 i valori successivi; mentre i valori per le righe sottostanti si ottengono dal primo elemento della riga precedente aumentato di 2. Si ottiene la tabella che segue che in primo momento non considera i numeri primi.

	3	5	7		11	13		17	19		23			29
3	9	13	17	~~21~~	25	29	~~33~~	37	41	~~45~~	49	~~53~~	~~57~~	61
5	11	15	19	~~23~~	27	31	~~35~~	39	43	~~47~~	51	~~55~~	~~59~~	63
7	13	17	21	~~25~~	29	33	~~37~~	41	45	~~49~~	53	~~57~~	~~61~~	65
	~~15~~	~~19~~	~~23~~	~~27~~	~~31~~	~~35~~	~~39~~	~~43~~	~~47~~	~~51~~	~~55~~	~~59~~	~~63~~	~~67~~
11	17	21	25	~~29~~	33	37	~~41~~	45	49	~~53~~	57	~~61~~	~~65~~	69
13	19	23	27	~~31~~	35	39	~~43~~	47	51	~~55~~	59	~~63~~	~~67~~	71
	~~21~~	~~25~~	~~29~~	~~33~~	~~37~~	~~41~~	~~45~~	~~49~~	~~53~~	~~57~~	~~61~~	~~65~~	~~69~~	~~73~~
17	23	27	31	~~35~~	39	43	~~47~~	51	55	~~59~~	63	~~67~~	~~71~~	75
19	25	29	33	~~37~~	41	45	~~49~~	53	57	~~61~~	65	~~69~~	~~73~~	77
	~~27~~	~~31~~	~~35~~	~~39~~	~~43~~	~~47~~	~~51~~	~~55~~	~~59~~	~~63~~	~~67~~	~~71~~	~~75~~	~~79~~
23	29	33	37	~~41~~	45	49	~~53~~	57	61	~~65~~	69	~~73~~	~~77~~	81
	~~31~~	~~35~~	~~39~~	~~43~~	~~47~~	~~51~~	~~55~~	~~59~~	~~63~~	~~67~~	~~71~~	~~75~~	~~79~~	~~83~~
	~~33~~	~~37~~	~~41~~	~~45~~	~~49~~	~~53~~	~~57~~	~~61~~	~~65~~	~~69~~	~~73~~	~~77~~	~~81~~	~~85~~
29	35	39	43	~~47~~	51	55	~~59~~	63	67	~~71~~	75	~~79~~	~~83~~	87

Tabella 5 – Verifica della RH equivalente di Levy

In barrato possiamo eliminare le colonne e le righe non prodotte da numeri primi ed è evidente che grazie ai valori ripetuti i dispari eliminati sono comunque presenti. Quello che si ottiene è sempre una matrice di Levy.

Corollario del Teorema della compensazione dei dispari in una matrice di Levy
Il Teorema della compensazione dei dispari in una matrice di Levy è vero, per cui è vera la congettura di Levy.

Dimostrazione
Questa è una conseguenza del fatto che dal “Teorema della compensazione dei dispari in una matrice di Levy” essendo possibile trovare sempre tutti i dispari, significa che ogni dispari ha almeno una somma p+2q con p e q numeri primi e quindi è vera la congettura di Levy.

GRH
L'esempio con le progressioni numeriche ricorda però molto da vicino le progressioni numeriche studiate da Dirichlet, che hanno portato alla formulazione (Vedi "Sulle spalle dei giganti") della GRH. Solo che in quel caso si considerano incrementi k uguali a partire da n, ovvero k + n e se MCD(k,n)=1 allora eravamo di fronte a una caratteristica di Dirichlet giungendo alla GRH. In quest'altro caso k=2q con q che varia tra i numeri primi. Già in "Sulle spalle dei giganti" abbiamo mostrato come la RH sia una particolarizzazione della GRH. Nel caso della congettura di Levy siamo in grado di formulare una ipotesi RH equivalente.

Ipotesi RH equivalente di Levy
Noi affermiamo che:

$$\left|\frac{P_L(x)}{x} - \int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^2}\right| = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \qquad \textbf{(3)}$$

La (3) è equivalente a:

$$\left|\frac{P_L(N)}{N} - \frac{\pi(N)}{N\ln N}\right| < KC(N), \;\; K=1, \; C(N)=\frac{1}{\ln N} \qquad \textbf{(4)}$$

Introducendo la funzione O, la precedente espressione diventa:

$$\left|\frac{P_L(N)}{N} - \frac{\pi(N)}{N\ln N}\right| = O((\ln N)^{-1}) \qquad \textbf{(5)}$$

Se invece di $\pi(N)$ noi introduciamo Li(x) è:

$$\frac{P_L(x)}{x} - \int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^2}\Big| = O((\ln x)^{-1}) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) = O(x^{-\varepsilon}) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \approx O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \qquad \textbf{(6)}$$

La verifica è possibile con un excel e settando la regola automatica di indicare YES se ABS(A-B) < C(N).

x	PI(x)	PI(x)/x	π(x)	C(x)=1/LN(x)	π(x)/(x ln x)	ABS(A-B)	ABS(A-B)<C(x)?
7	1	0,142857143	4	0,513898342	0,293656196	0,150799053	YES
9	2	0,222222222	4	0,455119613	0,202275384	0,019946839	YES
11	2	0,181818182	5	0,417032391	0,189560178	0,007741996	YES
13	2	0,153846154	6	0,389871245	0,179940575	0,026094421	YES
15	2	0,133333333	6	0,369269373	0,147707749	0,014374416	YES
17	4	0,235294118	7	0,352956124	0,145334875	0,089959243	YES
19	2	0,105263158	8	0,339623272	0,142999272	0,037736114	YES
21	3	0,142857143	8	0,328458739	0,125127139	0,017730004	YES
23	3	0,130434783	9	0,318928989	0,1247983	0,005636483	YES
25	3	0,12	9	0,310667467	0,111840288	0,008159712	YES
27	4	0,148148148	9	0,303413076	0,101137692	0,047010456	YES
29	4	0,137931034	10	0,296974204	0,102404898	0,035526136	YES
31	2	0,064516129	11	0,291206676	0,103331401	0,038815272	YES
33	5	0,151515152	11	0,285999668	0,095333223	0,056181929	YES
35	3	0,085714286	11	0,281266414	0,088398016	0,00268373	YES
37	4	0,108108108	12	0,276937893	0,089817695	0,018290413	YES
39	4	0,102564103	12	0,27295842	0,083987206	0,018576896	YES
101	6	0,059405941	26	0,216679065	0,055778769	0,003627171	YES
1001	34	0,033966034	168	0,144743884	0,02429268	0,009673354	YES
10001	114	0,01139886	1229	0,108572442	0,013342219	0,001943359	YES
100001	715	0,007149929	9592	0,086858821	0,008331415	0,001181486	YES

Tabella 6 – Verifica della RH equivalente di Levy

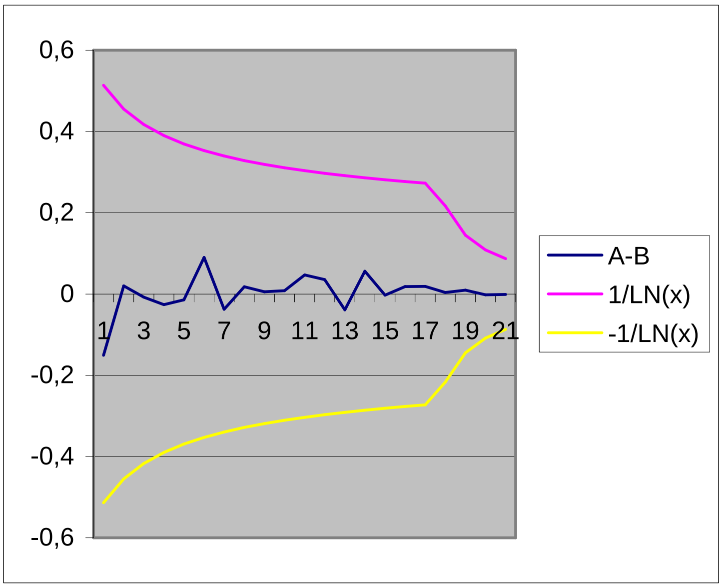

Figura 1 – confine |1/lnN| si A-B

Come si vede il termine di errore 1/ln(x) è abbastanza buono. Inoltre dalla figura è evidente che al crescere di x e potenzialmente all'infinito la curva si avvicina molto all'asse delle ascisse, il che vuol dire che nella (4) il primo termine al crescere di x è ben approssimabile con la parte dell'integrale.

La (4) dimostra vera la (2) $P_L(N) \approx N / (\ln N)$ ^2; difatti se dalla (4) moltiplichiamo il primo membro per N e al posto di $\pi(N)$ mettiamo il suo equivalente asintodico, si ottiene la (2).

C(x)	(A-B)	r=C(x)/A-B
0,51	0,15	3,4
0,45	0,01	45
0,41	0,07	5,857142857
0,38	0,02	19
0,36	0,01	36
0,10	0,0019	52,63157895
0,86	0,00	781,8181818

Figura 2 – R=G(x)/A-B - RH equiv Levy

Come si vede, il rapporto tra i valori di C(x) e quelli di A-B è sempre crescente, con piccole irregolarità; ne consegue che il grafico relativo ai successivi rapporti così ottenuti sarà di "**tipo comet**", il ché esclude la possibilità di contro esempi al crescere di r (rapporti minori di 1, o differenze minori di 0). L'ipotesi RH - equivalente per la congettura di Levy è quindi vera e sono vere la (4) e la (2).

Lo stesso procedimento, applicato a tutte le altre ipotesi RH equivalenti, darà grafici di tipo comet simili per tutte, confermando così la verità delle medesime e quindi anche della RH, tramite l'assenza e l'impossibilità di contro esempi (r < 1).

Riferimenti

1. “ Sulle spalle dei giganti “ (vedi CNR Solar)
2. “ Goldbach, twin prime and Polignac” (vedi CNR Solar)
3. ” Procedura per la formazione delle coppie e delle terne di Goldbach”

Siti

CNR Solar
http://150.146.3.132/

Prof. Matthew R. Watkins
http://www.secamlocal.ex.ac.uk

Aladdin’s Lamp (eng. Rosario Turco)
www.geocities.com/SiliconValley/Port/3264 menu MISC section MATEMATICA

ERATOSTENE group
http://www.gruppoeratostene.com

Dr. Michele Nardelli
http://xoomer.alice.it/stringtheory/

Blog
http://MATHBuildingBlock.blogspot.com
Colonnese Maria, Rosario Turco