C'è solo un'acca tra pi e phi

ing. Rosario Turco, prof. Maria Colonnese

Introduzione

Nell'articolo vengono mostrate vari possibili legami tra la costante di Archimede (pi greco) e la sezione aurea (phi). Inoltre vengono mostrati anche i legami tra essi e altre quantità come i numeri di Fibonacci, i coefficienti di Bernoulli, le costanti zeta (vedi "Sulle spalle dei giganti"), la Teoria delle stringhe, i fattoriali. Inoltre viene evidenziato il legame tra la congettura del Massimo della glide, nell'ambito della congettura di Collatz, e la sezione aurea.

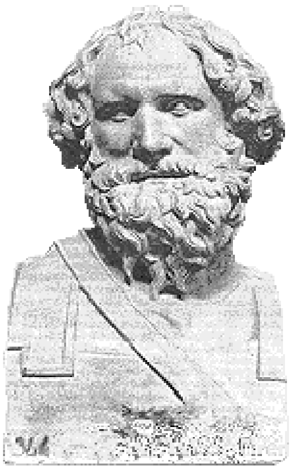
Equazione quadratica e la sezione aurea

La sezione aurea è una delle possibili soluzioni della equazione quadratica

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618...$$

Legame tra la costante di Archimede pi greco e la sezione aurea



Esistono molte legami tra pi greco e la sezione aurea.

Ramanujan trovò una relazione che lega, attraverso una meravigliosa frazione continua, due numeri fondamentali: phi, la sezione aurea ed il famoso pi greco:

$$\sqrt{\phi+2} - \phi = \cfrac{e^{-2\pi/5}}{1 + \cfrac{e^{-2\pi}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi}}{1 + \cfrac{e^{-6\pi}}{}}}} = 0.2840...$$

Possiamo dunque osservare che il legame tra l'irrazionale phi ed il trascendente pi greco, passa attraverso una estensione infinita!

Lo sviluppo binomiale

A partire dallo sviluppo binomiale, per -1<x<1 e α reale,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

possiamo determinare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione arcsin$x$ per -1<x<1:

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$$

Per x = 1/2 e con arcsin(1/2) = π/6, si ha:

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$$

da cui:

$$\pi = 3\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{(2n+1)\cdot 4^n}$$

con errore:

$$|E_n| < \frac{1}{4^n(2n+3)}$$

Posto n = 30, si ottiene il seguente valore approssimato di π:

$$\pi \cong 3\sum_{n=0}^{30} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{(2n+1)\cdot 4^n}$$

con un errore

$$|E_n| < \frac{1}{63\cdot 4^{30}} < 2\cdot 10^{-20}$$

Il valore di π con 19 cifre decimali esatte è dunque:

π = 3,1415926535897932384…

Cerchio di raggio 1

Per un cerchio di raggio 1 vale la seguente relazione:

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 3.14159265358979.....$$

mentre la sua circonferenza è:

$$2\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Serie infinite

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + ...}}}}}$$

Questa forma di frazione continua è stata trovata nel 1665 da **William Brouncker**.

Un'altra possibile relazione è:

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left((\Phi-1)^{2k+1} + (2\Phi-3)^{2k+1}\right)$$

Trigonometria, pi greco e sezione aurea

$$\cos(72^0) = \cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{phi}{2}$$

$$\sin(18^0) = \sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{phi}{2}$$

$$\cos(36^0) = \cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{Phi}{2}$$

$$\sin(54^0) = \sin(\frac{3\pi}{10}) = \frac{Phi}{2}$$

per cui:

$$Phi = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 - \ldots}}}}}}$$

Da cui:

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{Phi}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{4 - Phi^2}}{2}$$

$$\tan(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{4phi^2 - 1}$$

$$\frac{\pi}{5} = \arctan(\sqrt{5 - 2\sqrt{5}})$$

$$\pi = 5 * \arctan(\sqrt{3 - 4phi})$$

$$\pi = 5 * \arctan(\sqrt{5 - 2\sqrt{5}})$$

La formula di Orberg

E’ noto che:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha * tg\beta}$$

Se si pone:

$$\alpha + \beta = arctg(\frac{1}{x})$$

$$\alpha = arctg(\frac{1}{x + phi})$$

$$\beta = arctg(t)$$

per cui:

$$arctg(\frac{1}{x}) = arctg(\frac{1}{x+phi}) + arctg(t)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{x+phi} + t}{1 - \frac{t}{x+phi}}$$

Da cui:

$$t = \frac{phi}{1 + x * phi + x^2}$$

Nel caso in cui x = 1 troviamo la seguente “**formula in stile Olberg**”:

$$\frac{\pi}{4} = arctg(phi) + arctg(phi^3)$$

Legame tra coefficienti di Fibonacci e la sezione aurea.
Esiste un legame tra i numeri di Fibonacci e la sezione aurea:

$$F(n) = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

Problema di Basilea e Costanti zeta: Espressione in forma chiusa del legame tra zeta e sezione aurea, tra coefficienti di Bernoulli e sezione aurea, tra i fattoriali e la sezione aurea

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{6} \cdot 4^2 \cdot \left[arctg(\Phi) + arctg(\Phi^3) \right]^2 = \frac{8}{3} \cdot \left[arctg(\Phi) + arctg(\Phi^3) \right]^2 = (-1)\frac{B_2(2\pi)^2}{2(2)!}$$

dove:

$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$ dove B_{2n} sono i coefficienti di Bernoulli.

Legame tra i fattoriali, pi greco, sezione aurea e costanti zeta
Dalla espressioni di sopra si vede anche un legame con i fattoriali.

Connessioni Matematiche tra sezione Aurea, costanti zeta, Teoria delle stringhe e pi greco
Vedi articolo ”On the Riemann Hypothesis. Formulas explained - $\phi(x)$ as equivalent RH. Mathematical connections with “Aurea” section and some sectors of String Theory”
Rosario Turco, Maria Colonnese, Michele Nardelli

LA SEZIONE AUREA IN NATURA E NELL’ARTE

La sezione aurea fu studiata dai Pitagorici i quali scoprirono che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r è la sezione aurea del raggio.

La sezione aurea si costruisce dividendo un segmento AB dal punto M in modo tale che il rapporto tra le due parti, la più piccola con la più grande (AM e MB) sia uguale al rapporto della parte più grande (MB) con tutto AB.

Se AB è di lunghezza 1, e chiamiamo x la lunghezza del segmento AB, allora la definizione sopra fornita dà luogo alla seguente equazione:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \text{, e cioè} \quad 1-x = x^2$$

che ha due soluzioni per x, $(-1-\sqrt{5})/2$ e $(\sqrt{5}-1)/2$. La prima è negativa, per cui non soddisfa le condizioni del problema. La seconda rappresenta proprio il rapporto di sezione aurea ed è un numero irrazionale corrispondente a circa 0,618.

Il reciproco di x (1/x) viene indicato con Φ e corrisponde a 1+x, cioè circa 1,618. Molto spesso questo rapporto viene indicato come rapporto aureo e viene utilizzato nella costruzione del rettangolo aureo.

Congettura di Collatz - Congettura del Massimo nella glide – sezione aurea

La congettura del Massimo nella glide è legata alla definizione di costruzione della sezione aurea vista prima, del segmento AB, dove il punto di massimo P coincide con il punto M della costruzione precedente. [1]

Gli autori avevano proposto la seguente congettura: “*Sia N l’intero positivo con N>4, M≠N il valore massimo M(N) assunto nella successione di Collatz e P la posizione assunta dal valore massimo nella glide G(N), allora la successione converge in modo tale che il rapporto P/G(N) < 0,80*”.

Nella valutazione del massimo si esclude N.

[1] Sulla congettura del Massimo vedi Block Notes Matematico - Congettura di Collatz in N - Riducibilità, Pseudo riducibilità e Isopath riducibilità dei numeri - Tecnica dell’isopath massimo e dei numeri perfetti - Vettore parità e Parità - Teorema di Terras.

Se il massimo M si avesse sulla posizione finale, cioè P/G=1, significherebbe che la glide non è arrivata sul valore 1 e quindi la successione di Collatz continuerebbe; quindi per N>4, se la successione converge in G, è necessariamente P/G(N) < 1.

La congettura sostiene che per N>4 la "quantità *di path rimanente*" (G - P) è utilizzata dalla successione per la discesa dal valore massimo verso il valore 1 e che la minima quantità di path rimanente deve essere tale che P/G(N)<0.80 altrimenti la successione non ce la farebbe a convergere all'interno di G. Per cui P deve essere minore di 0,8 G mentre la parte G-P deve essere maggiore di 0,2 G.

Nei primi 3 milioni di numeri naturali l'rmax è di N=10852 con Max=9232 G(10852)=161 e rmax=0.7950310559; quindi apparentemente finora la congettura è vera.

N=10852 da Max=9232 impiega 34 step per arrivare a 1 e tali step pesano sulla glide 34/161=0,211180. In altri termini il numero 10852 impiega circa il 79% degli step per arrivare al massimo e il 21% per convergere a 1.

Il 27 ha un rmax=0,702702702702...

Sezione Aurea - Numeri naturali e Collatz, punto Massimo della sequenza, criterio di Robin
Nella costruzione della sezione aurea abbiamo visto l'equazione in gioco, dove una delle soluzioni è l'inverso della sezione aurea e vale 0,618...

Nella congettura del massimo della glide deve essere P < 0,8 G o (G - P)/G < 0,2 oppure 1- P/G > 0,2.

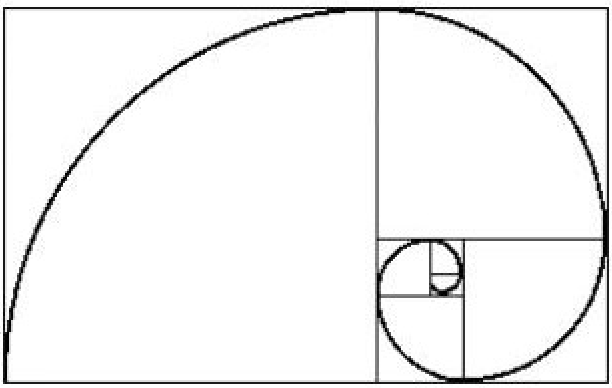
Nel caso della sezione aurea deve essere:

$$1 - 1/phi > 0,2$$

Difatti è almeno 0,382...

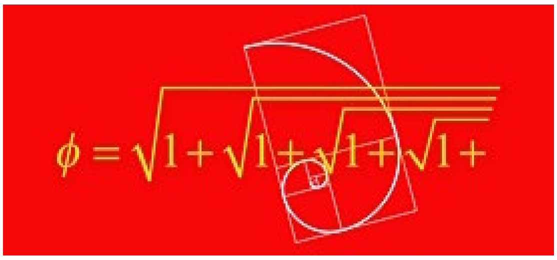
E tutto questo sicuramente è vero. E' solo un caso? Con il criterio di Robin si era visto che dietro i numeri naturali esisteva implicitamente la RH (congettura di Riemann) che coinvolge la funzione zeta e di conseguenza la sezione aurea!

La spirale e la sezione aurea



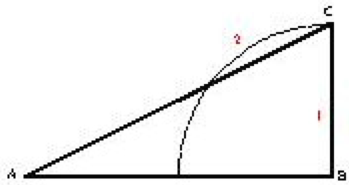
Φ può essere indicato anche come:

$$Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}$$

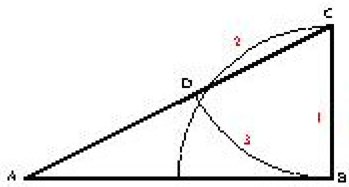


Costruzione geometrica:

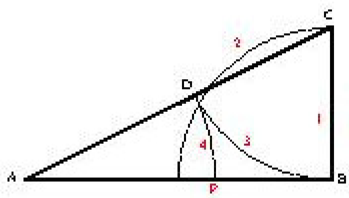
tracciare, perpendicolarmente al segmento AB, per l'estremo B un segmento BC di lunghezza pari ad AB/2



unire l'estremo A con l'estremo C



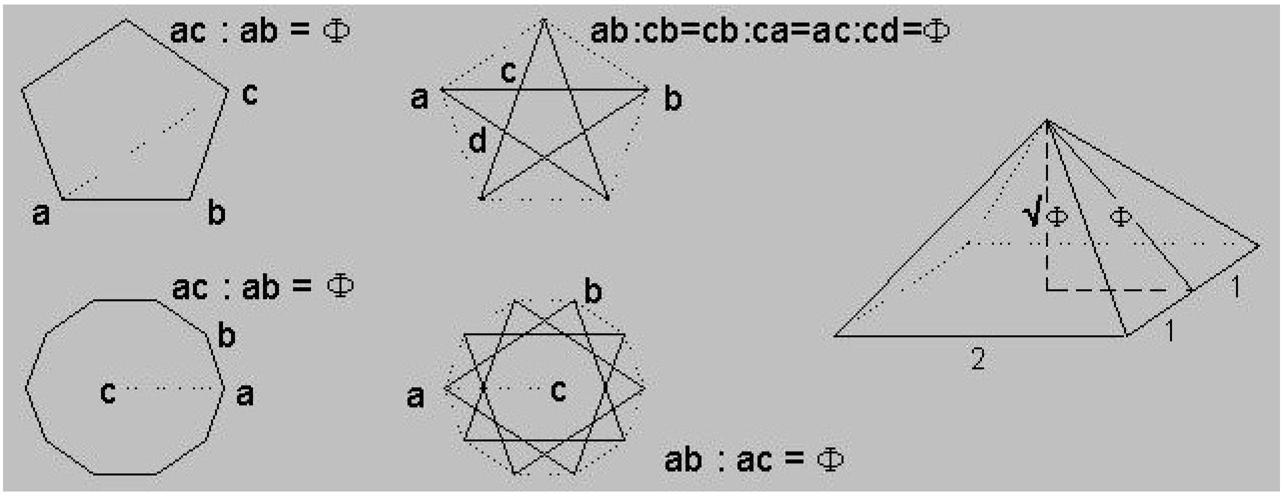
puntare in C e con apertura CB determinare il punto D sul segmento AC

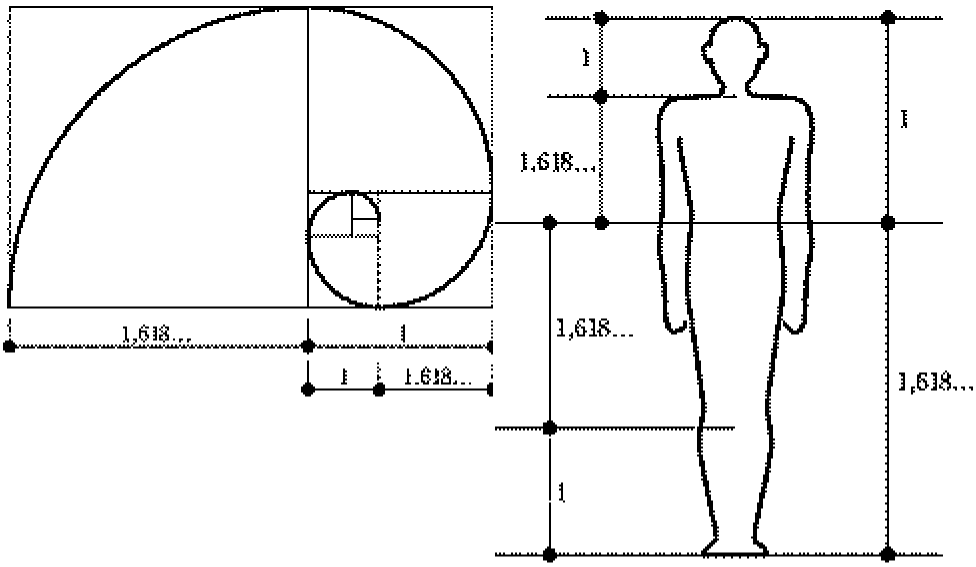


puntare in A e con apertura AD ribaltare il punto D sul segmento AB. Il punto P è la sezione aurea del segmento AB.

La costruzione della sezione aure suggerisce la possibilità di realizzare un processo di crescita in cui si conservano costantemente i rapporti, cioè la crescita dà luogo ad organismi che rimangono sempre simili a se stessi.

In geometria il pentagono e il decagono sono i poligoni regolari che meglio esprimono la sezione aurea Φ, mentre la grande piramide di Cheope contiene sia Φ che $\sqrt{\Phi}$ come mostrano queste figure:

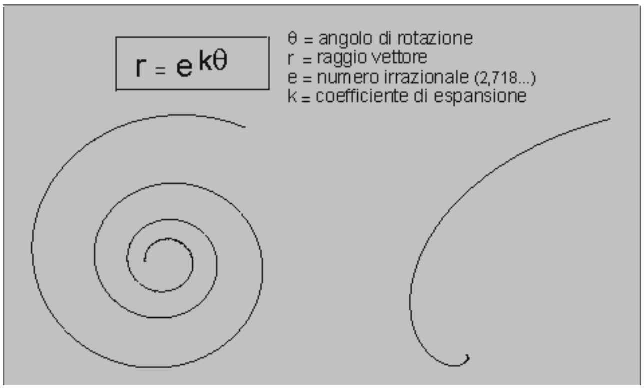




Anche nella pittura e nell'Arte se sezione aurea permetteva simmetria (sinonimo di bellezza) : vedi Partenone d'Atene, oppure la Piramide di Cheope o gli studi di Leonardo etc.

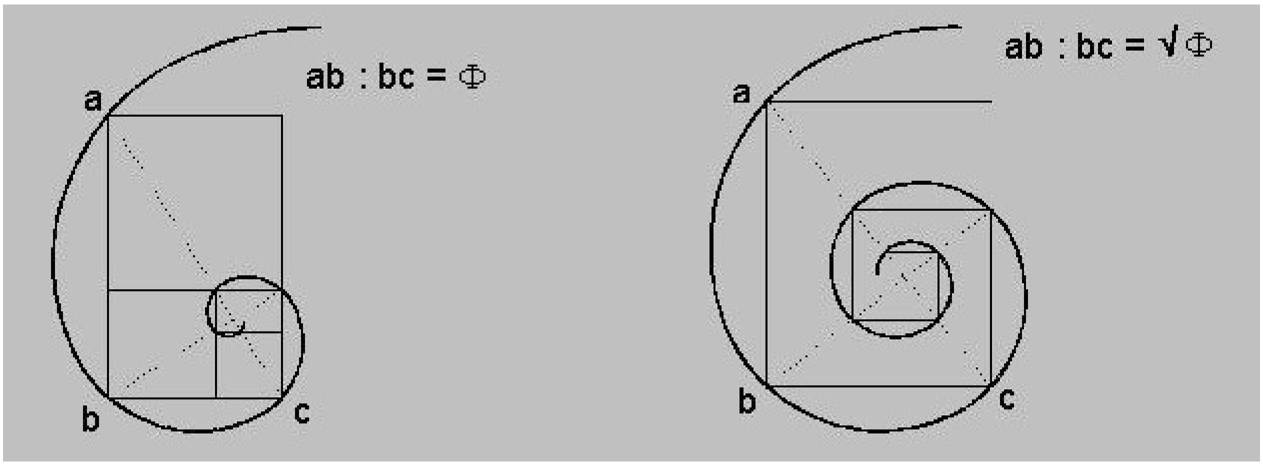
LE SPIRALI

Il termine spirale è generalmente usato per indicare curve che ricordano forme naturali. Una spirale può avere le spire equidistanti oppure sempre più distanti ad ogni giro. Nel primo caso viene chiamata "spirale evolvente" o di Archimede mentre nel secondo viene detta "spirale logaritmica" quando nella relativa formula matematica (equazione) si trova un termine con l'esponente. Inoltre



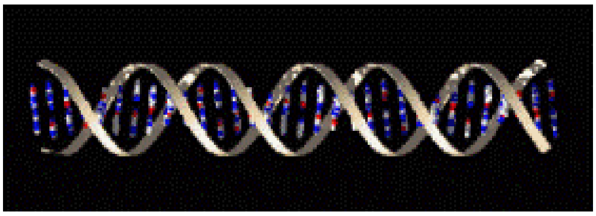
una spirale logaritmica può avvicinarsi a una evolvente (distanza fra le spire quasi costante) oppure essere molto aperta (espansa).

In natura, le spirali più ricorrenti sono quella la spirale logaritmica che ha un ritmo di sviluppo legato a Φ e un altro tipo di spirale il cui sviluppo è legato a $\sqrt{\Phi}$. Questi due tipi di spirali sono l’archetipo della forma di molte conchiglie e anche del ritmo col quale spuntano i rami laterali di molti vegetali e la disposizione dei loro semi nei fiori.

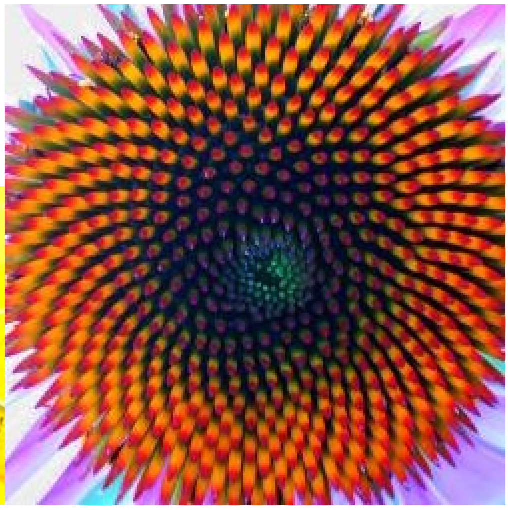


Alcuni esempi di spirali in natura:

DNA



Le galassie



I fiori

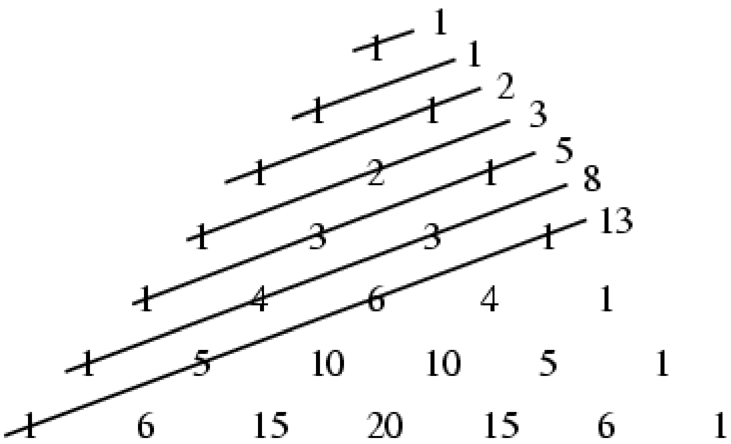
Le conchiglie




Le corna del muflone


Gli uragani

LA SERIE DI FIBONACCI
Nella serie di Fibonacci, ogni numero è formato dalla somma dei due numeri che lo precedono nella serie stessa: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...



La serie è collegata alla sezione aurea e in natura, le piante si accrescono secondo questa successone, così come il numero dei petali di un fiore e la disposizione delle foglie sul ramo di un albero.